<u>Theorem 3,3,4,</u> Seien A, f wie im Theorem (3,3,3) und gelte:
Für jede beschränkte und abgeschlossene Menge $B \subset \mathcal{U} \subset X^\alpha \times \mathbb{R}$, mit $\mathcal{U}$ wie in (3,3,3) gilt $f(B)$ beschränkt in X.
Dann, für eine Lösg x zum Anfangswert x_0 ~~der~~ Gleichg (NC) auf $[t_0, t_1)$ mit t_1 maximal gilt entweder:

$$t_1 = \infty$$

oder: wir können eine Folge $\{\tau_n\}$ in (t_0, t_1) wählen mit $\tau_n \to t_1$, so dann $(x(\tau_n), \tau_n) \to \partial \mathcal{U}$ gilt. Dabei schließen wir den Punkt im unendlichen für $\mathcal{U}$ unbeschränkt ein.

<u>Beweis.</u> ~~Sei $B \subset \mathcal{U}$ beschränkt und abgeschlossen. Dann ist ... eine Umgebung des Randes~~. Sei $t_1 < \infty$. Wegen:

$$\|x(t)\|_\alpha \le \| e^{-A(t-t_0)}\| \, \|x(t_0)\|_\alpha + \int_{t_0}^{t} \|A_1^\alpha e^{-A(t-s)}\| \, \|f(x,s)\| \, ds$$

$$\le C\|x(t_0)\|_\alpha + C_1 \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} \, ds < \infty$$

für alle $t \in (t_0, t_1)$, können wir eine beschränkte, abgeschlossene Menge $B \subset U$ wählen, mit $(x(t), t) \in B$ für alle $t_2 \leq t < t_1$. Dann zeigen wir: $\exists\, x_1 \in B$ mit $x(t) \to x_1$ für $t \to t_1$, was ~~widersprechen~~ der Annahme t_1 maximal ~~[illegible]~~ widerspricht.

Setzen wir $C := \sup \{ \| f(x,t) \| \mid (x,t) \in B \}$ und zeigen wir zunächst, dass $\| x(t) \|_\beta$ für jedes $\beta \in [0,1)$ beschränkt bleibt für $t \to t_1$.

Zunächst, es ist klar $\| x(t) \|_\beta$ beschränkt für $0 \leq \beta \leq \alpha$, wie wir es gesehen haben, da $X^\alpha \subset X^\beta$ für $\alpha \geq \beta \geq 0$.

Für $\alpha < \beta < 1$ gilt:

$$\| x(t) \|_\beta \leq \| A_1^{+(\beta-\alpha)} e^{-A(t-t_0)} \| \, \| x(t_0) \|_\alpha + C \int_{t_0}^{t} \| A_1^\beta e^{-A(t-s)} \| \, ds \leq C' (t-t_0)^{-(\beta-\alpha)} + \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\beta} ds < \infty$$

für alle $t_2 \leq t < t_1 < \infty$.

Dann zeigen wir $\{x(t)\}_{t \in [t_2, t_1)}$ ist „Cauchy". Wähle $t_0 < t_2 \leq \tau < t < t_1$, so gilt:

$$x(t) - x(\tau) = \left(e^{-A(t-\tau)} - \mathbb{I}\right) x(\tau) + \int_{\tau}^{t} e^{-A(t-s)} f(x(s), s)\, ds.$$

Daher folgt:

$$\|x(t) - x(\tau)\|_{\alpha} \leq \| \underbrace{A_1^{-\overbrace{(\beta-\alpha)}^{>0}}}_{\|\cdot\| \leq C_1} \left(e^{-A(t-\tau)} - \mathbb{I}\right) \| \, \|x(\tau)\|_{\beta}$$

$$+ C \int_{\tau}^{t} (t-s)^{-\alpha}\, ds \leq C_1' (t-\tau)^{1-\alpha} + \frac{C}{1-\alpha} (t-\tau)^{1-\alpha}$$

$$\leq C_2 (t-\tau)^{1-\alpha} \longrightarrow 0 \text{ für }$$

$$t, \tau \to t_1.$$

Also gibt es ein $x_1 = \lim_{t \to t_1} x(t) \in B$, da B abgeschlossen. □

Korollar (3.3.5) Sei A sektoriell, $\mathcal{U} = X^\alpha (\tau, \infty)$, f lokal Hölder stetig in t und lokal Lipschitz in x für $(t,x) \in \mathcal{U}$. Sei auch:

$$\|f(x,t)\| \le K(t) \big(\underbrace{1 + \|x\|_\alpha}_{\Rightarrow\, f \neq 0 \text{ für } x = 0} \big),$$

für alle $(x,t) \in \mathcal{U}$, mit K stetig auf (τ, ∞).
Sei $t_0 > \tau$ und $x_0 \in X^\alpha$. Dann ist die eindeutige Lösung x, der Gleichung (NC) definiert für alle $t \ge t_0$.
zum Anfangswert x_0

Beweis: Mit Theorem 3.3.4 müssen wir nur zeigen: $\nexists\, t_1 < \infty$ mit $\|x(t)\| \to \infty$ für $t \to t_1$.
Aber, es gilt:

$$\|x(t)\|_\alpha \le C\|x_0\|_\alpha + \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} K(s) \left(1 + \|x(s)\|_\alpha\right) ds$$

$$= C\|x_0\|_\alpha + \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} K(s)\, ds + \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} \|x(s)\|_\alpha\, ds$$

$$\le C\|x_0\|_\alpha + \frac{\overline{K}\,(t-t_0)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} \|x(s)\|_\alpha\, ds$$

$$= a + \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} \|x(s)\|_\alpha\, ds, \quad \text{falls } t_1 < \infty.$$

Mit eine Verallgemeinerung des Gronwall'schen Lemma zeigt man dann an:

$$0 \le u(t) \le a + b\int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} u(s)\,ds \quad \forall\ t_0 \le t < T$$

$$\Rightarrow \quad u(t) \le a + \int_{t_0}^{t} F(t-s)\,ds$$ mit F stetig auf $0 \le t \le T$.

<u>Theorem 3.3.6.</u> Seien A, f wie in Theorem 3.3.3 und A mit kompakter Resolvente, sowie f wie in Theorem 3.3.4 (abgeschlossen und beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen für $B \times (0,\infty) \subset U \subset X^\alpha \times \mathbb{R}$). Ist x eine Lösung der Gleichung (NC) zum Anfangswert (t_0, x_0) mit $\|x(t)\|_\alpha \le C$ für $t \to \infty$, dann ist $\{x(t)\}_{t > t_0}$ kompakt in X^α.

<u>Beweis.</u> Für den Beweis, reicht zu zeigen dass für $t \ge t_0 + 1$, $\|x(t)\|_\beta$ beschränkt ist. Denn $X^\beta \hookrightarrow X^\alpha$ ist kompakt wegen der Annahme: Resolvente von A kompakt.

Es gilt aber:

$$\| x(t) \|_\beta \leq \| A_1^{\beta-\alpha} e^{-A(t-t_0)} \| \, \| x_0 \|_\alpha + \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\beta} e^{-a(t-s)} \, ds$$

$$\leq M (t-t_0)^{-(\beta-\alpha)} \| x_0 \|_\alpha + \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\beta} e^{-a(t-s)} \, ds$$

$$< \infty$$

für alle $t \geq 1 + t_0$. $\square$

<u>Bemerkung</u>, Wie wir bereits gezeigt hatten: x beschränkt in X^α (dang) so ist x beschränkt auch in X^β für $\alpha \leq \beta < 1$, was eine gewisse Glattheit Eigenschaft repräsentiert.

Für $\{x_n\} \subset X^\beta = D(A_1^\beta) \subset D(A_1^\alpha) = X^\alpha$

für $\alpha \leq \beta$ gilt:

Ist $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ beschränkt in X^β,

d.h. $\| A_1^\beta x_n \| \leq C$, so ist:

$$\| x_n \|_\alpha = \| A_1^\alpha x_n \| = \| A_1^{-(\beta-\alpha)} A_1^\beta x_n \| .$$

Aber A_1^{-1} kompakt ist äquivalent zu $A^{-\alpha}$ kompakt für alle $\alpha > 0$.

D.h. $B \subset X^\beta$ beschränkt $\Rightarrow$ $B \subset X^\alpha$ kompakt. $\square$