Interpolationsräume, Seminar über Funktional Analysis, WiSe 10/11

Lev Lazar
Studiengang M.Sc.Mathematik
Matrikel 5986811

Wintersemester 2010/2011

1 Der Satz von Aronszajn-Gagliardo

Für eine einheitliche Formulierung und zur Vereinfachung der Notation führen wir zunächst Begriffe ein die wir im Wieterem nutzen wollen.

Definition 1.1 (Katagorie). Eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist eine Menge von Trippeln der Art:

$$\mathcal{C} = \{T : A \to B, S : C \to D, \ldots\}.$$

Wir bezeichnen $A, B, C, D, \ldots$: *Objekte* der Kategorie $\mathcal{C}$, oder einfach Objekte, und $T, S, \ldots$ bezeichnen wir als *Morphismen*.

Für die Morphismen ist ein Produkt definiert, mit den Eigenschaften:

(i) $T : A \to B, S : B \to C \in \mathcal{C} \Rightarrow ST : A \to C \in \mathcal{C}$.

(ii) Für alle $A \in \mathcal{C}$ gibt es ein $\mathbb{I}_A : A \to A \in \mathcal{C}$, mit: $T\mathbb{I}_A = \mathbb{I}_A T = T$, für alle $T : A \to A \in \mathcal{C}$.

Gelegentlich schreiben wir auch $T \in \mathcal{C}$ und meinen dabei Eigentlich: es gibt Objekte A, B mit $T : A \to B \in \mathcal{C}$.

Ebenso: $A \in \mathcal{C}$, d.h.: es gibt ein Morphism $T : A \to B \in \mathcal{C}$.

Definition 1.2 (Funktor)**.** Seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ zwei Kategorien. Eine Abbildung:

$$F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}, F\left(T : A \to B\right) := F(T) : F(A) \to F(B) \in \mathcal{C},$$

mit den Eigenschaften:

(i) $F\left(ST : A \to C\right) = F(ST) : F(A) \to F(C) = F(S)F(T) : F(A) \to F(C)$, oder Kurz: $F(ST) = F(S)F(T)$;

(ii) $F\left(\mathbb{I} : A \to A\right) = F(\mathbb{I}) : F(A) \to F(A) = \mathbb{I} : F(A) \to F(A)$, für alle $A \in \mathcal{C}_1$, oder Kurz: $F(\mathbb{I}_A) = \mathbb{I}_{F(A)}$.

bezeichnen wir ein *Funktor*.

Ist $F\left(T : A \to B\right) = T : A \to B$ ein Funktor, so sagen wir $\mathcal{C}_1$ ist eine *Unterkategorie* von $\mathcal{C}$.

Definition 1.3 (Kompatible Raumpaare)**.** Seien A_0, A_1 zwei normierte Vektorräume. Wir sagen das Paar (A_0, A_1) ist *kompatibel*, falls es ein Topologischer Hausdorff-Vektorraum $\mathscr{U}$ existiert mit $A_0, A_1 \subset \mathscr{U}$.

Im weiterem verweisen wir immer wieder auf das nachfolgend bewiesene Lemma 1.4, dass Banachräume Charakterisiert.

Lemma 1.4. *Sei A eine normierter linearer Raum. Genau dann ist A vollständig, wenn:*

$$\left(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A \wedge \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|_A < \infty\right) \Rightarrow \exists a_0 \in A : \left\|a_0 - \sum_{n=1}^{N} a_n\right\|_A \to 0$$

für $N \to \infty$.

Beweis. Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ eine Cauchy-Folge. Dann können wir eine Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ wählen mit: $\left\|a_{n_k} - a_{n_{k-1}}\right\|_A \leq 2^{-k}$. Dann gilt:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left\|a_{n_k} - a_{n_{k-1}}\right\|_A < \infty,$$

und nach Annahme, gibt es ein $a_0 \in A$ mit:

$$\lim_{N\to\infty} \left\|a_0 - \sum_{k=2}^{N} \left(a_{n_k} - a_{n_{k-1}}\right)\right\|_A = \lim_{N\to\infty} \|a_0 + a_{n_1} - a_{n_N}\|_A = 0$$

also:

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_n = a_0 + a_{n_1} \in A.$$

Umgekehrt, sein A ein Banachraum und $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|a_n\|_A < \infty$. Dann ist $\left\{\sum\limits_{n=1}^{N} a_n\right\}_{N\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, und es gibt ein $a_0 \in A$ mit: $a_0 = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$. □

Im nächsten Lemma konstruieren wir zwei Funktoren die wir bei der konstruktion der Interpolationsräume grundlegend sind.

Lemma 1.5. *Seien* $\hat{A} := (A_0, A_1)$ *kompatible Banachräume. Dann sind auch:*

$$\hat{A}_\Delta := (A_0 \cap A_1, \|\cdot\|_\Delta), \quad \|a\|_\Delta := \max\left(\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1}\right);$$

und:

$$\hat{A}_\Sigma := (A_0 + A_1, \|\cdot\|_\Sigma), \quad \|a\|_\Sigma := \inf_{a=a_0+a_1}\left(\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1}\right);$$

Banachräume.

Beweis. Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \hat{A}_\Delta$ eine Cauchy-Folge. Dann ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Banachräumen A_0 und A_1, und besitzt Grenzwerte $a_0^0 \in A_0$, $a_0^1 \in A_1$. Aber nach Annahme ist $A_0, A_1 \subset \mathscr{U}$, und $\mathscr{U}$ ein Hausdorff-Raum. Somit gilt:

$$a_n \to a_0 \equiv a_0^0 = a_0^1 \in \hat{A}_\Delta.$$

Betrachten wir nun eine Folge $\{a_n\} \subset A_\Sigma$ mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|a_n\|_\Sigma < \infty$. Zu $n \in \mathbb{N}$ können wir eine Darstellung $a_n = a_n^0 + a_n^1$ wählen mit:

$$\left\|a_n^0\right\|_{A_0} + \left\|a_n^1\right\|_{A_1} \leq \|a_n\|_\Sigma + \varepsilon \leq 2\|a_n\|_\Sigma.$$

Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|_{A_i} < \infty$ für $i = 0, 1$, und nach Lemma 1.4 gibt es $a_0^0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \in A_0$ und $a_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \in A_1$. Setzen wir $a_0 := a_0^0 + a_0^1$, so folgt:

$$\begin{aligned} \left\| a_0 - \sum_{n=1}^{N} a_n \right\|_{\Sigma} &= \left\| a_0^0 - \sum_{n=1}^{N} a_n^0 + a_0^1 - \sum_{n=1}^{N} a_n^1 \right\|_{\Sigma} \\ &\leq \left\| a_0^0 - \sum_{n=1}^{N} a_n^0 \right\|_{A_0} + \left\| a_0^1 - \sum_{n=1}^{N} a_n^1 \right\|_{A_1} \to 0, \end{aligned}$$

für $N \to \infty$. $\square$

Im weiterem beschäftigen wir uns mit der Kateogorie der normierter Räume $\mathcal{N}$, mit den beschränkten linearen Abbildungen als Morphismen, oder mit der Unterkategorie $\mathcal{B}$ der Banachräume mit beschränkten linearen Abbildungen.

Lemma 1.6. *Sei $\mathcal{C}$ eine Unterkategorie von $\mathcal{N}$. Zu je zwei kompatiblen Paaren $\hat{A} = (A_0, A_1)$ und $\hat{B} = (B_0, B_1)$ mit $A_0, A_1, B_0, B_1 \in \mathcal{C}$ betrachten wir die beschränkten Abbildungen $T : \hat{A}_\Sigma \to \hat{B}_\Sigma$ mit den Eigenschaften:*

(i) $T_i \equiv T|_{A_i} : A_i \to B_i \in \mathcal{C}$, *für* $i = 0, 1$;

(ii) $Ta = T_0 a_0 + T_1 a_1$ *für alle* $a = a_0 + a_1 \in \hat{A}_\Sigma$;

(iii) $T_0 a = T_1 a$ *für alle* $a \in \hat{A}_\Delta$.

Dann bilden die Tripel: $T : \hat{A} \to \hat{B}$ eine Kategorie die wir mit $\mathcal{C}_1$ bezeichnen.

Beweis. Folgt unmittelbar aus der Definition. $\square$

Korollar 1.7. *Sei $\mathcal{C}$ eine Unterkategorie von $\mathcal{N}$ und $\mathcal{C}_1$ die Unterkategorie wie in Lemma 1.6. Dann sind durch:*

$$\begin{aligned} \Delta : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}, \quad \Delta\left(T : \hat{A} \to \hat{B}\right) &:= T : \hat{A}_\Delta \to \hat{B}_\Delta; \\ \Sigma : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}, \quad \Sigma\left(T : \hat{A} \to \hat{B}\right) &:= T : \hat{A}_\Sigma \to \hat{B}_\Sigma; \end{aligned}$$

Funktoren definiert.

Beweis. Folgt unmittelbar aus Lemma 1.5, und Korollar 1.6. □

Im weiterem bezeichnen wir zu einer Unterkategorie von $\mathcal{N}$ von $\mathcal{C}$ mit $\mathcal{C}_1$ die Kategorie die wir in Lemma 1.6 definiert haben, die Kategorie der kompatiblen Paare in $\mathcal{C}$.

Definition 1.8. Sei $\mathcal{C}$ eine Unterkategorie von $\mathcal{N}$.

(i) Wir sagen $A \in \mathcal{C}$ ist ein *Zwischenraum* von $\hat{A} = (A_0, A_1) \in \mathcal{C}$, bzw. A *liegt zwischen* $\hat{A}$, falls gilt:

$$\hat{A}_\Delta \subset A \subset \hat{A}_\Sigma. \tag{1.1}$$

(ii) Wir sagen $A \in \mathcal{C}$ ist ein *Interpolationsraum hinsichtlich* $\hat{A}$, bzw. A *interpoliert* $\hat{A}$, falls A zwischen $\hat{A}$ liegt, und es gilt:

$$T : \hat{A} \to \hat{A} \in \mathcal{C}_1 \Rightarrow T : A \to A \in \mathcal{C}. \tag{1.2}$$

(iii) Allgemeiner, zu $\hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{C}_1$ sagen wir: $A, B \in \mathcal{C}$ sind *interpolationsräume hinsichtlich* $\hat{A}, \hat{B}$, bzw. A, B *interpolieren* $\hat{A}, \hat{B}$ falls A zwischen $\hat{A}$ und B zwischen $\hat{B}$ liegt, und es gilt:

$$T : \hat{A} \to \hat{B} \in \mathcal{C}_1 \Rightarrow T : A \to B \in \mathcal{C}. \tag{1.3}$$

Bemerkung 1.9. Es ist klar, die Räume $\hat{A}_\Delta$ und $\hat{A}_\Sigma$ sind Interpolationsräume. Zu $T : \hat{A} \to \hat{B} \in \mathcal{C}_1$ gilt:

$$\|Ta\|_{\hat{B}_\Delta} \leq \max\left(\|Ta\|_{B_0}, \|Ta\|_{B_1}\right),$$

für $a \in \hat{A}_\Delta$, also:

$$\|T\|_{\hat{A}_\Delta \to \hat{B}_\Delta} \leq \max\left(\|Ta\|_{A_0 \to B_0}, \|Ta\|_{A_1 \to B_1}\right).$$

Ähnlich ist auch:

$$\begin{aligned}
\|Ta\|_{\hat{B}_\Sigma} &= \|T_0 a_0 + T_1 a_1\|_{\hat{B}_\Sigma} \leq \|T_0 a_0\|_{B_0} + \|T_1 a_1\|_{B_1} \\
&\leq \|T_0\|_{A_0 \to B_0} \|a_0\|_{A_0} + \|T_1\|_{A_0 \to B_0} \|a_1\|_{A_1} \\
&\leq \max\left(\|T_0\|_{A_0 \to B_0}, \|T_1\|_{A_0 \to B_0}\right)\left(\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1}\right),
\end{aligned}$$

für jede Darstellung $a = a_0 + a_1$ (d.h. auch für das Infimum). Also, auch in diesem Fall:

$$\|T\|_{\hat{A}_\Sigma \to \hat{B}_\Sigma} \leq \max\left(\|Ta\|_{A_0 \to B_0}, \|Ta\|_{A_1 \to B_1}\right).$$

Definition 1.10. Seien $A, B \in \mathcal{C}$ Interpolationsräume hinsichtlich $\hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{C}_1$. Wir sagen: A, B sind *gleichmäßige Interpolationsräume*, bzw. A, B *interpolieren gleichmäßig*, falls gilt:

$$\|T\|_{A \to B} \leq C \max\left(\|T_0\|_{A_0 \to B_0}, \|T_1\|_{A_1 \to B_1}\right). \tag{1.4}$$

Ist $C = 1$, so sagen wir: A, B sind *exakte Interpolationsräume*, bzw. A, B *interpolieren exakt.*

Kann ein $\theta \in [0, 1]$ gewählt werden, so dass gilt:

$$\|T\|_{A \to B} \leq C \|T_0\|_{A_0 \to B_0}^{1-\theta} \|T_1\|_{A_1 \to B_1}^{\theta}, \tag{1.5}$$

so sagen wir: A, B sind *gleichmäßige (exakte falls $C = 1$) Interpolationsräume der Potenz θ.*

Im weiteren verwenden wir immer wieder das folgende Resultat:

Satz 1.11. *Sei $\mathcal{B}$ die Kategorie der Banachräume mit beschränkten linearen Abbildungen. Sei $\mathcal{B}_1$ die zugehörige Kategorie der kompatiblen Paare aus $\mathcal{B}$ wie in Lemma 1.6. Seien $A, B \in \mathcal{B}$ Interpolationsräume hinsichtlich $\hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{B}_1$. Dann interpolieren A, B gleichmäßig.*

Beweis. Betrachten wir den Vektorraum:

$$\mathscr{T} := \left\{T : \hat{A} \to \hat{B} : T \in \mathcal{B}_1\right\}.$$

Definieren wir auf $\mathscr{T}$ die Normen:

$$\begin{aligned} \|T\|_3 &:= \max\left(\|T\|_{A \to B}, \|T\|_{A_0 \to B_0}, \|T\|_{A_1 \to B_1}\right); \\ \|T\|_2 &:= \max\left(\|T\|_{A_0 \to B_0}, \|T\|_{A_1 \to B_1}\right), \end{aligned}$$

und setzen wir:

$$\begin{aligned} \mathscr{T}_3 &:= (\mathscr{T}, \|\cdot\|_3); \\ \mathscr{T}_2 &:= (\mathscr{T}, \|\cdot\|_2). \end{aligned}$$

Sei $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{T}_3$ eine Cauchy-Folge und T_0 :. Dann ist:

$$\begin{aligned} \|(T_n - T_m)\, a\|_\Sigma &\leq \|(T_n - T_m)\, a_0\|_{B_0} + \|(T_n - T_m)\, a_1\|_{B_1} \\ &\leq \max\left(\|T_n - T_m\|_{A_0 \to B_0}, \|T_n - T_m\|_{A_1 \to B_1}\right)\left(\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1}\right) \\ &\leq \|T_n - T_m\|_3 \left(\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1}\right). \end{aligned}$$

D.h. es ist:

$$\|T_n - T_m\|_\Sigma \leq \|T_n - T_m\|_3 \to 0$$

für $m, n \to \infty$, und wir finden somit ein $T_0 : \hat{A}_\Sigma \to \hat{B}_\Sigma$ mit $\|T_0 - T_n\|_\Sigma \to 0$ für $n \to \infty$.

Es ist auch:

$$\|(T_0 - T_n)\, a\|_{B\subset\hat{B}_\Sigma} \leq C\, \|(T_0 - T_n)\, a\|_{\hat{B}_\Sigma} \leq C\, \|T_0 - T_n\|_\Sigma\, \|a\|_\Sigma \to 0,$$

für $n \to \infty$ da B ein Zwischenraum von $\hat{B} \subset \mathscr{U}$, mit $\mathscr{U}$ ein linearer Hausdorff Raum (insbesondere besitzen also die Teilräume eine äquivalente Topologie).

Insgesamt folgt nun $\|T_0 - T_n\|_3 \to 0$ für $n \to \infty$ und $\mathscr{T}_3$ ist ein Banachraum. Aus der selben Argumentation folgt auch $\mathscr{T}_2$ ein Banachraum.

Betrachten wir die Inklusion $\iota : \mathscr{T}_3 \to \mathscr{T}_2$. Es ist: $\|\iota\|_{\mathscr{T}_3\to\mathscr{T}_2} \leq 1$, und offensichtlich ist ι ein Isomorphismus. Nach dem Satz von Banach ist auch ι^{-1} ein Isomorphismus, und wir erhalten:

$$\begin{aligned}\|T\|_{A\to B} \leq \|T\|_3 &= \left\|\iota^{-1} T\right\|_3 \\ &\leq C\, \|T\|_2 = C \max\left(\|T\|_{A_0\to B_0}, \|T\|_{A_1\to B_1}\right).\end{aligned}$$

$\square$

Definition 1.12 (Interpolationsfunktor)**.** Sie $\mathscr{C}$ eine Unterkategorie von $\mathscr{N}$ und $\mathscr{C}_1$ die zugehörige Kategorie der kompatiblen Paare. Einen Funktor $F : \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}$ bezeichnen wir *Interpolationsfunktor*, falls gilt:

$$F\left(T : \hat{A} \to \hat{B}\right) = T : F(\hat{A}) \to F(\hat{B}),$$

wobei $F(\hat{A}), F(\hat{B})$, $\hat{A}, \hat{B}$ interpolieren.

Entsprechend der Definition 1.10 sprechen wir von gleichmäßigen, exakten, zu der Potenz θ Funktoren.

Ist weiter:

$$\|T\|_{F(\hat{A})\to F(\hat{B})} \leq C \max\left(\|T\|_{A_0\to B_0}, \|T\|_{A_1\to B_1}\right),$$

mit $C \equiv C(T)$, so sagen wir F ist ein beschränkter Funktor.

Satz 1.13 (Aronszajn-Gagliardo)**.** *Sei $A \in \mathscr{B}$ ein Interpolationsraum hinsichtlich $\hat{A} \in \mathscr{B}_1$. Dann existiert ein exaktes Funktor $F_0 : \mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}$ mit $F_0(\hat{A}) = A$.*

Bemerkung 1.14. Hier meinen wir mit $F_0(A) = A$: $F_0(A)$ besitzt die selben Elemente wie A und eine äquivalente Norm.

Nach Satz 1.11 ist jeder Interpolationsfunktor $\mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}$ gleichmäßig. Somit folgt aus diesem Satz: jedes Interpolationsraum auf $\mathscr{B}$, kann mit einer äquivalenten Norm umnormiert werden, so dass dieser bezüglich der neuen Norm exakt interpoliert.

Beweis. Wir fürhren den Beweis in mehreren Schritten. Um die Existenz zu beweisen konstruieren wir einen Funktor mit den gesuchten Eigenschaften. Hierbei ist es essenziell, die Konstruktion geeigneter Bilder des Funktors, der Interpolationsräume auf die ein Paar abgebildet werden soll. Schließlich wird es uns leicht nach zu weisen, dass der so konstruierte Funktor die gewünschten Eigenschaften erfüllt.

Für ein $T : \hat{A} \to \hat{B} \in \mathcal{B}_1$, definieren wir die Norm:

$$\|T\|_{\hat{A}\to\hat{B}} := \max\left(\|T\|_{A_0\to B_0}, \|T\|_{A_1\to B_1}\right). \tag{1.6}$$

Hier ist zu bemerken: der selbe Norm haben wir definiert auf $\hat{A}_\Delta$, und wir haben bereits gezeigt, diese Norm ist eine obere Schranke der Norm auf $\hat{A}_\Sigma$.

Zu einem Paar $\hat{X} = (X_0, X_1) \in \mathcal{B}_1$, definieren wir:

$$X := \left\{ x \in \hat{X}_\Sigma : x = \sum_{n=1}^{\infty} T_n a_n \right\} \tag{1.7}$$

mit $T_n : \hat{A} \to \hat{X} \in \mathcal{B}_1$, und mit $a_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Auf X definieren wir eine Norm, durch:

$$\|x\|_X := \inf_{x=\sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n a_n} N_X(x), \tag{1.8}$$

wobei:

$$N_{\hat{X}}(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\|_{\hat{A}\to\hat{X}} \|a_n\|_A. \tag{1.9}$$

Ein $x \in X$, besitzt somit eine *zulässige Darstellung* $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n a_n$, d.h. eine mit:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\|_{\hat{A}\to\hat{X}} \|a_n\|_A < \infty.$$

(i) Wir zeigen: $\hat{X}_\Delta \subset X \subset \hat{X}_\Sigma$.

Wählen wir ein $a_1 \in A$, und sei $\varphi \in \hat{A}^*_\Sigma$, mit: $\varphi(a_1) = 1$. Wählen wir noch ein $x \in \hat{X}_\Delta$. Dann definieren wir:

$$T_1 : \hat{A} \to \hat{X}, \quad T_1 a := \varphi(a_0 + a_1)x.$$

Es folgt dann:

$$\begin{aligned} \|T_1 a\|_{X_i} &= |\varphi(a_0 + a_1)| \, \|x\|_{X_i} \leq \|\varphi\|_{\hat{A}_\Sigma \to \mathbb{C}} \|a_0 + a_1\|_\Sigma \|x\|_{X_i} \\ &\leq \|\varphi\|_{\hat{A}_\Sigma \to \mathbb{C}} \|x\|_\Delta \|a_0 + a_1\|_\Sigma < \infty, \end{aligned} \tag{1.10}$$

da $\|a_0 + a_1\|_\Sigma < \infty$ für $a \in \hat{A}$ und $i = 0, 1$. Somit ist:

$$\|T_1\|_{\hat{A} \to \hat{X}} \leq C \|x\|_{\hat{X}_\Delta},$$

im Sinne von Lemma 1.6, und mit $T_n \equiv 0$ und $a_n = 0$, für alle $n \geq 2$, folgt:

$$x = T_1 a_1 = \sum_{n=1}^\infty T_n a_n \quad \wedge \quad \|x\|_X \leq \|T_1\|_{\hat{A} \to \hat{X}} \|a_1\|_A < \infty.$$

Somit ist: $\hat{X}_\Delta \subset X$. Weiter folgt aus (1.10):

$$\|x\|_{\hat{X}_\Sigma} \leq 2 \max\left(\|T_1 a_1\|_{X_0}, \|T_1 a_1\|_{X_1}\right) < \infty,$$

da $a_1 \in A \subset \hat{A}$.

Insgesamt folgt die Behauptung.

(ii) Mit Lemma 1.4 zeigen wir: X ist Vollständig.

Sei $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ mit $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|_X < \infty$. Zu $n \in \mathbb{N}$ wählen wir eine Darstellung: $x_n = \sum_{j=1}^\infty T_n^j a_n^j$ mit der Eigenschaft:

$$\sum_{j=1} \left\|T_n^j\right\|_{\hat{A} \to \hat{X}} \left\|a_n^j\right\|_A \leq \|x_n\|_X + 2^{-n}.$$

Man beachte hier die Definition der Norm in (1.8). Dann folgt:

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} T_n^j a_n^j \right\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} T_n^j a_n^j \right\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left\| T_n^j \right\|_{\hat{A} \to \hat{X}} \left\| a_n^j \right\|_A$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\|x_n\|_X + 2^{-n} \right) < \infty.$$

Wir setzen also $x := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} T_n^j a_n^j \in X$, und es folgt:

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} x \right\|_X = \left\| x - \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{\infty} T_n^j a_n^j \right\|_X = \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} T_n^j a_n^j \right\|_X \to 0,$$

für $N \to \infty$.

(iii) Sei:

$$F_0 \left(T : \hat{Y} \to \hat{X} \right) := T : Y \to X. \tag{1.11}$$

Wir zeigen: F_0 ist ein exakter Interpolationsfunktor.

Aus der Definition ist unimittelbar klar: Die Eigenschaften (i) und (ii) aus Definition 1.2, sind erfüllt.

Zeigen wir: $F_0 : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}$, F_0 exakt, so folgt aus (i) und (ii): F_0 ist ein Interpolationsfunktor.

Somit ist zu zeigen: $S : F_0(\hat{X}) \to F_0(\hat{Y}) \in \mathcal{B}$ für $S : \hat{X} \to \hat{Y} \in \mathcal{B}_1$.

Sei also $S : \hat{X} \to \hat{Y} \in \mathcal{B}_1$. Für ein $x \in F_0(X)$ gilt:

$$Sx = \sum_{n=1}^{\infty} S T_n a_n,$$

wobei $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n a_n$ eine zulässige Darstellung von x, d.h. mit:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\|_{\hat{A} \to \hat{X}} \|a_n\|_A < \infty.$$

Dann ist also:

$$\|Sx\|_{F_0(\hat{Y})} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|ST_n\|_{\hat{A}\to\hat{X}} \|a_n\|_A \leq \|S\|_{\hat{X}\to\hat{Y}} \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\|_{\hat{A}\to\hat{X}} \|a_n\|_A < \infty,$$

für jede zulässige Darstellung von x, und somit folgt:

$$\|Sx\|_Y \leq \|S\|_{\hat{X}\to\hat{Y}} \|x\|_X \leq \max\left(\|S\|_{X_0,Y_0}, \|S_1\|_{X_1,Y_1}\right) \|x\|_X,$$

d.h.: der Interpolationsfunktor F_0 ist exakt.

(iv) Es ist noch zu zeigen: $F_0(A) = A$.

Nach Annahme ist A ein Interpolationsraum hinsichtlich $\hat{A} \in \mathcal{B}_1$. Aus Satz 1.11 folgt: A interpoliert gleichmäßig. Für $a \in F_0(A)$ gilt somit:

$$\begin{aligned}\|a\|_A &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} T_n a_n \right\|_A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n a_n\|_A \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\|_{\hat{A}\to\hat{A}} \|a_n\|_A = C N_{\hat{A}}(a) < \infty\end{aligned}$$

(Siehe die Definition 1.10). Damit folgt:

$$F_0(\hat{A}) \subset A.$$

Zu $a \in A$, setzen wir $a_n = 0$, $T_n \equiv 0$ für $n \geq 2$, und $T_1 := \mathbb{I}_{\hat{A}}$, $a_1 := a$, so folgt:

$$\|a\|_{F_0(A)} = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} T_n a_n \right\|_{F_0(A)} \leq \|\mathbb{I}_{\hat{A}}\|_{\hat{A}\to\hat{A}} \|a\|_A = \|a\|_A.$$

□

Korollar 1.15. *Sei A ein Zwischenraum hinsichtlich $\hat{A} \in \mathcal{B}_1$. Dann existiert ein exakter Interpolationsraum $B \in \mathcal{B}$ hinsichtlich $\hat{A}$, mit $A \subset B$.*

Beweis. Den Satz 1.13 wenden wir auf A an. Hier ist zu bedenken: im Satz hatten wir die Annahme A Interpolationsraum verwendet nur um Zu zeigen $F_0(A) \subset A$. Dabei reichte aber bereits: $A \subset \hat{A}_\Sigma$. Nach Satz 1.13 ist also $F_0(A)$ ein exakter Interpolationsaraum, und somit setzen wir $B = F_0(A)$. □

Korollar 1.16. *Sei A ein Interpolationsraum hinsichtlich $\hat{A} \in \mathcal{B}_1$. Sei F_0 der im Satz 1.13 konstruierte Funktor. Dann gilt $F_0(\hat{X}) \subset G(\hat{X})$ für jeden Interpolationsfunktor $G : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}$ mit $G(\hat{A}) = A$.*

Beweis. Für $x \in X = F_0(\hat{X})$, $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n a_n$ eine zulässige Darstellung, $Y := G(\hat{X})$ gilt:

$$\begin{aligned}
\|x\|_Y = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} T_n a_n \right\|_Y &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n a_n\|_Y \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} C \max\left(\|T_n a_n\|_{X_0}, \|T_n a_n\|_{X_1} \right) \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\|_{\hat{A} \to \hat{X}} \|a_n\|_A < \infty,
\end{aligned}$$

da Y nach Satz 1.11 gleichmäßig interpoliert. □

Literatur

[Bergh und Löfström] J. Bergh, J. Löfström: Interpolation Spaces, Springer (1976).

[Aronszajn und Gagliardo] N. Aronszajn, E. Gagliardo: Interpolation Spaces and Interpolation Methods, Annali di Mathematica Pura e Applicata, 68, (1965), 51-118.