Einführung in dynamische Systeme
Vorlesung im Sommersemester 2005
Universität Hamburg

Prof. Roland Gunesch

Büro 107, SP Dgl. und Dynamische Systeme, Department Mathematik, Universität Hamburg, Bundesstr. 55, D-20146 Hamburg, Tel. +49-40-428385988, Fax +49-40-428385117, www.math.uni-hamburg.de/home/gunesch/

Dieses Skript ist noch in Arbeit.

1. Einleitung: Was sind dynamische Systeme?

Dynamische Systeme sind die Lehre von allen Dingen, die sich mit der Zeit ändern. Das beinhaltet das Universum, das Leben und den ganzen Rest. Folgendes sind typische Beispiele, die untersucht werden:

- Das Wetter,
- Planetensysteme,
- physikalische Pendel,
- Computersimulationen wie "game of life",
- Computer selbst,
- mathematische Iterationsverfahren, z.B. das Newton-Verfahren.

Allgemein werden hier insbesondere folgende zwei wichtige mathematische Objekte behandelt:

(1) Lösungen von Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

(2) Iteration von Abbildungen

$$f : X \to X,$$

also

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Hier werden einige typische Konzepte erklärt, z.B.

- Chaos,
- Ordnung,
- Vorhersagbarkeit,
- Stabilität und
- Instabilität,
- Attraktoren,
- Schmetterlingseffekt,
- Information und
- Entropie.

2. Vorkenntnisse

- Analysis
  - Satz über implizite Funktionen
  - Differenzieren im $\mathbb{R}^n$
  - elementare Maßtheorie
- Lineare Algebra
  - Konjugation und Äquivalenz von Matrizen
  - Jordan-Normalform

3. Grundbegriffe

DEFINITION 3.1. Für eine Abbildung $f : X \to X$ auf einer Menge X schreiben wir $f^2 := f \circ f$, $f^3 := f \circ f \circ f$,

$$f^k := f \circ \cdots \circ f \quad (k\text{-malige Verkettung von } f).$$

Denn wir werden die k-malige Verkettung von Abbildungen oft brauchen, die Multiplikation von Werten dagegen selten (und für letztere kann man ohnehin problemlos $f(x)^k$ schreiben, da dies kaum mit $f(x^k)$ zu verwechseln ist).

Wir nennen f^k auch die k-fache **Iteration** von f.

DEFINITION 3.2. Das **Orbit** von $x \in X$ einer Abbildung f ist die Folge

$$(x, f(x), f^2(x), \dots) = (f^k(x))_{k \in \mathbb{N}_0}.$$

Dabei muss f nicht invertierbar sein; ist das aber der Fall, so ist f^k für alle $k \in \mathbb{Z}$ definiert und wir können das **Orbit von x unter der invertierbaren Abbildung** f definieren als

$$(f^k(x))_{k \in \mathbb{Z}}.$$

In diesem Fall heißt $(f^k(x))_{k \in \mathbb{N}_0}$ das **positive Semiorbit** von x unter f.

Manche Leute sagen statt „das Orbit" auch „der Orbit".

DEFINITION 3.3. Ein **Fixpunkt** von f ist ein Punkt $x \in X$ mit

$$f(x) = x.$$

Ein Punkt x heißt **periodisch** mit **Periode** k, wenn gilt

$$f^k(x) = x.$$

Das ist offensichtlich genau dann der Fall, wenn x ein Fixpunkt von f^k ist. Es ist nicht nötig, dass k den kleinsten möglichen Wert hat; wenn doch, heißt k die **minimale Periode** von x.

Es gilt also:

LEMMA 3.4. *Wenn ein Punkt periodisch ist mit Periode $k \in \mathbb{N}$, dann auch mit $l \cdot k$ für alle $l \in \mathbb{N}$.*

DEFINITION 3.5. Ein **Fluss** φ auf einer Menge X ist eine Abbildung $X \times \mathbb{R} \to X,\ (x,t) \mapsto \varphi_t(x)$,so dass gilt:

- $\varphi_0 = \mathrm{id}$,
- für alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$.

Üblicherweise wird gefordert, dass φ mindestens C^1 ist (in (x,t), also beiden Variablen); in vielen Fällen ist φ glatt. Sinn macht die Definition auch, wenn φ nur C^0 ist.

Flüsse treten auf natürliche Weise auf, wenn wir Differentialgleichungen untersuchen:

EXAMPLE 3.6. Wenn $\dot{x} = f(x)$ eine Differentialgleichung auf dem $\mathbb{R}^n$ ist mit der Eigenschaft, dass jede Lösung $x = x(t)$ sich auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen lässt, also für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ definiert ist, dann können wir einen Fluss definieren durch

$$\varphi_t(x_0) := x(t),$$

wobei $x = x(t)$ diejenige Lösung von $\dot{x} = f(x)$ ist mit $x(0) = x_0$.

DEFINITION 3.7. Für einen Fluss φ heißt φ_t die **Zeit-t-Abbildung** von φ.

LEMMA 3.8. *Wenn φ ein C^k-Fluss ist, dann ist für alle $t \in \mathbb{R}$ die Zeit-t-Abbildung φ_t ein C-Diffeomorphismus.*

BEWEIS. φ_t ist invertierbar mit Umkehrabbildung φ_{-t}, da $\varphi_{-t} \circ \varphi_t = \varphi_{-t+t} = \varphi_0 = \mathrm{id}$. Mit φ ist auch φ_t und φ_{-t} eine C^k-Abbildung. □

4. Kontraktionen

DEFINITION 4.1. Ein **metrischer Raum** ist eine Menge X und eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$, so dass für alle $x, y, z \in X$ gilt:

- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- $d(x,y) = d(y,x)$,
- $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$.

Daraus kann man die üblichen Folgerungen ziehen, wie z.B. $d(x,y) \geq 0$ (was oft überflüssigerweise in die Axiome geschrieben wird) usw.

DEFINITION 4.2. Sei X ein metrischer Raum. Eine **Kontraktion auf X ist eine Abbildung $f : X \to X$, für die es $c < 1$ gibt, so dass für alle x, y in X gilt:**

$$d(f(x), f(y)) \leq c d(x,y).$$

Wie schon aus Analysis 1 bekannt, ist dies viel stärker als die Bedingung $d(f(x), f(y)) < cd(x, y),\ c \leq 1$.Es ist auch viel stärker als „für alle x, y in X gibt es $c < 1$, so dass gilt $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$**“.**

Es gilt der **Kontraktionssatz** (auch Fixpunktsatz von Banach genannt):

THEOREM 4.3. *Sei X vollständiger metrischer Raum, f Kontraktion auf X. Dann hat f einen eindeutigen **Fixpunkt**, d.h. einen Punkt mit*

$$f(x_0) = x_0.$$

Für alle $x \in X$ gilt: $f^n(x)$ konvergiert gegen x_0 für $n \to \infty$. Es gilt die Abschätzung

$$d(f^n x, x_0) \leq c^n d(x, x_0).$$

THEOREM 4.4. *Wenn X eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist, $f : X \to X$ differenzierbar und $||Df|| < 1$ auf ganz X gilt, dann ist f eine Kontraktion.*

DEFINITION 4.5. Die C^1-Norm einer differenzierbaren Funktion $f : X \to \mathbb{R}^n$ mit Definitionsbereich $X \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$||f||_{C^1} := \sup_{x \in X} ||f(x)|| + \sup_{x \in X} ||Df(x)||.$$

(Das ist endlich für X kompakt und $f \in C^1(X)$.)

THEOREM 4.6. *Wenn $f : X \to X$ eine Kontraktion eines metrischen Raumes X ist, dann gibt es $\varepsilon > 0$, so dass jede Abbildung $\tilde{f}$ mit $||f - \tilde{f}||_{C^1} < \varepsilon$ auch eine Kontraktion ist.*

Der Fixpunkt einer Kontraktion hängt stetig von Parametern ab:

THEOREM 4.7. *Sei $f : X \times Y \to X$ stetig, X ein vollständiger metrischer Raum, Y ein beliebiger metrischer Raum, und für alle $y \in Y$ sei $f_y := f(., y) : x \mapsto f(x, y)$ eine λ-Kontraktion. Dann hängt der (existierende und eindeutige) Fixpunkt $g(y)$ der Abbildung f_y stetig von y ab.*

BEWEIS. Es ist

$$d(x, g(y)) \leq \sum_{i=0}^{\infty} d\left(f_y^i(x), f_y^{i+1}(x)\right) \leq \frac{1}{1-\lambda} d(x, f_y(x))$$

und daher gilt für $x = g(\tilde{y})$, dass

$$d(g(y), g(\tilde{y})) \leq \frac{1}{1-\lambda} d\left(g(\tilde{y}), f_y(g(\tilde{y}))\right) = \frac{1}{1-\lambda} d\left(f_{\tilde{y}}(g(\tilde{y})), f_y(g(\tilde{y}))\right),$$

was wegen der Stetigkeit von f beliebig klein wird für $\tilde{y} \to y$. $\square$

5. Irgendwann kontrahierende Abbildungen

DEFINITION 5.1. Eine Abbildung $f : X \to X$ eines metrischen Raums X heißt **irgendwann kontrahierend**, wenn es $\lambda < 1$ und $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x, y \in X$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n > n_0$ gilt:

$$d(f^n(x), f^n(y)) < C\lambda^n d(x, y).$$

Die Eigenschaft einer Abbildung, irgendwann kontrahierend zu sein, ist robuster als die Eigenschaft, kontrahierend zu sein. Zum Beispiel bleibt sie erhalten, wenn die Metrik sich „uniform ändert":

DEFINITION 5.2. Die Metriken d und $\tilde{d}$ auf einer Menge X heißen **uniform äquivalent,** wenn es $c < \infty$ gibt, so dass für alle $x, y \in X$ gilt:

$$\frac{1}{c} d(x, y) < \tilde{d}(x, y) < cd(x, y).$$

Offensichtlich ist dies nur mit $c \geq 1$ möglich.

LEMMA 5.3. *Wenn f irgendwann kontrahierend ist bezüglich der Metrik d, und wenn $\tilde{d}$ eine andere Metrik ist, die zu d uniform äquivalent ist, dann ist f auch bezüglich $\tilde{d}$ irgendwann kontrahierend.*

BEWEIS. In der Notation der vorigen Definition gilt

$$\tilde{d}(f^n(x), f^n(y)) < cd(f^n(x), f^n(y)) < cC\lambda^n d(x, y) < c^2 C\lambda^n \tilde{d}(x, y).$$

□

THEOREM 5.4. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine irgendwann kontrahierende Abbildung $f : X \to X$ ist uniform äquivalent zu einer Kontraktion auf X. Das heißt, es gibt eine Metrik d_L auf X, die zu d uniform äquivalent ist, so dass f bezüglich d_L eine Kontraktion ist.*

BEWEIS. Die Abbildung f erfüllt

$$d(f^n(x), f^n(y)) < C\lambda^n$$

mit Konstanten $C < \infty$, $\lambda < 1$. Wähle $\mu \in (\lambda, 1)$ und n so groß, dass

$$C(\lambda/\mu)^n < 1.$$

Definiere

$$d_L(x, y) := \sum_{i=0}^{n-1} \mu^{-i} d(f^i(x), f^i(y)).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
d_L(f(x), f(y)) &= \mu \sum_{i=1}^{n} \mu^{-i} d(f^i(x), f^I(y)) \\
&= \mu \left(\sum_{i=0}^{n-1} \mu^{-i} d(f^i(x), f^I(y)) - d(x,y) + \mu^{-n} d(f^n(x), f^n(y)) \right) \\
&= \mu \left(\sum_{i=0}^{n-1} \mu^{-i} d(f^i(x), f^I(y)) - d(x,y) + c(\lambda/\mu)^n d(x,y) \right) \\
&\leq \mu d_L(x,y).
\end{aligned}$$

□

DEFINITION 5.5. Sei f eine irgendwann kontrahierende Abbildung mit $d(f^n(x), f^n(y)) < C\lambda^n$. Eine Metrik

$$d_L(x,y) := \sum_{i=0}^{n-1} \mu^{-i} d(f^i(x), f^i(y))$$

mit $\mu \in (\lambda, 1)$ und n so groß, dass $C(\lambda/\mu)^n < 1$, heißt eine **Lyapunov-Metrik** (auch: **angepasste Metrik**).

Es gibt mehr als eine Lyapunov-Metrik, da μ und n frei wählbar sind. Oft wird auch der Fall $n = \infty$ betrachtet und ebenfalls als Lyapunov-Metrik bezeichnet. [1]

6. Lineare Systeme

Es gilt für eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^0$$

mit

$$\begin{aligned}
E^s = E^s(A) = E^- &= \bigoplus_{|\lambda|<1, \lambda \in \mathbb{R}} E_\lambda \oplus \bigoplus_{|\lambda|<1, \lambda \notin \mathbb{R}} E_{\lambda, \bar{\lambda}}, \\
E^u = E^u(A) = E^+ &= \bigoplus_{|\lambda|>1, \lambda \in \mathbb{R}} E_\lambda \oplus \bigoplus_{|\lambda|>1, \lambda \notin \mathbb{R}} E_{\lambda, \bar{\lambda}}, \\
E^0 = E^0(A) = E^c &= \bigoplus_{|\lambda|=1, \lambda \in \mathbb{R}} E_\lambda \oplus \bigoplus_{|\lambda|=1, \lambda \notin \mathbb{R}} E_{\lambda, \bar{\lambda}}.
\end{aligned}$$

[1] Für Lyapunov nehmen wir als Schreibweise die Standardtranskription ins englische Alphabet. Auch zu sehen sind die Schreibweisen Ljapunov, Liapunov, Liapunow, Liapunoff, ... sowie die einzig wirklich korrekte:

Александр Михайлович Ляпунов

Für eine Matrix A ist die Einschränkung von A auf E^s irgendwann kontrahierend. Für alle $\delta > 0$ gibt es eine Norm $||.||_L$ mit

$$||A|_{E^s}||_L < r(A|_{E^s}) + \delta.$$

Wenn A invertierbar ist, so ist die Einschränkung von A^{-1} auf E^u irgendwann kontrahierend. Für alle $\delta > 0$ gibt es eine Norm $||.||_L$ mit

$$||A_{E^s}||_L < r(A|_{E^s}) + \delta, \quad ||A^{-1}_{E^u}||_L < r(A^{-1}_{E^u}) + \delta.$$

$||.||_L$ heißt **Lyapunov-Norm**.

Analog gilt für eine lineare Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$:

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^0$$

mit

$$\begin{aligned}
E^s = E^s(A) = E^- &= \bigoplus_{\lambda<0,\lambda\in\mathbb{R}} E_\lambda \oplus \bigoplus_{\mathrm{Re}(\lambda)<0,\lambda\notin\mathbb{R}} E_{\lambda,\bar{\lambda}},\\
E^u = E^u(A) = E^+ &= \bigoplus_{\lambda>0,\lambda\in\mathbb{R}} E_\lambda \oplus \bigoplus_{\mathrm{Re}(\lambda)>0,\lambda\notin\mathbb{R}} E_{\lambda,\bar{\lambda}},\\
E^0 = E^0(A) = E^c &= \bigoplus_{\lambda=0,\lambda\in\mathbb{R}} E_\lambda \oplus \bigoplus_{\mathrm{Re}(\lambda)=0,\lambda\notin\mathbb{R}} E_{\lambda,\bar{\lambda}}.
\end{aligned}$$

Für alle $x_0 \in E^s$ gilt: Die Lösung $x(t)$ von $\dot{x} = Ax,\ x(0) = x_0$ konvergiert gegen 0 für $t \to \infty$.

Für alle $x_0 \in E^u$ gilt: Die Lösung $x(t)$ von $\dot{x} = Ax,\ x(0) = x_0$ konvergiert gegen 0 für $t \to -\infty$.

Für alle $x_0 \in E^0 \setminus \{0\}$ gilt: Es gibt $0 < C < \infty$, so dass die Lösung $x(t)$ von $\dot{x} = Ax,\ x(0) = x_0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt, dass $1/C < ||x(t)|| < C$.

7. Maßerhaltende Systeme

Zunächst zur Wiederholung:

DEFINITION 7.1. Sei X eine Menge. Eine **σ-Algebra** $\mathcal{A}$ auf X ist eine Menge von Teilmengen von X mit

- $\emptyset \in X$,
- wenn $A \in \mathcal{A}$, dann auch $X \setminus A \in \mathcal{A}$,
- wenn $A_i \in \mathcal{A}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, dann auch $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

DEFINITION 7.2. Sei nun X eine Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra darauf. Ein **Maß** auf X ist eine Abbildung

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty],$$

so dass gilt:

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- für alle $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ gilt $\mu(A_1 \cup A_2) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2)$,

- wenn $A_i \in \mathcal{A}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$, dann gilt $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$.

Es ist üblich zu sagen: „Sei X ein Maßraum", obwohl μ und nicht X das Objekt ist, das die Information über das Maß enthält, damit auch über die zugehörige σ-Algebra (was der Definitionsbereich des Maßes ist) und damit über X (was die Vereinigung aller Elemente in der σ-Algebra ist).

EXAMPLE 7.3. Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^n$ (im folgenden Volumen genannt, geschrieben vol).

DEFINITION 7.4. Sei μ ein Maß auf X. Dann heißt eine **bijektive** Abbildung $f : X \to X$ **maßerhaltend**, wenn gilt:

$$\mu(f(A)) = \mu(A)$$

für alle $A \in \mathcal{A}$.

Bei dieser Definition wird erstens die σ-Algebra $\mathcal{A}$ in den Voraussetzungen gar nicht erwähnt; das ist korrekt, denn μ enthält diese ja schon als Definitionsbereich. Zweitens wird stillschweigend vorausgesetzt, dass f die σ-Algebra wieder auf sich abbildet. Das stimmt nicht für jede Abbildung und jede σ-Algebra. Für die Abbildungen und σ-Algebren, die wir betrachten (z.B. stetige Abbildungen im $\mathbb{R}^n$ und Lebesgue), ist das aber immer erfüllt.

Diese Definition ist ein Spezialfall der folgenden:

DEFINITION 7.5. Sei μ ein Maß auf X. Dann heißt eine Abbildung $f : X \to X$ **maßerhaltend**, wenn gilt:

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$$

für alle $A \in \mathcal{A}$. Wir sagen dann auch, das Maß μ sei **invariant** unter f.

Gemäß dieser Definition ist die Abbildung

$$f : [0, 1) \to [0, 1),\ f(x) = 2x \text{ mod } 1$$

maßerhaltend für das Längenmaß (Lebesguemaß) auf $\mathbb{R}$.

DEFINITION 7.6. Die **Jacobische** bzw. **Jacobi-Determinante einer differenzierbaren Abbildung** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist

$$Jf := \det Df.$$

THEOREM 7.7. *Eine differenzierbare Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, ist volumenerhaltend genau dann, wenn*

$$|\det Df| \equiv 1$$

ist.

Aus der Definition für Abbildungen erhalten wir sofort eine für Flüsse:

DEFINITION 7.8. Ein Fluss φ auf einem Maßraum heißt maßerhaltend, wenn für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Abbildung φ_t maßerhaltend ist. D.h., für beliebiges $A \in \mathcal{A}$ ist $\mu(\varphi_t(A))$ unabhängig von t.

THEOREM 7.9. *Ein Fluss auf $\mathbb{R}^n$ (oder auf einer Teilmenge davon) ist volumenerhaltend genau dann, wenn das zugehörige Vektorfeld*

$$f(x) := \frac{d}{dt}\varphi_t(x)|_{t=0}$$

überall verschwindende Divergenz hat, d.h.

$$\operatorname{div} f \left(:= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial i} \right) \equiv 0.$$

THEOREM 7.10. ***(Poincaré-Rekurrenz)** Sei μ endliches Maß auf X und invariant unter $f : X \to X$. Wenn $A \subset X$ die Bedingung $\mu(A) > 0$ erfüllt, dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$A \cap f^n(A) \neq \emptyset.$$

DEFINITION 7.11. Sei $f : X \to X$ eine Abbildung (bzw. φ ein Fluss) auf X. Ein Punkt $x \in X$ heißt **positiv rekurrent**, wenn es eine Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gibt mit

$$\begin{aligned} f^{t_k}(x) \to x \quad &\text{und} \quad t_k \to +\infty \quad \text{für } k \to \infty \\ \text{bzw.} \quad \varphi_{t_k}(x) \to x \quad &\text{und} \quad t_k \to +\infty \quad \text{für } k \to \infty, \end{aligned}$$

wobei $t_k \in \mathbb{N}$ (bzw. $t_k \in \mathbb{R}$ für einen Fluss).

Analog heißt ein Punkt $x \in X$ unter einer *invertierbaren* Abbildung oder einem Fluss **negativ rekurrent**, wenn es eine Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gibt mit

$$\begin{aligned} f^{t_k}(x) \to x \quad &\text{und} \quad t_k \to -\infty \quad \text{für } k \to \infty \\ \text{bzw.} \quad \varphi_{t_k}(x) \to x \quad &\text{und} \quad t_k \to -\infty \quad \text{für } k \to \infty \end{aligned}$$

mit $t_k \in -\mathbb{N}$ (bzw. $t_k \in \mathbb{R}$). Wenn ein Punkt positiv und negativ rekurrent ist, heißt er **rekurrent**.

DEFINITION 7.12. Die **ω-Limesmenge** eines Punktes x ist die Menge der Häufungspunkte des positiven Semiorbits $f^{\mathbb{N}}(x)$ bzw. $\varphi^{[0,\infty)}(x)$:

$$\begin{aligned} \omega(x) &:= \{y : \exists (t_k)_{k\in\mathbb{N}} : f^{t_k}(x) \to y,\ t_k \to +\infty \quad \text{für } k \to \infty\} \\ \text{bzw.} \quad \omega(x) &:= \{y : \exists (t_k)_{k\in\mathbb{N}} : \varphi_{t_k}(x) \to y,\ t_k \to +\infty \quad \text{für } k \to \infty\} \end{aligned}$$

Die **α-Limesmenge** eines Punktes x ist die Menge der Häufungspunkte des negativen Semiorbits $f^{-\mathbb{N}}(x)$ bzw. $\varphi^{(-\infty,0]}(x)$:

$$\begin{aligned} \alpha(x) &:= \{y : \exists (t_k)_{k\in\mathbb{N}} : f^{t_k}(x) \to y,\ t_k \to -\infty \quad \text{für } k \to \infty\} \\ \text{bzw.} \quad \alpha(x) &:= \{y : \exists (t_k)_{k\in\mathbb{N}} : \varphi_{t_k}(x) \to y,\ t_k \to -\infty \quad \text{für } k \to \infty\} \end{aligned}$$

LEMMA 7.13. *Es gilt:*

- x *ist positiv rekurrent* $\Longleftrightarrow x \in \omega(x)$,
- x *ist negativ rekurrent* $\Longleftrightarrow x \in \alpha(x)$,
- x *ist rekurrent* $\Longleftrightarrow x \in \omega(x) \cap \alpha(x)$.

Weiterhin gilt:

- *Wenn das positive Semiorbit von* x *einen Limes* y *hat, dann ist* $\omega(x) = \{y\}$.
- *Wenn das negative Semiorbit von* x *einen Limes* y *hat, dann ist* $\alpha(x) = \{y\}$.

THEOREM 7.14. *Sei* $X \subset \mathbb{R}^n$ *oder* $\mathbb{T}^n$, $\mathrm{vol}(X) < \infty$, $f : X \to X$ *volumenerhaltend. Dann gilt: Für alle* $x \in X$ *gibt es Folgen* $y_k \to x$, $m_k \to \infty$, *so dass* $f^{m_k}(y_k) \to x$ *für* $k \to \infty$.

BEWEIS. □

THEOREM 7.15. *Sei* X *eine abgeschlossene Teilmenge von* $\mathbb{R}^n$ *oder* $\mathbb{T}^n$, $f : X \to X$ *volumenerhaltend und invertierbar. Dann ist die Menge der rekurrenten Punkte dicht in* X.

BEWEIS. □

8. Physikalische Systeme (theoretische Mechanik)

8.1. Newton-Systeme, klassische Mechanik. Die von Newton beschriebenen Systeme haben die Form

$f = ma$, wobei $a = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ die **Beschleunigung** und $f = f(x)$ die **Kraft** am Punkt x ist. Typischerweise handelt es sich um einen Massepunkt, der sich unter der Bewegung einer Kraft bewegt.

Dies ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung in x, die sich aber leicht in eine 1. Ordnung umwandeln läßt:

$$\dot{x} = v$$
$$\dot{v} = \frac{1}{m} f(x).$$

In der Newton-Mechanik ist m konstant und wird manchmal zu 1 normiert.

Wir erhalten eine DGL 1. Ordnung:

$$\frac{d}{dt}(x, v) = (v, \frac{1}{m} f(x)).$$

Hierbei sind $x \in \mathbb{R}^n$,$v \in \mathbb{R}^n$. In der Physik ist oft $n = 3$, aber es macht Sinn, allgemeines n zu betrachten. Der Raum $\mathbb{R}^{2n}$ heißt der **Phasenraum** des Systems. Die Differentialgleichung hat für glattes

f eindeutige Lösungen und definiert einen Fluss φ im Phasenraum: $\varphi_t((x_0, v_0)) = (x(t), v(t))$ =die Lösung mit Anfangswerten $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$.

THEOREM. *Für ein Newton-System ist das Phasenraumvolumen invariant, d.h. dvol* $:= dxdv$ *erfüllt vol*$(\varphi_t(A))$ = *vol*(A) *für alle messbaren* A *und alle* $t \in \mathbb{R}$.

BEWEIS. Die Differentialgleichung ist $\dot{u} = F(u)$ mit $u = (x, v)$, $F(u_1, u_2) = (F_1(u_1, u_2), F_2(u_1, u_2)) = (u_2, f(u_1)/m)$. Der Lösungsfluss ist volumenerhaltend, wenn die Divergenz Null ist. Das ist der Fall, da $\partial F_1/\partial u_1 = 0 = \partial F_2/\partial u_2$. □

DEFINITION. Der **Impuls** ist $p := mv$.

Die **kinetische Energie** ist

$$E_{\textbf{kin}}(v) := \frac{1}{2}m||v||^2 = \frac{1}{2}m < v, v > .$$

Wenn zusätzlich f ein Gradientenvektorfeld ist, d.h. $f = -\text{grad}V$ mit einer Funktion $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so heißt $V = V(x)$ das **Potential** oder die **Potentialenergie**. f heißt dann **Potentialfeld**. Die Funktion

$$H(x, v) := E_{\text{kin}}(v) + V(x)$$

heißt die **Gesamtenergie**.

THEOREM. *Für ein Potentialfeld ist die Gesamtenergie* H *invariant. Jedes Orbit liegt auf einer Kurve, entlang welcher* H *konstant ist.*

BEWEIS. $\frac{dH}{dt} = m < v, \dot{v} > + < \text{grad}V, \dot{x} >=< v, m\dot{v} + \text{grad}V >= 0$, da $m\dot{v} = -\text{grad}V$. □

EXAMPLE. Das Pendel $\ddot{x} = -\sin x$: Hier ist $x \in S^1$, da der Winkel periodisch ist. v ist dennoch ein Element in $\mathbb{R}^n$. Dies ist ein Potentialfeld mit $V(x) = -\cos x$. Es ist $H = v^2/2 - \cos x$. Für $H \in (-1, 1)$ sind die Lösungskurven **periodische Orbits**. Für $H = 1$ ergibt sich ein **homoklines Orbit**.

REMARK. Die Orbits schneiden sich nicht. Wo es aussieht, als würden sie sich kreuzen, haben wir in Wirklichkeit mehrere Orbits: einen Fixpunkt im „Kreuzungspunkt" sowie andere Orbits, die darauf zu- oder davon weglaufen, die aber den Fixpunkt nicht in endlicher Zeit erreichen.

Global verhalten sich die Lösungen mit $H > 1$, die mit $H = 1$ und die mit $H < 1$ deutlich verschieden. Das hängt damit zusammen, dass die Funktion H bei $H = 1$ einen Sattelpunkt hat.

8.2. Lagrange-Gleichung und Variationsmethoden.

DEFINITION 8.1. Für ein Potentialsystem heißt

$$L(x,v) := \frac{1}{2} < mv, v > -V(x)$$

die **Lagrange-Funktion**.

DEFINITION 8.2. Die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v}L = \frac{\partial}{\partial x}L$$

heißt **Euler-Lagrange-Gleichung**.

THEOREM 8.3. *Die Lösungen der Newton-Gleichung $m\ddot{x} = -\nabla V$ sind genau die Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichung.*

BEWEIS. $\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v}L = mv$ und $\frac{\partial}{\partial x}L = -\nabla L$. □

DEFINITION 8.4. Für eine C^2-Kurve $c : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ ist eine **Variation** von c eine Schar von Kurven $c_s = c_s(t)$, $t \in [0,T]$, $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, so dass die Abbildung $(t,s) \mapsto c_s(t)$ in C^2 ist und so dass $c = c_0$ gilt.

DEFINITION 8.5. Wenn F eine reellwertige Abbildung auf der Menge der Kurven ist, heißt c **kritischer Punkt** von F, wenn für jede Variation $(c_s)_{s\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial s}F|_c = 0.$$

THEOREM 8.6. *Sei*

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad L = L(x,v)$$

eine C^2-Funktion, $a, b \in \mathbb{R}^n$, $T > 0$. Dann erfüllt die C^2-Kurve $c : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ die Euler-Lagrange-Gleichung genau dann, wenn c kritischer Punkt des Funktionals

$$F(c) := \int_0^T L(c(t), \dot{c}(t))dt$$

auf der Menge

$$\{\tilde{c} \in C^2([0,T], \mathbb{R}^n) : \tilde{c}(0) = a,\ \tilde{c}(T) = b\}$$

ist.

BEWEIS. c ist kritisch genau dann, wenn für alle solchen Variationen $(c_s)_s$ gilt:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial s} F|_c \\
&= \frac{\partial}{\partial s} \int_0^T L dt \\
&= \int_0^T \left(\frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial}{\partial s} c_s|_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial v} \frac{\partial}{\partial s} \dot{c_s}|_{s=0} \right) dt \\
&= \left[\frac{\partial L}{\partial v} \frac{\partial}{\partial s} c_s|_{s=0} \right]_{t=0}^T \text{ (was wegen den Randbedingungen verschwindet)} \\
&\quad + \int_0^T \left(\frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial}{\partial s} c_s|_{s=0} - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} \right) \frac{\partial}{\partial s} c_s|_{s=0} \right) dt \\
&= \int_0^T \left(\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} \right) \frac{\partial}{\partial s} c_s|_{s=0} \right) dt.
\end{aligned}$$

Dies ist sicherlich 0 für Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichung. Umgekehrt folgt aus dieser Gleichung auch die Euler-Lagrange-Gleichung, denn wenn

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}$$

an einer Stelle t_0 längs c nicht 0 ist, also einen Wert $Z \neq 0$ hat, dann wähle eine kleine δ-Umgebung von t, so dass dieser Term dort annähernd konstant ist, und wähle eine Variation $(c_s)_s$ mit

$$\frac{\partial}{\partial s} c_s(t)|_{s=0} = Z$$

für alle $t \in (t_0 - \delta/2, t_0 + \delta/2)$ und

$$\frac{\partial}{\partial s} c_s(t)|_{s=0} = 0$$

für alle t außerhalb von $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$; dann ist für diese Wahl der Variation auch das obige Integral nicht 0. □

8.3. Hamilton-Systeme. siehe Aufgabenblatt

9. Mannigfaltigkeiten

Im Folgenden brauchen wir den Begriff der **differenzierbaren Mannigfaltigkeiten**. Typische Beispiele sind der bekannte euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ und der n-dimensionale Torus $\mathbb{T}^n$ sowie die n-Sphäre S^n. Dies sind Spezialfälle der folgenden allgemeinen Definition. Zuerst benötigen wir allerdings noch ein paar weitere (leider etwas technische) Definitionen:

DEFINITION. Ein **topologischer Raum** ist eine Menge X mit einer Menge T von Teilmengen von X, genannt eine **Topologie** auf X, für die gilt:

- $\emptyset \in T,\ X \in T$.
- Die Vereinigung von beliebig vielen Mengen aus T liegt wieder in T.
- Der Durchschnitt von zwei Mengen aus T liegt wieder in T.

Ein topologischer Raum (X, T) heißt **Hausdorff**-Raum (bzw. hat die Hausdorff-Eigenschaft), wenn gilt: Für alle $x, y \in X$ gibt es $U, V \in T$ mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Wir sagen, ein topologischer Raum erfülle das zweite Abzählbarkeitsaxiom, wenn gilt: Es gibt eine abzählbare Teilmenge von T, so dass die Vereinigung von Mengen daraus alle Mengen von T ergeben.

Es ist üblich, statt „(X, T) ist ein topologischer Raum“ zu sagen: „X ist ein topologischer Raum“, obwohl die Information in T und nicht in der Menge X enthalten ist.

Jetzt können wir uns endlich den erwünschten Mannigfaltigkeiten zuwenden:

DEFINITION. Eine **n-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit** ist ein Tupel $(M, (U_i)_{i\in I}, (h_i)_{i\in I})$, wobei M eine Menge ist (die Menge der Punkte auf der Mannigfaltigkeit), I eine Indexmenge, jedes U_i eine offene Teilmenge von M und h_i eine Bijektion von U_i auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, so dass gilt:

- M ist ein topologischer Raum und erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.
- $M = \bigcup_i U_i$.
- Für alle $i, j \in I$ ist
  $$\psi_{ij} := h_j \circ h_i^{-1} : h_i(U_i \cap U_j) \to h_j(U_i \cap U_j)$$
  ein C^k-Diffeomorphismus.

Die h_i heißen **Karten**, die U_i **Kartenumgebungen** und die ψ_{ij} **Kartenwechsel**.

Die Mannigfaltigkeit heißt **glatt**, wenn sie C^∞ ist. Eine C^0-Mannigfaltigkeit heißt **topologische Mannigfaltigkeit**.

Meist wird statt „$(M, (U_i)_{i\in I}, (h_i)_{i\in I})$ ist eine Mannigfaltigkeit“ einfach gesagt „M ist eine Mannigfaltigkeit, d.h wie bei Maßräumen und bei topologischen Räumen kommt das relevante Objekt in der Notation nicht vor.

EXAMPLE. $\mathbb{R}^n$ ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit Karte $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $h(x) = x$.

- $\mathbb{T}^n$ (der n-dimensionale Torus) ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit 2^n Karten. Alle deren Kartenwechsel sind Translationen auf dem $\mathbb{R}^n$.
- $\mathbb{S}^n$ (die n-dimensionale Sphäre) ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit 2 Karten, den sogenannten **stereographischen Projektionen** vom $\mathbb{R}^{n+1}$ in den $\mathbb{R}^n$.
- Für jede glatte Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist
$$\text{Graph}(f) := \{(x, f(x))\}$$
eine glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Graph(f) ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+1}$.
- Für jede beliebige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist Graph(f) eine glatte Mannigfaltigkeit, mit einer einzigen Karte h : Graph$(f) \to \mathbb{R}^n$, $h((x, f(x))) := x$. Allerdings ist hier Graph(f) weder „eingebettet" noch „Untermannigfaltigkeit" (für diese Begriffe siehe ein Buch über Differentialtopologie, z.B. [Jänich, Klaus: *Vektoranalysis*]).

Letzteres Beispiel ist recht exotisch; die Mannigfaltigkeiten, die wir wirklich brauchen, "sehen auch glatt aus". Allgemein reicht es aus, sich "glatte" Untermengen des $\mathbb{R}^n$ vorzustellen, denn es kann gezeigt werden, dass alle Mannigfaltigkeiten der Dimension n in einen $\mathbb{R}^m$ eingebettet werden können. Dabei ist fast immer $m > n$.

Weiterhin benötigen wir Abbildungen von/auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten:

DEFINITION. Eine Abbildung $f : M \to N$ mit $(M, U_i, h_i), (N, V_j, \tilde{h}_j)$ Mannigfaltigkeiten heißt C^k, wenn für jede Kartenumgebung U_i von x in M und jede Kartenumgebung V_j von $f(x)$ in N gilt, dass $f|_{U_i}$ „bezüglich Karten C^k ist", d.h. wenn $\tilde{h}_j \circ f \circ h_i^{-1}$ eine C^k-Abbildung ist.

Allgemeiner gilt folgende „Meta-Definition":

DEFINITION. Ein Objekt auf einer Mannigfaltigkeit ist ein Diffeomorphismus / ein Homöomorphismus / eine glatte Abbildung / eine C^k-Kurve / etc. genau dann, wenn dies bezüglich Karten gilt.

D.h. $f : M \to N$ ist ein Diffeomorphismus, wenn f bijektiv ist und für alle Karten $h, \tilde{h}$ auf M, N gilt: $\tilde{h} \circ f \circ h^{-1}$ ist ein Diffeomorphismus (als Abbildung einer Teilmenge vom $\mathbb{R}^n$). Das klingt erst einmal etwas verwunderlich, da für die Karten h ja gar nicht vorausgesetzt ist, dass diese C^k sind. Es ist auch gar nicht möglich, das vorauszusetzen, denn auf der Punktemenge M kann man ja erst einmal nicht differenzieren. Dennoch macht diese Definition Sinn. Denn ob $\tilde{h} \circ f \circ h^{-1}$ ein Diffeomorphismus ist, hängt nicht von $h, \tilde{h}$ ab, und daher können wir testen, ob es für ein (dann alle) $h, \tilde{h}$ gilt.

DEFINITION. Der **Tangentialraum** $T_x M$ an die Mannigfaltigkeit M am Punkt x ist die Menge von stetig differenzierbaren Kurven $c : (-1,1) \to M$ mit $c(0) = x$ modulo der Äquivalenzrelation $c_1 \sim c_2$ für $(h \circ c_1)'(0) = (h \circ c_2)'(0)$.

Dabei muss genaugenommen c in einer Kartenumgebung liegen; dies kann aber auch nachträglich durch Einschränkung des Definitionsbereichs von c sichergestellt werden.

EXAMPLE. Für eine glatte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Graph von f, d.h. $\{(x, f(x))\}$ eine glatte Mannigfaltigkeit M und der Tangentialraum davon am Punkt x ist eine Gerade mit Steigung $f'(x)$.

10. Von Fluss zu Abbildung und zurück

10.1. Poincaré-Abbildungen. Sei φ ein Fluss auf einer Mannigfaltigkeit M (insbesondere $M = \mathbb{R}^n$ oder $M = \mathbb{T}^n$). Das zugehörige Vektorfeld heiße f, d.h.

$$f(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \varphi_t(x).$$

Eine Hyperfläche S ist eine Untermannigfaltigkeit von M (also Teilmenge und Mannigfaltigkeit) mit $\dim S = \dim M - 1$.

Wenn $M = \mathbb{R}^n$, so ist jeder $(n-1)$-dimensionale Unterraum eine Hyperfläche.

DEFINITION 10.1. Eine Hyperfläche S heißt (globaler) (transversaler) **Schnitt** des Flusses φ, wenn gilt:

- Das zu φ gehörende Vektorfeld f ist nirgends tangential an S.
- Jedes Orbit von φ schneidet S unendlich oft für $t \to \infty$ und $t \to -\infty$.

Wir kommen jetzt zur ersten Definition der Poincaré-Abbildung:

DEFINITION 10.2. Sei S ein globaler Schnitt von φ. Die Wiederkehrzeit $\tau : S \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\tau(x) := \min \{t > 0 : \varphi_t(x) \in S\}.$$

Es gilt immer $\tau(x) > 0$, da wir vorausgesetzt haben, dass f nicht tangential an S ist.

DEFINITION 10.3. Sei S ein globaler Schnitt von φ. Dann ist die **Poincaré-Abbildung**
$$P : S \to S$$
definiert durch
$$P(x) := \varphi_{\tau(x)}(x).$$

Das heißt: Der Punkt x wird auf den Punkt abgebildet, der auf dem Orbit von x liegt und der erste ist, an dem das Orbit von x wieder durch S läuft.

EXAMPLE 10.4. Für die Differentialgleichung
$$\dot{r} = r(1-r),$$
$$\dot{\theta} = 1$$
(in Polarkoordinaten) ist
$$S = \{(x,0) : x > 0\}$$
ein globaler Schnitt. Die Wiederkehrzeit ist
$$\tau = 2\pi$$
für alle Punkte in S. Da die Differentialgleichung gelöst wird durch
$$r(t) = \frac{1}{1 + (1/r_0 - 1)e^{-t}}, \quad \theta(t) = t + \theta_0,$$
ist die Poincaré-Abbildung gegeben durch
$$P(x,0) = \left(\frac{1}{1 + (1/r_0 - 1)e^{-2\pi}}, 0 \right).$$

10.2. Suspensionen.

DEFINITION 10.5. Sei M eine Mannigfaltigkeit und $f : M \to M$ ein Diffeomorphismus. Sei $X = (M \times [0,1])/\sim$, wobei die Äquivalenzrelation $\sim$ definiert wird durch
$$(x,1) \sim (f(x), 0).$$
Dann ist der **Suspensionsfluss** von f auf X definiert durch
$$\psi_t([(x,\theta)]) := [(f^{\lfloor t+\theta \rfloor}(x), t + \theta - \lfloor t + \theta \rfloor)].$$
Hierbei bedeutet $\lfloor r \rfloor := \max\{s \in \mathbb{N} : s \leq r\}$.

Wir können den Suspensionsfluss statt für Diffeomorphismen einer Mannigfaltigkeit M auch für Diffeomorphismen einer offenen Menge U im $\mathbb{R}^n$ definieren. Allerdings ist auch in diesem Fall die Menge X, auf der der Suspensionsfluss definiert ist, keine Teilmenge des $\mathbb{R}^n \times [0,1]$, sondern eine abstrakte Mannigfaltigkeit.

EXAMPLE 10.6. Wenn $f : S^1 \to S^1$ eine Rotation ist, so ist X ein Torus.

EXAMPLE 10.7. Wenn $f : S^1 \to S^1$ eine Spiegelung ist, so ist X eine *Klein-Fläche*, eine nicht-orientierbare Mannigfaltigkeit (eine Fläche, deren "Innenseite" gleichzeitig die "Außenseite" ist). X wird auch „Klein'sche Flasche“ genannt, obwohl sie kein Volumen einschließt. („Herr Professor, ich hatte meine Übungsaufgaben in meine Klein'sche Flasche gelegt, doch jetzt kann ich sie nirgends mehr finden.“)

EXAMPLE 10.8. Wenn $f : (0,1) \to (0,1)$ eine Spiegelung ist, so ist X ein *Möbiusband*.

11. Konjugation und Orbit-Äquivalenz

Im Folgenden wollen wir die Analyse von dynamischen Systemen erleichtern, indem wir gleich ganze Klassen von „gleichen", „äquivalenten" usw. Systemen untersuchen. Doch was sind geeignete Konzepte von „Gleichheit", „Äquivalenz" usw.?

Für Abbildungen hat sich folgendes Konzept als brauchbar herausgestellt:

DEFINITION 11.1. Zwei C^k-Diffeomorphismen $f : X \to X$, $g : Y \to Y$, $1 \le k \le \infty$, heißen **topologisch konjugiert** (oder **C^0-konjugiert**), wenn es einen Homöomorphismus $h : X \to Y$ gibt mit

$$f = h^{-1} \circ g \circ h.$$

Allgemeiner heißen zwei C^k-Diffeomorphismen $f : X \to X$, $g : Y \to Y$, $1 \le k \le \infty$, **C^j-konjugiert** mit $1 \le j \le \infty$, wenn es einen C^j-Diffeomorphismus $h : X \to Y$ gibt mit $f = h^{-1} \circ g \circ h$.

EXAMPLE 11.2. Die Abbildungen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$, $g(x) = 8x$, sind topologisch konjugiert mittels $h(x) = x^3$, was ein Homöomorphismus ist. h ist kein Diffeomorphismus, und es gibt auch keinen solchen, wie wir in Kürze sehen.

Wenn f, g C^j-konjugiert sind, muss h nicht eindeutig bestimmt sein.

EXAMPLE 11.3. Wenn $f = g : X \to X$, dann ist *jeder* Homöomorphismus $h : X \to X$ eine Konjugation.

Diese Definition von Konjugation ist zwar leicht auf Flüsse zu übertragen, aber es wird sich gleich herausstellen, dass da ein anderes Konzept brauchbarer ist. Zunächst die analoge Definition:

DEFINITION 11.4. Zwei C^k-Flüsse φ, ψ auf X, Y mit $1 \leq k \leq \infty$ heißen **topologisch konjugiert** (**C^0-konjugiert**), wenn es einen Homöomorphismus $h : X \to Y$ gibt, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\varphi_t = h^{-1} \circ \psi_t \circ h.$$

Allgemeiner heißen zwei C^k-Diffeomorphismen $f : X \to X$, $g : Y \to Y$, $k \geq 1$, **C^j-konjugiert** mit $0 \leq j \leq \infty$, wenn es einen C^j-Diffeomorphismus $h : X \to Y$ gibt mit $\varphi_t = h^{-1} \circ \psi_t \circ h$.

Hier taucht nun folgendes Problem auf: Sei beispielsweise φ der Fluss zu dem System

$$\dot{r} = r, \qquad \dot{\theta} = 1$$

(in Polarkoordinaten) und ψ der Fluss zu

$$\dot{r} = 2r, \qquad \dot{\theta} = 2.$$

Diese beiden Systeme haben dasselbe Phasenportrait, d.h. für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ durchläuft das Orbit von φ genau dieselben Punkte wie das Orbit von ψ durch x. Der einzige Unterschied ist, dass die Geschwindigkeit verschieden ist. Wir brauchen daher ein Konzept von Äquivalenz, das nicht so sensibel bezüglich des Zeitparameters ist. Folgendes ist brauchbar:

DEFINITION 11.5. Die C^k-Flüsse φ, ψ auf X, Y mit $1 \leq k \leq \infty$ heißen **Orbit-äquivalent** (**C^0-Orbit-äquivalent**), wenn es Homöomorphismen $h : X \to Y$ und $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, so dass σ orientierungserhaltend (d.h. monoton wachsend) ist und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\varphi_t = h^{-1} \circ \psi_{\sigma(t)} \circ h.$$

Es gibt auch die Definition von **C^j-Orbit-Äquivalenz** mit $0 \leq j \leq \infty$; dabei wird gefordert, dass in der obigen Definition h ein C^j-Diffeomorphismus ist. Allerdings wird für σ nach wie vor nur Homöomorphie gefordert.

Wenn also zwei Flüsse Orbit-äquivalent sind, dann können die Orbits zusammengestaucht werden.

Unmittelbare Folgerungen der Definition sind:

LEMMA 11.6.

- *Wenn f zu g C^j-konjugiert ist ($0 \leq j \leq \infty$) und f einen Fixpunkt hat, dann auch g.*
- *Wenn f zu g C^j-konjugiert ist ($0 \leq j \leq \infty$), gibt es für jedes periodische Orbit von f ein periodisches Orbit von g, und zwar mit derselben Periode.*
- *Eine Identitätsabbildung id_X ist zu keiner anderen Abbildung außer anderen Identitätsabbildungen id_Y konjugiert.*

Fast alles in diesem Lemma gilt auch für Konjugation von Flüssen und für Orbit-Äquivalenz von Flüssen; allerdings kann sich die Periode eines periodischen Orbits bei Orbit-Äquivalenz ändern:

LEMMA 11.7.

- *Wenn φ zu ψ C^j-konjugiert ist ($0 \leq j \leq \infty$), gibt es für jedes periodische Orbit von φ ein periodisches Orbit von ψ, und zwar mit derselben Periode.*
- *Wenn φ zu ψ Orbit-äquivalent ist, gibt es für jedes periodische Orbit von φ ein periodisches Orbit von ψ, aber nicht notwendigerweise mit derselben Periode.*

In fast allen Fällen kann man nur C^0-Konjugation erwarten, auch bei glatten Abbildungen oder Flüssen. Eine Ausnahme macht folgender Satz:

THEOREM 11.8. *(„flow-box", Begradigungssatz) Wenn φ ein C^1-Fluss auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit ist und das zugehörige Vektorfeld*

$$f(x) := \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi(x)$$

an der Stelle x_0 nicht verschwindet, dann gibt es eine offene Umgebung U von x_0, so dass $\varphi|_U$ (die Einschränkung von φ auf U) C^1-konjugiert ist zum konstanten Fluss auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, definiert durch

$$\psi_t(y) = y + te_1$$

(mit e_1= der erste Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$).

12. Hufeisen und Büroklammer

Im Folgenden wollen wir ein Beispiel für eine „chaotische" Abbildung betrachten, ein sogenanntes **Hufeisen**. Das erste Beispiel eines solchen stammt von Smale; hier studieren wir eine abgewandelte Version, die angenehmer ist.

DEFINITION 12.1. Die die **G-förmige Hufeisen-Büroklammer** ist auf $U = [0,1] \times [0,1]$ definiert durch

$$G : U \to \mathbb{R}^2, \quad G(x,y) := \begin{cases} \left(3x, \frac{y}{3}\right) & \text{für } x \leq 1/3 \\ \left(3x-2, \frac{y+2}{3}\right) & \text{für } x \geq 2/3 \\ \text{glatt fortgesetzt} & \text{für } x \in [1/3, 2/3] \end{cases}$$

Diese Abbildung ist noch keine Abbildung eines Raums auf sich selbst. Um eine geeignete Menge als Definitionsbereich zu finden, betrachten wir:

DEFINITION 12.2. Sei $f : X \to X$ eine Abbildung. Eine Menge $A \subset X$ heißt **positiv invariant** unter f, wenn $f(A) \subset A$. Für eine invertierbare Abbildung f heißt A **negativ invariant**, wenn $f^{-1}(A) \subset A$. Wenn A positiv und negativ invariant ist, heißt A **bi-invariant** oder einfach **invariant**. Eine Abbildung $H : X \to Y$ heißt **invariant** unter f, wenn $H \circ f = H$.

Vorsicht: Manche Bücher benutzen das Wort „invariant" als Synonym für „positiv invariant" und nicht für „bi-invariant".

Nun suchen wir eine möglichst große Menge im $\mathbb{R}^2$, die unter G invariant ist. Hierfür bietet sich die Menge

$$\Lambda := \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} G^i(U)$$

an. Sie ist per Definition invariant, und sie ist Teilmenge von U, da $U = G^0(U)$.

DEFINITION 12.3. Die Standard-**Cantormenge** ist definiert als

$$C := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n 3^{-n} : (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \text{ erfüllt } a_n \in \{0,\ 2\}\ \forall n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

LEMMA 12.4. *Es gilt:*

a) C ist überabzählbar.

*b) C ist homöomorph zum **Cantor-Staub** $C \times C$. (Zwei Mengen heißen homöomorph, wenn es eine stetige Bijektion zwischen ihnen mit stetiger Umkehrabbildung gibt.)*

BEWEIS. Siehe Aufgabenblatt 3. □

LEMMA 12.5. *Die Menge $\Lambda := \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} G^i(U)$ ist der Standard-**Cantor-Staub** $C \times C$, wobei C die Standard-Cantormenge ist.*

BEWEIS. $U \cap G(U)$ ist das Einheitsquadrat mit dem horizontalen „Drittel"-Rechteck entfernt, also die zwei horizontalen Rechtecke $[0,1] \times \left[0, \frac{1}{3}\right]$ und $[0,1] \times \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Da G aus zwei linearen Abbildungen besteht, wird bei der nächsten Anwendung von G aus jedem dieser Rechtecke wieder ein horizontales Drittel entfernt usw. Somit ist

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}_0} G^i(U) = [0,1] \times C.$$

Für die Umkehrabbildung G^{-1} gilt, dass $U \cap G^{-1}(U)$ aus den zwei vertikalen Rechtecken $\left[0, \frac{1}{3}\right] \times [0,1]$ und $\left[\frac{2}{3}, 1\right] \times [0,1]$ besteht. Bei jeder weiteren Anwendung von G wird aus jedem Rechteck wieder ein vertikales Drittel entfernt, und somit ist

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}_0} G^{-i}(U) = C \times [0,1].$$

Damit ist natürlich

$$\Lambda = \bigcap_{i\in Z} G^{i}(U) = C \times C.$$

□

Diese Abbildung ist, wie wir sehen werden, ein Prototyp einer „chaotischen" Abbildung in folgendem Sinn:

DEFINITION 12.6. Eine Abbildung $f : X \to X$, wobei X ein topologischer Raum ist, heißt **topologisch transitiv**, wenn es ein dichtes Orbit gibt.

DEFINITION 12.7. Eine Abbildung $f : X \to X$, wobei X ein topologischer Raum ist, heißt **topologisch mischend**, wenn es für alle nichtleeren offenen Mengen $U, V \subset X$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n > N$ gilt: $U \cap f^n(V)$ ist nicht leer.

DEFINITION 12.8. Eine Abbildung $f : X \to X$ heißt **chaotisch**, wenn die Menge der periodischen Punkte dicht ist und die Abbildung topologisch transitiv ist.

Diese Definition von Chaotizität stammt von Devaney; es gibt noch andere.

Anstatt diese Eigenschaften für unsere Hufeisen-Büroklammer direkt zu zeigen, studieren wir zuerst ein gänzlich anders aussehendes System, sogenannte symbolische Dynamik. Dann werden wir sehen, dass diese augenscheinlich sehr verschiedenen Systeme vergleichbare Dynamik haben.

13. Symbolische Dynamik

Zunächst definieren wir die **Symbolräume:**

DEFINITION 13.1. Die Menge

$$\Omega := \{(\omega_i)_{i\in\mathbb{Z}} : \omega_i \in \{0,1\} \text{ für alle } i \in \mathbb{Z}\}$$

heißt **Menge der zweiseitigen Sequenzen** (oder **zweiseitiger Symbolraum**) und

$$\Omega^R := \{(\omega_i)_{i\in\mathbb{N}_0} : \omega_i \in \{0,1\} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_0\}$$

heißt **Menge der einseitigen Sequenzen** (oder **einseitiger Symbolraum**).

Darauf gibt es ein natürliches dynamisches System, welches alle Folgenglieder nach links schiebt:

DEFINITION 13.2. Der **Shift-Operator** auf Ω (bzw. Ω^R) ist definiert durch

$$\sigma(\omega)_i := \omega_{i+1}.$$

Auf der Menge der zweiseitigen Sequenzen ist das eine Bijektion; auf der Menge der einseitigen Sequenzen dagegen nicht, denn dort wird der Wert von ω an der linkesten (0-ten) Koordinaten „vergessen" und mit ω_1 überschrieben.

Die Symbolräume sind metrische Räume:

DEFINITION 13.3. Auf Ω ist für jedes $\lambda > 1$ eine Metrik wie folgt definiert:

$$d_{\lambda,N}(\alpha,\omega) := \sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda^{-|i|}\Delta(\alpha_i,\omega_i)$$

mit $\Delta(a,b) = 0$ für $a = b$ und $\Delta(a,b) = 1$ sonst,

bzw. allgemeiner

$$d_{\lambda,N}(\alpha,\omega) := \sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda^{-|i|}|\alpha_i - \omega_i|.$$

14. Fraktale und Dimension

Was sind Fraktale? Das Wort „fraktal" kommt von „zerbrochen" und steht für die nicht-ganzzahlige Dimension. Bestes Beispiel sind selbstähnliche Objekte:

- Die Cantor-Menge,
- das Sierpinski-Dreieck,
- der Sierpinski-Teppich,
- der Menger-Schwamm,
- die Koch-Kurve.

Es gibt unter Anderem folgende Definitionen von fraktaler Dimension, die leider nicht äquivalent sind:

(1) Selbstähnlichkeitsdimension,
(2) Hausdorff-Dimension,
(3) Box-Dimension.

Gemeinsames Feature von all diesen Dimensionen ist: Der n-dimensionale Einheitswürfel hat Dimension n. Allgemeiner soll gelten: Wenn wir die Menge A in jeder Koordinatenrichtung in 10 Scheiben schneiden und dann 10^d Stücke herauskommen, soll die Dimension gleich d sein. Ebenso mit der Zahl 10 ersetzt durch eine beliebige Zahl.

Für selbstähnliche Mengen, also solche, die aus verkleinerten Kopien von sich selbst zusammengesetzt sind, bietet sich folgende Definition an:

14.1. Selbstähnlichkeitsdimension.

DEFINITION 14.1. Wenn eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ aus k Kopien von sich selbst zusammengesetzt ist, die alle um den Faktor $s \in (0,1)$ skaliert sind, so ist die **Selbstähnlichkeitsdimension** von A gleich

$$\dim_S(A) = -\frac{\log k}{\log s}.$$

Das ist dadurch motiviert, dass wir erwarten, dass die Dimension d die Gleichung

$$\left(\frac{1}{s}\right)^d = k$$

erfüllt. Auflösen nach d ergibt gerade die Formel in der Definition.

EXAMPLE 14.2. Die Standard-Cantormenge C besteht aus $k = 2$ Kopien, die mit $s = 1/3$ skaliert sind. Somit ist

$$\dim_S(C) = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Das Sierpinski-Dreieck D besteht aus $k = 3$ Kopien, skaliert mit $s = 1/2$. Somit ist

$$\dim_S(D) = \frac{\log 3}{\log 2}.$$

Für den Sierpinski-Teppich T ist $k = 8$ und $s = 1/3$, somit

$$\dim_S(T) = \frac{\log 8}{\log 3}.$$

EXERCISE 15. Was ist die Selbstähnlichkeitsdimension des Menger-Schwamms?

EXERCISE 16. Wenn wir den n-fachen Cantor-Staub $C \times \cdots \times C \subset \mathbb{R}^n$ betrachten (das n-fache Produkt der Standard-Cantormenge C), was ist dann die Selbstähnlichkeitsdimension?

EXERCISE 17. Was ist die Selbstähnlichkeitsdimension der Cantormenge $C(\lambda)$, die entsteht, wenn aus $[0,1]$ das offene mittlere Intervall der Länge $\lambda \in (0,1)$ entfernt wird, aus jedem verbleibenden Intervall der Länge x wieder das offene mittlere Intervall der Länge $\lambda x \in (0,1)$ entfernt wird usw.?

Natürlich sind solchermaßen selbstähnliche Mengen sehr speziell. Man kann die Definition noch etwas erweitern, um zuzulassen, dass der Skalierungsfaktor s bei jeder Kopie anders ist. Wir wollen uns aber gleich die allgemeinste Definition von Dimension ansehen, nämlich die Hausdorff-Dimension.[2]

17.1. Hausdorff-Dimension.

DEFINITION 17.1. Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ und $d \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ ist

$$\begin{aligned} h^d_\varepsilon(A) : \ = \inf\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(U_i)^d \ \mid (U_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ Überdeckung von } A, \\ \operatorname{diam}(U_i) < \varepsilon \ \forall i \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Das d-dimensionale Hausdorff-Maß ist

$$h^d(A) := \lim_{\varepsilon\to 0} h^d_\varepsilon(A).$$

Letzterer Limes ist wohldefiniert, da h^d_ε monoton in ε ist.

Man kann Folgendes zeigen:

THEOREM 17.2. *Für jedes A gibt es ein $d \in [0,\infty]$ mit*

$$\begin{aligned} h^s(A) &= \infty && \text{für } s < d \\ h^s(A) &= 0 && \text{für } s > d. \end{aligned}$$

DEFINITION 17.3. Die Zahl

$$\begin{aligned} \dim_{\mathrm{H}}(A) : &= \inf\{s > 0 : h^s(A) = 0\} \\ &= \sup\{s \geq 0 : h^s(A) = \infty\} \end{aligned}$$

heißt die **Hausdorff-Dimension** von A.

REMARK 17.4. Es folgt, dass für jedes nichtleere A die Hausdorff-Dimension gleich der Zahl d in dem vorigen Satz ist. Für die leere Menge kann man wahlweise 0 oder $-\infty$ als Dimension festsetzen. Letzteres ist praktisch, da dann Formeln wie $\dim_{\mathrm{H}}(A \times B) \geq \dim_{\mathrm{H}}(A) + \dim_{\mathrm{H}}(B)$ stimmen. In der Literatur wird aber trotzdem oft 0 benutzt.

[2] Genaugenommen gibt es eine noch allgemeinere Dimension, die der Charatheodory-Dimension, die für eine einführende Vorlesung nun wirklich zu anspruchsvoll ist. Siehe [Pesin, Yakov A.: *Dimension theory in dynamical systems: contemporary view and applications*].

REMARK 17.5. Für $s = \dim_{\mathrm{H}}(A)$ muss $h^s(A)$ keineswegs eine Zahl in $(0, \infty)$ sein; auch 0 und ∞ sind möglich.

EXERCISE 18. Finden Sie solche Mengen A.

Der Vorteil der Hausdorff-Dimension ist, dass beliebigen Mengen eine Dimension zugeordnet werden kann. Das Problem mit der Hausdorff-Dimension ist, dass ihre Berechnung sehr schwer ist, sogar für ganz einfache Mengen wie $[0, 1]^n$ oder die Standard-Cantormenge. Daher befassen wir uns jetzt noch mit einer weiteren Dimensionsdefinition, die immer noch reichlich allgemein ist, aber mit wesentlich weniger Aufwand berechenbar, sogar automatisiert per Computer:

18.1. Box-Dimension. Es gibt verschiedene Berechnungsvorschriften für die Box-Dimension, die alle dasselbe Ergebnis liefern und daher alle als Definition taugen.

Zunächst eine Definition, die herauskommt, wenn wir in der Definition der Hausdorff-Dimension den Term $\mathrm{diam}(U_i)$ ersetzen durch die obere Schranke für diese Durchmesser, also eine Zahl, die nicht von i abhängt:

DEFINITION 18.1. Sei A eine kompakte Menge in $\mathbb{R}^n$.

Sei $N(\delta)$ die kleinste Zahl, so dass A mit $N(\delta)$ offenen Mengen von Durchmesser δ überdeckt werden kann.

Definiere die **untere Box-Dimension** als

$$\underline{\dim}_{\mathrm{B}}(A) := \underline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N(\delta)}{-\log \delta} = \liminf_{\delta \to 0} \frac{\log N(\delta)}{-\log \delta}$$

und die **obere Box-Dimension** als

$$\overline{\dim}_{\mathrm{B}}(A) := \overline{\lim}_{\delta\to 0} \frac{\log N(\delta)}{-\log \delta} = \liminf_{\delta \to 0} \frac{\log N(\delta)}{-\log \delta}.$$

Wenn diese Zahlen übereinstimmen, heißt die Zahl die **Box-Dimension** von A :

$$\dim_{\mathrm{B}}(A) := \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N(\delta)}{-\log \delta}.$$

Diese Definition ist schon leichter zu benutzen, erfordert aber immer noch etwas Gehirneinsatz bei der Berechnung von $N(\delta)$. Daher hier eine weitere (äquivalente Definition), die so einfach ist, dass ein Computer sie benutzen kann:

DEFINITION 18.2. Die δ-Parkettierung des $\mathbb{R}^n$ ist die Menge

$$P(\delta) := \{[k_1\delta, (k_1+1)\delta] \times \cdots \times [k_n\delta, (k_n+1)\delta]\},$$

die aus kompakten Würfeln der Kantenlänge δ besteht, welche Eckpunkte auf dem Gitter $\delta \cdot \mathbb{Z}^n$ haben.

Für eine Menge A sei $N_2(\delta)$ die Zahl der Würfel in $P(\delta)$, die A schneiden.

Dann können die untere Box-Dimension, die obere Box-Dimension und bei Gleichheit die Box-Dimension so definiert werden wie oben mit N ersetzt durch N_2.

DEFINITION 18.3. Sei $N_3(\delta)$ die minimale Zahl von Würfeln (der Dimension n), welche $A \subset \mathbb{R}^n$ überdecken, nicht notwendigerweise Elemente der Parkettierung $P(\delta)$.

Dann können die untere Box-Dimension, die obere Box-Dimension und bei Gleichheit die Box-Dimension so definiert werden wie oben mit N ersetzt durch N_3.

DEFINITION 18.4. Sei $N_4(\delta)$ die kleinste Zahl, so dass A mit $N(\delta)$ offenen Bällen von Durchmesser δ überdeckt werden kann.

D.h. $N_4(\delta)$ ist so definiert wie $N(\delta)$, außer dass statt beliebigen offenen Mengen nun Bälle genommen werden.

Dann können die untere Box-Dimension, die obere Box-Dimension und bei Gleichheit die Box-Dimension so definiert werden wie oben mit N ersetzt durch N_4.

THEOREM 18.5. *Die Box-Dimension, untere und obere Box-Dimension sind unabhängig davon, ob in der Definition N, N_2, N_3 oder N_4 steht.*

BEWEIS. Jede Menge von Durchmesser δ ist enthalten in einem Cluster aus $3 \times \cdots \times 3$ Elementen der Parkettierung $P(\delta)$, also ist $N_3 \leq N_2 \leq 3^n N$.

Ein n-dimensionaler Würfel der Kantenlänge 1 kann mit $K(n)$ Bällen von Durchmesser 1 überdeckt werden, wobei die Konstante $K(n)$ nur von n abhängt. Also ist $N \leq K(n) N_3 \leq K(n) N_2$.

Offensichtlich ist auch $N \leq N_3$, da jeder Ball von Durchmesser δ in einen n-Würfel von Durchmesser δ passt.

Weiterhin ist $N = N_4$, da jeder offene Ball von Durchmesser δ eine offene Menge von Durchmesser δ ist und jede offene Menge von Durchmesser δ in einen Ball von Durchmesser δ hineinpasst.

Somit ändert sich N bei Übergang zu N_2, N_3 oder N_4 höchstens um eine (von δ unabhängige) multiplikative Konstante und $\log N$ höchstens um eine additive. Also hat

$$\frac{\log N(\delta)}{-\log \delta}$$

nach diesem Übergang denselben oberen und unteren Grenzwert. □

Es gibt noch weitere mögliche Modifikationen: Die Bälle oder Würfel können offen oder abgeschlossen gewählt werden usw. Wir haben bislang genug Definitionen.

REMARK 18.6. Definition (N_2) ist für maschinelle Auswertung geeignet: Ein Computer kann für endlich viele Werte von δ (z.B. für einen einzigen Wert δ_0) $N_2(\delta)$ bestimmen und somit

$$\frac{\log N(\delta_0)}{-\log \delta_0}$$

als Näherung der Dimension.

19. Topologische Entropie

Das Wort „Entropie" bedeutet Unordnung. In der Theorie dynamischer Systeme messen wir damit die Unvorhersagbarkeit von Orbits.

19.1. Topologische Entropie von Abbildungen.

DEFINITION 19.1. Sei X kompakter metrischer Raum, $f : X \to X$ stetig. Auf X definieren wir eine neue Metrik:

$$d_f^n(x,y) := \max_{i\in\{0,1,\dots,n\}} d(f^i(x), f^i(y)).$$

Offensichtliche Folgerungen sind:

- $d_f^n(x,y) \geq d(x,y)$,
- $m > n$ impliziert $d_f^m(x,y) \geq d_f^n(x,y)$.

DEFINITION 19.2. Sei $N_d(f,n,r)$ die minimale Zahl von Bällen bezüglich der Metrik d_f^n von Radius r, die X überdeckt, d.h.

$$N_d(f,n,r) := \min\left\{\#A \mid X \subset \bigcup_{a\in A} B_r^{d_f^n}(a)\right\}.$$

Diese Zahl ist (für festes f, d, r) monoton wachsend in n. Wir interessieren uns dafür, wie schnell es wächst. Wenn $N_d(f,n,r)$ sich mit wachsendem n verhält wie $e^{\alpha n}$, so ist die exponentielle Wachstumsrate gleich α. Diese Größe ermitteln wir wie folgt:

DEFINITION 19.3. Sei $h_d(f, r)$ die exponentielle Wachstumsrate von $N_d(f, n, r)$ in n, d.h.

$$h_d(f, r) := \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \log N_d(f, n, r).$$

Zuletzt definieren wir

$$h(f) := \lim_{r\to 0} h_d(f, r).$$

$h(f)$ heißt die **topologische Entropie** von f.

REMARK 19.4. $\lim_{r\to 0} h_d(f, r)$ existiert, da $h_d(f, r)$ monoton in r ist.

REMARK 19.5. In der Definiton von h wird die Metrik benutzt. Dennoch heißt h *topologische* Entropie und nicht *metrische* Entropie. Denn wie folgender Satz uns mitteilt, hängt h wirklich nur von der Topologie ab:

THEOREM 19.6. *Sei d' eine zu d äquivalente Metrik, d.h.*

$$\exists c \in (0, \infty)\ \forall x, y \in X : \ \frac{1}{c} d(x, y) \le d'(x, y) \le c d(x, y).$$

Dann ist

$$\lim_{r\to 0} h_d(f, r) = \lim_{r\to 0} h_{d'}(f, r),$$

und die Definition von $h(f)$ hängt nicht davon ab, ob es bezüglich der Metrix d oder der Metrik d' ermittelt wird.

BEWEIS. Es ist jeder Ball bezüglich d mit Radius r enthalten in einem Ball bezüglich d' mit Radius cr. Also ist jede Überdeckung von X mit Bällen bezüglich d mit Radius r und mit Mittelpunkten in der Menge A auch eine Überdeckung von X mit Bällen bezüglich d' mit Radius cr und mit Mittelpunkten in derselben Menge A. Somit gilt

$$N_{d'}(f, n, cr) \le N_d(f, n, r),$$

folglich

$$h_{d'}(f, cr) \le h_d(f, r)$$

und damit gilt

$$\lim_{r\to 0} h_{d'}(f, cr) = \lim_{cr\to 0} h_{d'}(f, cr) \le \lim_{r\to 0} h_d(f, r).$$

Das Argument ist symmetrisch in d, d'. Somit gilt für die Grenzwerte Gleichheit. □

Da die topologische Entropie also (zumindest auf kompakten Räumen) nicht von der Metrik abhängt, ist die Bezeichnung „metrische Entropie“ also nicht allzu sinnvoll. Diese muss noch aus einem anderen Grund sorgfältigst vermieden werden: Es gibt, wie wir später sehen werden, noch den Begriff „maß-theoretische Entropie“. Diese wird in der Literatur gelegentlich „metrische Entropie“ genannt, was zwar erst recht keinen Sinn macht, aber leider nun mal vorkommt, und die maßtheoretische Entropie darf nicht mit der topologischen Entropie verwechselt werden.

Es gilt weiterhin:

THEOREM 19.7. *Sei $f : X \to X$ (X kompakt) topologisch konjugiert zu $g : Y \to Y$, d.h. es gebe einen Homöomorphismus $k : X \to Y$ mit $f = k^{-1} \circ g \circ k$. Dann haben f und g dieselbe topologische Entropie.*

BEWEIS. So ein k erzeugt aus einer Topologie auf X eine auf Y, und sogar aus einer Metrik d auf X eine Metrik $\tilde{d}$ auf Y, definiert durch

$$\tilde{d}(a, b) := d(k^{-1}(a), k^{-1}(b))$$

für $a, b \in Y$. Alle metrischen Topologien sind gleich und somit können wir die topologische Entropie von g bezüglich $\tilde{d}$ berechnen. Dies ist leicht: Die Bilder unter k von d-Bällen von Radius r in X sind genau die $\tilde{d}$-Bälle von Radius r in Y. Somit sind die Bilder unter k von Überdeckungen von X mit d-Bällen von Radius r genau die Überdeckungen von Y mit $\tilde{d}$-Bällen von Radius r. Also ist

$$N_d(f, n, r) = N_{\tilde{d}}(g, n, r)$$

und daraus folgt sofort $h(f) = h(g)$. □

Mit diesem Satz können wir nun reichhaltig Kapital schlagen aus unserer Kenntnis von topologischer Konjugation, um topologische Entropieen zu berechnen.

THEOREM 19.8. *Die topologische Entropie h hat folgende Eigenschaften:*

(1) $h(f) \geq 0$ *für alle* f.
(2) $h(\mathrm{id}) = 0$.
(3) $h(f^2) = 2h(f), h(f^3) = 3h(f), \ldots$.
(4) *Wenn f invertierbar ist, gilt* $h(f^{-1}) = h(f)$.
(5) $h(f^m) = |m|h(f)$ *für alle $m \in \mathbb{N}$ und bei invertierbarem f für alle $m \in \mathbb{Z}$. (Dies ist die Zusammenfassung der vorherigen drei Zeilen.)*
(6) $h(f \circ g) \leq h(f) + h(g)$.

Wie das Beispiel $g = f^{-1}$ zeigt, kann $h(f \circ g)$ strikt kleiner sein als $h(f) + h(g)$.

19.2. Topologische Entropie von Flüssen. Für einen Fluss definieren wir die topologische Entropie auf zweierlei Weise:

Zunächst erzeugt jeder Fluss eine Zeit-1-Abbildung, deren topologische Entropie wir verwenden können:

DEFINITION 19.9. Sei φ ein C^1-Fluss auf X. Definiere

$$h(\varphi) := h(\varphi_1).$$

D.h., die topologische Entropie des Flusses φ wird definiert als die topologische Entropie der Zeit-1-Abbildung von φ.

Zweitens können wir die Definition leicht von Abbildungen auf Flüsse übertragen:

DEFINITION 19.10. Wir können auf X eine Metrik d_φ^T definieren mittels

$$d_\varphi^T := \max_{t\in[0,T]} d(\varphi_t(x), \varphi_t(y)).$$

Damit können wir wie bei Abbildungen definieren

$$N_d(\varphi, T, r) := \min \left\{ \#A \mid X \subset \bigcup_{a\in A} B_r^{d_\varphi^T}(a) \right\},$$

$$h_d(\varphi, r) := \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{T} \log N_d(\varphi, T, r),$$

Zuletzt können wir definieren:

$$h(f) := \lim_{r\to 0} h_d(\varphi, r).$$

Diese beiden Definitionen stimmen überein.

20. Maß-theoretische Entropie

Im Folgenden reden wir von Räumen (X, μ), die ein Maß μ haben. Dieses soll endlich sein, also $\mu(X) < \infty$. Praktisch und keine Einschränkung der Allgemeinheit ist, $\mu(X) = 1$ anzunehmen.

20.1. Information und Entropie einer Partition. Als Motivation überlegen wir uns Folgendes: Wenn wir über ein zufälliges Ereignis im Voraus wissen, dass es mit Wahrscheinlichkeit p eintritt und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ nicht, und wir im Nachhinein die Nachricht erhalten, dass es eingetreten ist, wieviel neue „Information" haben wir durch diese Nachricht gewonnen? Z.B. ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es an einem gegebenen Werktag in mindestens einem Supermarkt etwas zu kaufen gibt, fast 1; die Nachricht, dass es an einem bestimmten solchen Tag irgendwo etwas zu kaufen gab, enthält somit sehr wenig neue Information. Dagegen wäre die Nachricht, dass es an einem bestimmten Werktag in keinem einzigen Supermarkt etwas zu kaufen gab, sehr überraschend und würde sehr viel Information übermitteln. Es soll also gelten: Information ist eine

Funktion der Wahrscheinlichkeit, und zwar eine monoton fallende, also

$$I = I(p)$$

und

$$\lim_{p \to 1} I(p) = 0.$$

Weiterhin ist sinnvoll zu fordern, dass für zwei unabhängige Ereignisse die Information, dass beide eingetreten sind, gleich ist der Information, dass das eine eingetreten ist plus die Information, dass das andere eingetreten ist, also

$$I(p \cdot q) = I(p) + I(q).$$

Es gibt (bis auf Multiplikation mit einer Konstanten) eine einzige solche Funktion: Einen Logarithmus.

DEFINITION 20.1. Sei $p \in [0, 1]$. Dann ist die **Information** von p gegeben durch

$$I(p) := -\log p \in [0, \infty].$$

REMARK 20.2. Hierbei gibt es verschiedene Möglichkeiten, die Basis von $\log$ festzulegen. Praktisch nützlich sind die Basen 2 und e; mit e lässt sich ein wenig leichter differenzieren, aber um praktische Beispiele anzugeben, ist die Basis e unbrauchbar und 2 sehr gut zu handhaben. Um Mehrdeutigkeiten zu vermeiden, verfahren wir so:

DEFINITION 20.3. Wir definieren die Einheit **bit** durch

$$\textit{bit} := \log_b 2,$$

mit unspezifizierter Basis b des Logarithmus. Dies ist eine Funktion von b, und nur nach Wahl von b eine Konstante.

Dann können wir Information immer in der Einheit *bit* angeben, und es kommt exakt derselbe Zahlenwert heraus, unabhängig von der Basis. Das wort *bit* steht für „binary unit". Dieser Begriff ist uns natürlich aus der Computertechnik bekannt.

REMARK 20.4. Natürlich kann eine Information beliebig kleine Werte annehmen, insbesondere weniger als ein *bit* sein. Beispiele gibt es im täglichen Leben zuhauf.

DEFINITION 20.5. Sei (X, μ) ein Maßraum mit $\mu(X) = 1$. Eine **endliche Partition** von X ist eine Menge $P = \{C_1, \ldots, C_n\}$ mit $X = \bigcup_{i=1}^n C_i$ und die C_i disjunkt. Hierbei ist unsere Notation grundsätzlich (ohne dass wir es noch sagen) **mod 0**, das heißt, gilt bis auf Nullmengen. Wir sagen also $A = B$ für $A, B \subset X$ wenn gilt $\mu(A \Delta B) = 0$; hierbei ist $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Wir nennen A und B disjunkt, wenn $\mu(A \cap B) = 0$ gilt. Wir setzen auch stillschweigend voraus, dass alle Mengen, die wir betrachten, messbar sind.

DEFINITION 20.6. Sei nun P eine endliche Partition von X. Dann ist die **Information** auf X bezüglich P definiert als

$$I_P : X \to [0, \infty]$$
$$I_P(x) := -\log \mu(C), \quad \text{wobei } x \in C \in P.$$

Der Mittelwert der Information heißt **Entropie** und wird mit H bezeichnet:

$$H(P) := \int I_P d\mu = \int_{x \in X} I_P(x) d\mu(x).$$

Es gilt sicherlich: Wenn wir die Partition weiter unterteilen, wird die Information $I(x)$ größer oder bleibt gleich (je nachdem, wo x in der Partition liegt).

DEFINITION 20.7. Eine Partition Q heißt **Verfeinerung** der Partition P, geschrieben

$$P \leq Q \qquad \text{(oder } Q \geq P\text{)},$$

wenn jedes Element $D \in Q$ enthalten ist in einem Element $C \in P$. Äquivalent dazu ist, dass alle Elemente $C \in P$ Vereinigungen sind von Elementen $D_1 \cup \cdots \cup D_k \in Q$. Wir sagen auch, die Partition Q ist **größer** als P. Auch: P ist kleiner als Q. Ebenfalls: P ist gröber als Q.

REMARK 20.8. Eine besondere Fußangel hält die deutsche Sprache hier für uns parat: „gröber" klingt ähnlich wie „größer", das eine bedeutet aber die Umkehrung des anderen. Ebenso mit „feiner" und „kleiner".

REMARK 20.9. Die Relation $\geq$ auf Partitionen ist keine Halbordnung; im allgemeinen gilt weder $P \geq Q$ noch $Q \geq P$. Folglich ist es auch falsch, $P \geq Q$ auszusprechen als „P ist nicht kleiner als Q".

21. Attraktoren

21.1. Definition(en) und elementare Eigenschaften. Wir kennen bereits attraktive Fixpunkte (z.B. von Kontraktionen). So ein Fixpunkt verdient sicherlich den Namen „Attraktor": alle Punkte einer Umgebung konvergieren gegen diesen. Das gleiche gilt für attraktive periodische Orbits eines Flusses; z.B. hat die Differentialgleichung

$$\dot{r} = r(1 - r), \qquad \dot{\theta} = 1$$

einen für alle Zeiten definierten Lösungsfluss und alle Orbits außer 0 konvergieren gegen das Orbit $r(t) = 1,\ \theta(t) = t + \text{const}$.

DEFINITION 21.1. Ein **Attraktor** einer Abbildung $f : X \to X$ ist eine Teilmenge A von X, für die gilt:

(1) $f(A) \subset A$,
(2) Es gibt eine offene Umgebung U von A, für die gilt: $A = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} f^i(U)$,
(3) A hat keine echten Teilmengen, die die beiden vorigen Axiome auch erfüllen.

DEFINITION 21.2. Ein **Attraktor** von einem Fluss φ auf Xist eine Teilmenge A von X, für die gilt:

(1) $\varphi_t(A) \subset A \quad \forall t \geq 0$,
(2) Es gibt eine offene Umgebung U von A, für die gilt: $A = \bigcap_{t\geq 0} \varphi_t(U)$,
(3) A hat keine echten Teilmengen, die die beiden vorigen Axiome auch erfüllen.

Grund für die Forderung (3) ist, dass ohne diese Forderung z.B. für das System

$$\dot{x} = x - x^3,$$
$$\dot{y} = -y,$$

welches attraktive Fixpunkte bei $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ und einem Sattel bei $(0, 0)$ hat, die Menge $[-1, 1] \times \{0\}$ auch ein Attraktor wäre. Aber fast alle Punkte in einer Umgebung dieser Menge konvergieren in Wirklichkeit gegen (-1,0) oder (1,0).

Oft wird noch gefordert:

(4) A ist kompakt.

DEFINITION 21.3. Ein Attraktor heißt **hyberbolisch**, wenn er eine hyperbolische Menge ist, d.h. für alle $a \in A$ gilt $T_aA = E^s \oplus E^u$ für eine Abbildung bzw. $T_aA = E^s \oplus E^u \oplus Z$ für einen Fluss φ, wobei $Z = \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi(a)$.

DEFINITION 21.4. Ein Attraktor heißt **chaotisch**, wenn $f|_A$ bzw. $\varphi|_A$ chaotisch ist, d.h. topologisch transitiv und mit dichten periodischen Orbits.

Welche Mengen kommen als Attraktor in Frage? Wie das folgende Beispiel zeigt, ziemlich viele:

EXAMPLE 21.5. Sei $f : X \to X$ topologisch transitiv. Dann ist $X = X \times \{0\}$ ein Attraktor der Abbildung g auf der Menge $Y = X \times [-1, 1]$, definiert durch

$$g(x, s) = (f(x), s/2).$$

Analoges gilt für einen Fluss φ, der auf X topologisch transitiv ist; auf der Menge $Y = X \times [-1, 1]$ hat der Fluss ψ, der durch $\psi_t(x, s) := (\varphi_t(x), se^{-t})$ definiert ist, die Menge $X \times \{0\}$ als Attraktor.

EXAMPLE 21.6. Die **Smale-Spule** ist der Attraktor der Abbildung f auf dem Volltorus $T = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid z \leq 1\} \times S^1$, definiert durch

$$f((x, y, \theta)) = \left(\frac{1}{5}x, \frac{1}{5}y, 2\theta\right) + \frac{1}{5}(\sin\theta, \cos\theta, 0).$$

f wickelt den Torus zweimal in sich selbst auf. Der Attraktor ist auf jedem Schnitt $\theta = \mathrm{const}$ gleich einer Cantormenge.

EXAMPLE 21.7. Das **Lorenz-System** ist das System

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ xz \\ xy \end{pmatrix}.$$

Es wurde von E. Lorenz aufgestellt als ein simples Modell des Wetters. Besonders interessierte er sich für die Parameterwerte $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$.

EXAMPLE 21.8. Rössler

EXAMPLE 21.9. Das **Ikeda-System**

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$
$$f(z) = c_1 + c_2 \exp\left(i\left(c_3 - \frac{c_4}{1 + |z|^2}\right)\right)$$

ist ein Modell für eine optische Zelle; eine solche ist wichtiger Bestandteil eines *optischen Computers*. Numerisch sehen wir einen Attraktor, dessen Form von den Parametern abhängt.

21.2. Bifurkationen.

21.3. Krisen von Attraktoren.

EXAMPLE 21.10. Wenn wir im Ikeda-System

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$
$$f(z) = c_1 + c_2 \exp\left(i\left(c_3 - \frac{c_4}{1 + |z|^2}\right)\right)$$

die ersten 3 Parameter festsetzen auf $c_1 = 0.84$, $c_2 = 0.9$, $c_3 = 0.4$ und den 4. Parameter c_4 variieren lassen zwischen $c_4 = 7.1$ und $c_4 = 7.3$, so stellen wir fest, dass der Attraktor nicht stetig von c_4 abhängt, sondern bei einem bestimmten kritischen Wert $c_4 \approx 7.24$ plötzlich explosionsartig größer wird.