

ALGUNAS APLICACIONES DE LA TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

JESÚS GONZÁLEZ Y MIJAIL GUILLEMARD

RESUMEN. En este trabajo se hace una revisión de algunas aplicaciones recientes de las ideas y los métodos de la topología algebraica a problemas de interés tecnológico moderno.

1. INTRODUCCIÓN

La topología es la rama más joven de la geometría. Si bien las ideas que moldearon sus cimientos se remontan al menos desde Euler, es la obra de Poincaré “Analysis Situs” a finales del siglo XIX la que establece bases sólidas y directrices fundamentales. Mientras que el primer lustro del siglo pasado se caracterizó por un desarrollo exponencial de la topología algebraica (término acuñado por Solomon Lefschetz), el segundo fue testigo de su consolidación e inserción dentro de las diversas disciplinas del quehacer científico. En efecto, la topología ha venido a jugar un papel neurálgico, un centro de encuentro e interacción para las ciencias modernas. Varios autores han escrito sobre tan espectacular y fructífero desarrollo, particularmente la obra *Topology in the 20th century: a view from the inside* [18], escrita hace apenas un quinquenio por uno de los protagonistas de tal desarrollo, hace una recolección de los principales avances logrados durante apenas poco más de un siglo de actividades de investigación profesional.

Si bien el siglo XX ha sido atinadamente denominado el *Siglo de la Topología*, las expectativas para el nuevo siglo son aun más prometedoras y emocionantes debido, en parte, a una de las características más distintivas de la topología algebraica: su versatilidad para relacionarse no sólo con prácticamente todas las disciplinas matemáticas y muchas de la física (ver el trabajo “Topología, Geometría y Física” en esta antología), sino con otras áreas tan aparentemente lejanas como la química ([1, 15]), la economía ([16, 20]) y, más importante para los efectos de esta monografía, la computación y diversas aplicaciones tecnológicas.

En este trabajo revisaremos dos temas en los que la topología algebraica ha incursionado con resultados interesantes: la planeación motriz en la robótica y el análisis de nubes de datos—pero las posibilidades de investigación apenas comienzan.

2. LA COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL DE LA PLANEACIÓN MOTRIZ EN LA ROBÓTICA

Si bien uno de los grandes logros de los topólogos del siglo pasado fue la clasificación de encajes e inmersiones de una variedad en otra, el problema tiene vertientes naturales que carecen de solución aun en la actualidad. Por ejemplo, un problema en extremo difícil es el determinar la mínima dimensión euclideana donde una variedad dada admite una inmersión o un encaje. Los espacios proyectivos, cocientes de esferas por la involución antípoda, han sido un punto de referencia importante en dicho problema, no sólo por la complejidad del mismo, sino por el hecho de que los avances logrados han estado asociados, de una u otra manera, con el surgimiento y desarrollo de ideas revolucionarias. No obstante, y debido quizás a

su manifiesta dificultad, el problema de determinar la dimensión de encaje e inmersión euclideana de variedades entró en un periodo de recesión durante el último tercio del siglo XX. Pero con el nuevo milenio ha surgido un interés renovado a raíz del descubrimiento de una sorprendente interacción con el problema de planeación motriz en robótica, concretamente con la determinación de invariantes topológico-algebraicos que surgen en conexión con el diseño de algoritmos de movimiento para sistemas con capacidad autónoma de ejecución de tareas.

Imaginemos un sistema mecánico/electrónico con capacidad tanto de detección de las propiedades de su entorno, como de movimiento autónomo—un *robot*—al que se le debe programar a fin de realizar, sin la supervisión humana, tareas específicas. El objetivo es que, con la simple indicación de un objetivo, el robot deberá evaluar, decidir y ejecutar los pasos necesarios con el fin de llevar a cabo la tarea asignada. Con esta premisa, un algoritmo de planeación motriz es una función que asocia a cada par de estados del robot una transformación del sistema que empieza y termina en el par de posiciones dadas. La implementación de una tal algoritmo permitirá que el robot se desempeñe dentro de un régimen autónomo. Las limitaciones en el diseño del robot, así como los obstáculos que éste tenga que sortear para realizar su labor, impondrán restricciones y limitaciones en la naturaleza del algoritmo de planeación motriz. En particular, es comunmente deseable que la planeación motriz sea “a prueba de errores”, es decir, aún cuando el robot pudiera estar sujeto a eventualidades no previstas dentro del algoritmo de planeación motriz, el resultado obtenido debería ser aceptablemente cercano al esperado (en la medida que el propio usuario establezca con antelación).

Para formalizar estas ideas es conveniente considerar la totalidad de estados en los que el robot se pueda encontrar. Esto determina un espacio topológico X en el cual dos estados estarían ‘cercaños’ si, para llegar del primero al segundo, el robot tendría sólo que hacer un ‘ligero movimiento’. En este contexto, el espacio de curvas continuas $X^{[0,1]}$ representa la totalidad de posibles transformaciones (tareas) que el robot puede hacer, mientras que el producto cartesiano $X \times X$ representa la familia de pares de estados del sistema, es decir los estados de partida y llegada del robot. Un algoritmo de planeación motriz es entonces una sección para la función de doble evaluación

$$(1) \quad e: X^{[0,1]} \rightarrow X \times X, \quad e(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(1)).$$

Por otra parte, el requisito que el algoritmo de planeación motriz sea a prueba de errores se traduce en la continuidad de la sección, lo cual impone restricciones serias en la práctica. De hecho una tal sección existe sólo cuando el espacio de estados X es contráctil, es decir, cuando se puede deformar sobre sí mismo a un punto—una propiedad que difícilmente se tiene en la práctica. Esta inevitable situación conlleva la necesidad de redefinir el concepto de algoritmo de planeación motriz a prueba de errores para un sistema autónomo.

Definición 1. Un algoritmo de planeación motriz para un robot con espacio de estados X consiste de una partición *finita*

$$X \times X = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$$

y de funciones *continuas* $s_i: C_i \rightarrow X^{[0,1]}$ ($1 \leq i \leq k$) tales que cada inclusión $C_i \hookrightarrow X \times X$ factoriza como la composición $e \circ s_i$ —en otras palabras, s_i es una sección de (1) sobre C_i .

Cada función s_i se llama un plan motriz local del algoritmo de planeación motriz, y C_i se llama el dominio de s_i .

Definición 2. La complejidad topológica del problema de planeación motriz en X , denotada por $\mathbf{TC}(X)$, es la máxima cota inferior para el número de planes motrices locales de algoritmos de planeación motriz en X . Por ejemplo, el tener $\mathbf{TC}(X) = \infty$ significa que *no existe* un algoritmo de planeación motriz para X (recuérdese la cláusula de finitud en la Definición 1).

Este concepto (que tiene sentido para cualquier espacio topológico X , sea o no el espacio de estados de un robot) fue introducido en 2003 por M. Farber en parte motivado por el trabajo de S. Smale sobre la complejidad de algoritmos para aproximar las raíces de un polinomio con coeficientes complejos. La idea ha encontrado un campo fertilizado por los métodos de la topología algebraica, y ha captado la atención de numerosos investigadores, en parte debido a que la complejidad topológica es una variación del invariante que Lusternik y Schnirelmann introdujeran en la década de los 30's para acotar el número de puntos críticos de funciones diferenciables reales definidas en una variedad dada. En efecto, al igual que el invariante de Lusternik-Schnirelmann, la complejidad topológica no sólo está definida para cualquier espacio topológico X , sino que es independiente del tipo de homotopía de X . Así, las diversas técnicas homotópicas existentes en la topología algebraica (por ejemplo el uso de teorías de cohomología generalizada) producen de manera natural información (muchas veces precisa) sobre este invariante.

A continuación hacemos una breve selección y revisión de algunas de las principales razones por las cuales se ha dado un rápido interés (por parte de la comunidad internacional matemática en general y de los topólogos algebraicos en particular) en el invariante de Farber.

2.1. Complejidad computacional. La teoría de la complejidad computacional estudia la dificultad *intrínseca* para resolver un problema dado mediante el uso de un sistema computacional. Consideraremos problemas de decisión, es decir, preguntas dentro de un sistema formal cuya solución depende de ciertos parámetros iniciales en términos de los cuales el problema es contestado o bien afirmativa o bien negativamente. En la práctica se consideran problemas decidibles, es decir, aquellos para los cuales existe un método algorítmico que contesta cada instancia del problema. A fin de conmensurar la dificultad de un algoritmo dado, es necesario codificar cada instancia \mathcal{I} del problema, digamos como una cadena finita de $N(\mathcal{I})$ dígitos binarios.

- Se dice que un problema de decisión es de tipo P si existen un polinomio p y un algoritmo “de resolución” \mathcal{R} que contesta cada instancia \mathcal{I} del problema de modo que la respuesta $\mathcal{R}(\mathcal{I})$ se obtiene en $p(N(\mathcal{I}))$ pasos como máximo.
- Se dice que un problema de decisión es de tipo NP si existen un polinomio p y un algoritmo “de verificación” \mathcal{V} que se evalúa en parejas (\mathcal{I}, c) formadas por una instancia \mathcal{I} del problema y de un dato auxiliar “certificador” c (que puede ser nulo) de forma que:
 - Para cada instancia \mathcal{I} con respuesta positiva existe un valor c para el cual $\mathcal{V}(\mathcal{I}, c)$ arroja el valor “cierto” en $p(N(\mathcal{I}))$ pasos como máximo.
 - Para cada instancia \mathcal{I} con respuesta negativa y cada valor de c , $\mathcal{V}(\mathcal{I}, c)$ arroja el valor “falso” en $p(N(\mathcal{I}))$ pasos como máximo.

Consideremos por ejemplo el “problema de suma cero”: Dado un conjunto de enteros, ¿Es posible encontrar un subconjunto no vacío de ellos que sumen cero? En la instancia $\{-2, -3, 15, 14, 7, -10\}$ la respuesta es afirmativa, pues la subcolección $c = \{-2, -3, -10, 15\}$ suma cero, lo cual puede ser rápidamente verificado con tres sumas. Sin embargo, si no contamos con el dato extra c , un algoritmo que responda en la instancia elegida podría tomar considerablemente más tiempo. En otras palabras el problema de suma cero es de tipo NP , pero no necesariamente de tipo P .

Notemos que todo problema de tipo P también es de tipo NP , pues podemos tomar $\mathcal{R} = \mathcal{V}$ ignorando el dato certificador. Sin embargo la contención inversa es uno de los problemas centrales, abiertos hoy en día, en la teoría de la complejidad computacional. ¡El premio de un millón de dólares ofrecido por el prestigioso *Clay Institute* a quien pueda resolver esta incógnita es despreciable comparado con el valor que este problema representa para la seguridad de nuestras transacciones electrónicas bancarias!

Una primera aproximación a la resolución de tal incógnita viene dada por los problemas de tipo NP -completo, es decir aquellos problemas de tipo NP para los cuales la existencia de un algoritmo de resolución implica la existencia de un algoritmo de resolución para cualquier otro problema de tipo NP . Potencialmente más inaccesible son los problemas denominados de tipo NP -difícil, es decir problemas *no necesariamente* de tipo NP para los cuales la existencia de un algoritmo de resolución implica la existencia de un algoritmo de resolución para cualquier otro problema de tipo NP .

Teorema 3. *Determinar si la complejidad topológica del espacio de estados de un robot dado es finita es un problema de tipo NP -difícil.*

La demostración de este resultado se da en [14] basándose en la NP -completitud del problema de k -coloración de gráficas, es decir, el decidir si es posible asignar a cada uno de los vértices de una gráfica G dado un número (o color) entre 1 y k de modo que dos vértices que compartan una arista no tengan asignado el mismo color. Con tal premisa, L. Lechuga y A. Murillo construyen, para cada gráfica G y entero $k > 2$, un espacio $X_{G,k}$ con las siguientes propiedades:

- (1) $X_{G,k}$ es codificable en una cadena binaria de longitud polinomial en el número de vértices de G .
- (2) La k -coloreabilidad de G es equivalente a la veracidad de $\mathbf{TC}(X_{G,k}) < \infty$.

Aunque la construcción de los espacios $X_{G,k}$ require de técnicas de homotopía racional, cuyos detalles escapan al carácter de divulgación de la presente monografía, su existencia nos permite deducir la conclusión del Teorema 3. En efecto, las propiedades (1) y (2) anteriores implican que, en términos algorítmicos, es posible reducir de manera polinomial el problema de la k -coloración de gráficas al de decidir sobre la finitud de la complejidad topológica de espacios topológicos.

Debemos notar (en beneficio de aquellos ingenieros que pudieran haber sido desalentados por el Teorema 3) que los espacios de configuración de robots que aparecen en la práctica son de hecho variedades de dimensión finita, lo cual se traduce en que siempre es posible diseñar un algoritmo de planeación motriz para tales espacios. En otras palabras, los espacios $X_{G,k}$ en [14] son nada parecidos al espacio de estados de un robot. No obstante, el Teorema 3

detecta elegantemente el trans fondo fundamental en la robótica: el diseño de algoritmos de planeación motriz tiene dificultades técnicas inherentes serias.

2.2. Inmersión y encaje de variedades en espacios euclidianos. Uno de los intereses teóricos centrales del invariante de Farber reside en la sorprendente relación (descubierta en [6]) que guarda el problema de la planeación motriz en la robótica con uno de los problemas geométricos tocados al inicio de esta sección: la determinación de la dimensión de inmersión de una variedad M dada, es decir, la dimensión del menor espacio euclidiano en el cual una variedad dada pueda ser realizada a través de una inmersión.

Recordemos que una inmersión $M \looparrowright N$ entre dos variedades es una función diferenciable $f: M \rightarrow N$ cuya derivada $Df: TM \rightarrow TN$ es monomorfismo en fibras. Aunque el teorema de la función inversa asegura que localmente f exhibe a M como subvariedad de N , es posible que, a modo global, la representación tenga autocortes—como en el caso de la representación tridimensional de la botella de Klein.

La determinación de algoritmos eficientes de planeación motriz para un robot cuyo espacio de estados sea del tipo de homotopía de P^m —el espacio proyectivo real de dimensión m —no es más que una reencarnación de la dimensión de inmersión euclidiana de la variedad P^m , es decir:

Teorema 4 ([6]). *La mínima dimensión euclidiana en la que la variedad P^m admite una inmersión está dada por*

$$\mathbf{TC}(P^m) - \epsilon(m)$$

donde $\epsilon(m) = 1$ salvo para $m = 1, 3, 7$, en cuyo caso $\epsilon(m) = 2$.

Los tres casos excepcionales del teorema anterior surgen en conexión con el invariante unitario de Hopf, una de cuyas manifestaciones es el hecho de que, salvo isomorfismos, sólo hay tres álgebras reales de dimensión mayor a 1, que son normadas y tienen división (pero que no necesariamente son conmutativas ni asociativas): los números complejos, los cuaternions y los octonions—la cláusula de dimensionalidad excluye a los números reales, un caso trivial en el teorema anterior dado que P^0 es la variedad conexa de dimensión cero.

Nota 5. Si bien el estudio de inmersiones entre variedades es muy natural desde el punto de vista de la topología algebraica, los encajes de variedades (es decir inmersiones que exhiben, de modo global, al dominio como una subvariedad del contradominio) son más cercanos a la intuición. Cabe por tanto preguntarse sobre la posibilidad de tener un resultado análogo al Teorema 4, sólo que para encajes en vez de inmersiones. La respuesta a tal interrogante está escondida en la necesidad práctica de diseñar algoritmos de planeación motriz que sean *eficientes* en el sentido de que, para empezar, si las posiciones de partida y llegada del robot coinciden, entonces el algoritmo de planeación motriz no debería indicar movimiento alguno. Pero sobre todo, el requisito de eficiencia se refiere a la necesidad de que, si las posiciones de partida y llegada del robot fueran intercambiadas, entonces el algoritmo de planeación motriz debería asignar el mismo movimiento que el original, pero recorrido en reversa.

Para formalizar matemáticamente las ideas anteriores notemos que, puesto que no hay necesidad de planear el movimiento de un robot cuando las posiciones de partida y llegada coinciden, debemos reemplazar al producto $X \times X$ por el complemento en $X \times X$ de la diagonal Δ . Asimismo, los movimientos del robot no terminarán en el sitio donde hayan

empezado, lo que significa que el espacio de curvas $X^{[0,1]}$ deberá ser sustituido por el complemento en $X^{[0,1]}$ del espacio de lazos $L(X)$. En estos términos, la función de evaluación (1) determina, por restricción, una nueva función

$$(2) \quad e: X^{[0,1]} \setminus L(X) \rightarrow X \times X \setminus \Delta.$$

Pero el significado completo de la eficiencia en la planeación motriz reside en el hecho de que tanto el dominio como el contradominio de (2) admiten una involución libre de puntos fijos, por intercambio de ejes en el contradominio, y por inversión en el recorrido de una curva en el caso del dominio.

Definición 6. Un algoritmo de planeación motriz *simétrica* para un robot con espacio de estados X consiste de una partición *finita*

$$X \times X \setminus \Delta = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$$

por conjuntos C_i invariantes bajo la involución de $X \times X \setminus \Delta$, y de funciones continuas y equivariantes $s_i: C_i \rightarrow X^{[0,1]} \setminus L(X)$ ($1 \leq i \leq k$) tales que cada inclusión $C_i \hookrightarrow X \times X \setminus \Delta$ factoriza como la composición $e \circ s_i$ —en otras palabras, s_i es una sección *equivariante* de (2) sobre C_i . Cada función s_i se llama un plan motriz local, y C_i se llama el dominio de s_i .

Definición 7. La complejidad topológica *simétrica* del problema de planeación motriz en X , denotada por $\mathbf{STC}(X)$, es *uno menos que*¹ la máxima cota inferior para el número de planes motrices locales de algoritmos de planeación motriz simétrica en X . Por ejemplo, el tener $\mathbf{STC}(X) = \infty$ significa que *no existe* un algoritmo de planeación motriz simétrica para X (recuérdese la cláusula de finitud en la Definición 6).

Es obvio que la desigualdad $\mathbf{TC}(X) \leq \mathbf{STC}(X)$ siempre se da. Por otra parte, es de esperarse que la diferencia

$$(3) \quad \mathbf{STC}(X) - \mathbf{TC}(X)$$

refleje propiedades topológicas interesantes de un espacio de estados X dado. Por ejemplo cuando X es la esfera m -dimensional, (3) toma el valor 0 si m es par, y 1 si m es impar ([5]). En comparación, la situación en el caso $X = \mathbb{P}^m$ —sin solución completa en la actualidad—pareciera ser mas elaborada. Por ejemplo, (3) toma el valor 1 si m es una potencia de 2, pero el valor 2 si $m - 1$ es una potencia de 2 ([8]). Sin embargo, conforme la descomposición diádica de m sea mas elaborada, el comportamiento de (3) empieza a tener irregularidades interesantes. La respuesta, al menos en términos geométricos, viene dada por la versión simetrizada del Teorema 3:

Teorema 8. *Salvo quizás por los valores $m = 6, 7, 11, 12, 14, 15$, la mínima dimensión euclídeana en la que la variedad \mathbb{P}^m admite un encaje está dada por*

$$\mathbf{STC}(\mathbb{P}^m) - 1.$$

Dado que se conocen variedades para las cuales la diferencia entre la dimension de encaje y de inmersión es tan grande como se desee (ver [13]), el teorema anterior sugiere que, contrario a lo que la intuición pudiera marcar, la diferencia (3) pudiera en principio no ser

¹La necesidad de tal ajuste queda clara al observar que, si tomamos en consideración el plan local motriz obvio—que no asigna movimiento alguno al robot—sobre la diagonal, $\mathbf{STC}(X)$ es justamente el menor número de planes locales *eficientes* (en el sentido de la Nota 5) para (1).

quiera acotada como función de m . En otras palabras, mientras que el Teorema 3 sugiere una alta complejidad computacional en la planeación motriz de un robot genérico, el Teorema 8 refleja cuán más complicado se torna el problema al requerir que los movimientos del robot sea realizados de manera moderadamente eficiente.

La demostración del Teorema 8 se da en [9] para $m \geq 16$, mientras que [7] y [8] reducen los casos posiblemente excepcionales a los aquí marcados. La demostración se apoya en el trabajo clásico de Haefliger y Hirsch sobre la clasificación de inmersiones y encajes de variedades ([10,11]). La idea fundamental comienza con la observación elemental de que un encaje $f: M \subset \mathbb{R}^n$ determina la función

$$\tilde{f}: M \times M \setminus \Delta \rightarrow S^{n-1}, \quad f(x, y) = \frac{f(a) - f(b)}{|f(a) - f(b)|}$$

que es equivariante con respecto a la involución antipodal en la esfera (y la involución que describimos previamente en $M \times M \setminus \Delta$). Haefliger demuestra en ([10]) que, cuando la dimensión euclideana es suficientemente grande (al menos $3/2$ de la dimensión de M), la existencia de una función equivariante \tilde{f} de hecho implica la existencia de un encaje de M en \mathbb{R}^n . Junto con técnicas de obstrucción en la topología algebraica, tal resultado permite traducir la dimensión de encaje de M en términos del género de Schwarz ([19]) de la cubierta doble asociada a la involución de $M \times M \setminus \Delta$. Este último invariante es estudiado en [9] para $M = P^m$ mediante técnicas topológico-geométricas identificándolo con $\mathbf{STC}(P^m)$.

3. HOMOLOGÍA Y ANÁLISIS DE DATOS

Como se ha mencionado en la introducción a este artículo, Henri Poincaré es considerado el padre de la topología algebraica. Poincaré sentó las bases de lo que en la actualidad se conoce como *homología*, un concepto fundamental y con amplia aplicación incluso fuera de las matemáticas. En esta sección esquematizaremos su uso como herramienta en el procesamiento de las grandes cantidades de información características de nuestros tiempos modernos. En efecto, la actual investigación científica y tecnológica, así como los diversos procesos industriales característicos de hoy en día, han arrojado una verdadera avalancha de información codificada en nubes de datos, es decir, en grandes colecciones de puntos dentro de un espacio euclideano. El procesamiento de tanta información es una tarea portentosa que requiere de mecanismos eficientes de análisis y evaluación. Por tal razón resulta importante notar que incluso las características topológicas globales de una nube de datos determinan propiedades útiles acerca del fenómeno muestreado. En un tal análisis, parte de los problemas reside en la complejidad de los datos y las diversas fuentes de ruido, lo que conlleva a que el espacio euclideano donde vive la nube de datos sea de dimension potencialmente muy alta (de varios órdenes de magnitud), aun cuando el fenómeno estudiado apenas conforme un objeto geométrico de unas cuantas dimensiones. El análisis adecuado de una tal situación impone retos importantes para la ciencia y la tecnología modernas. Como resultado, recientes desarrollos en geometría diferencial y topología algebraica han producido herramientas para el estudio de nubes de datos $X = \{x_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^n$. En particular, nuevos métodos para la reducción dimensional no lineal han sido inspirados por conceptos fundamentales de geometría diferencial. De forma paralela, nuevas aplicaciones de la topología algebraica han producido métodos para calcular información homológica a partir de una nube de datos X , punto en el que nos centraremos en esta sección.

Comencemos recordando conceptos elementales de homología simplicial, una herramienta básica para construir información algebraica de espacios topológicos. Un componente esencial en este contexto es el de *complejo simplicial abstracto* (finito): una familia K no vacía de subconjuntos de un conjunto de vértices $V = \{v_i\}_{i=1}^m$ tal que

A: si $\alpha \in K$ y $\beta \subseteq \alpha$, entonces $\beta \in K$;

B: $V \subseteq K$ (para simplificar la notación hemos identificado cada $v \in V$ con $\{v\} \in K$).

A los elementos de K se les denomina *caras*, y su dimensión se define como uno menos que su cardinalidad. A las caras de dimensión cero y uno se les denomina vértices y aristas respectivamente. Un *mapeo simplicial* entre complejos simpliciales es una función que respeta sus contenidos estructurales al mapear caras en una estructura a caras en la otra. Estos conceptos representan estructuras combinatorias que capturan las propiedades topológicas de una gran variedad de estructuras geométricas. Dado un complejo simplicial abstracto K , se produce un espacio topológico explícito al considerar la *realización geométrica* (o *poliedro*) asociada, denotada por $|K|$. Ésta se construye al considerar las caras de K como generalizaciones de triángulos y tetraedros en espacios euclidianos de alta dimensión, pegandolas de acuerdo a la información combinatoria en K .

Un método básico en el análisis de un complejo simplicial K es la construcción de estructuras algebraicas para calcular invariantes topológicos, que son propiedades de $|K|$ que no cambian bajo homeomorfismos—y aun deformaciones continuas. Desde un punto de vista algorítmico, calculamos invariantes topológicos de K al traducir su estructura combinatoria al lenguaje del álgebra lineal. Con este propósito, el escenario básico surge al considerar los tres pasos siguientes. Primero construimos el *módulo de k -cadenas* C_k , definido como las combinaciones lineales formales de caras k -dimensionales de K con coeficientes en un anillo conmutativo R dado (e.g. $R = \mathbb{Z}$ o $R = \mathbb{Z}_p$ con p un número primo). Luego consideramos *operadores de frontera* $\partial_k: C_k \rightarrow C_{k-1}$, definidos como los morfismos que mandan una cara $\sigma = [p_0, \dots, p_k] \in C_k$ en

$$\partial_k(\sigma) = \sum_{i=0}^k (-1)^i [p_0, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_k].$$

Como tercer paso, construimos los *módulos de homología*, definidos por los módulos cociente $H_k(K) := \ker(\partial_k)/\text{im}(\partial_{k+1})$. En estas condiciones se define el concepto de *número de huecos k -dimensionales* (o k -ésimo número de Betti) de K como $\beta_k = \text{rango}(H_k)$. Por ejemplo, en una esfera tenemos cero huecos 1-dimensionales y un solo hueco 2-dimensional.

3.1. El concepto de homología persistente. Un objetivo central en muchos problemas de aplicación es analizar datos experimentales $X = \{x_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^n$ y comprender su contenido mediante el cálculo de información cualitativa. Los invariantes topológicos son características importantes de objetos geométricos, y sus propiedades son indicadores fundamentales para entender datos experimentales. El problema principal al calcular invariantes topológicos de datos experimentales es la correspondiente inestabilidad al calcular información homológica. En efecto, pequeñas variaciones (e.g. ruido y errores de medición) al construir estructuras topológicas sobre X podrían producir fuertes cambios homológicos. La homología persistente [2–4] es una estrategia computacional importante que ha sido desarrollada durante la última década para calcular invariantes topológicos de estructuras finitas. A continuación describimos sus antecedentes, principios básicos y bases teóricas.

3.2. Motivación. Un problema principal al usar herramientas de homología simplicial para estudiar una base de datos $X = \{x_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^n$ es el hecho de que no se dispone de una estructura simplicial *a priori*. Si asumimos que X es un muestreo de una variedad (e.g. $X \subset \mathcal{M}$, con \mathcal{M} una subvariedad de \mathbb{R}^n), un objetivo principal sería el de calcular información homológica de \mathcal{M} usando tan sólo la base de datos X . Es de notarse que situaciones más generales, donde \mathcal{M} no es necesariamente una variedad, son casos fundamentales para muchas aplicaciones y escenarios experimentales. Sin embargo, para efectos ilustrativos, nos concentraremos en la discusión de la situación simplificada donde \mathcal{M} es una variedad. El problema crucial de encontrar condiciones de densidad para que X sea un muestreo útil para la variedad \mathcal{M} ha sido tratado en [17], y será abordado más adelante en este trabajo.

Tratar de construir un complejo simplicial a partir de X puede resultar ser un problema muy difícil. Una primera estrategia sería la de considerar la homología de los espacios $\mathbb{X}_\epsilon = \cup_{i=1}^m B(x_i, \epsilon)$, donde una bola de radio ϵ es centrada alrededor de cada punto en X . Un enfoque más bien ingenuo sería el de tratar de encontrar un valor óptimo ϵ_0 para el que la homología de \mathbb{X}_{ϵ_0} corresponda a la homología de \mathcal{M} . Pero en la práctica este enfoque es altamente inestable, ya que diferentes valores homológicos pueden obtenerse al considerar pequeñas perturbaciones de ϵ_0 .

En contraste, la propuesta en homología persistente es considerar información topológica *para todo* $\epsilon > 0$ *simultáneamente*, y no sólo analizar un valor particular ϵ_0 . El concepto clave está fundamentado en que un resumen homológico es una herramienta valiosa en el análisis de nubes de puntos o bases de datos. Desde un punto de vista computacional, estimar información homológica para todos los valores $\epsilon > 0$ podría parecer poco razonable, pero hay dos observaciones cruciales para implementar estas ideas en un esquema computacional eficiente. Por un lado, a pesar del hecho de que consideramos en principio un parámetro continuo $\epsilon > 0$, se puede verificar que dada una nube de puntos X , en realidad hay sólo un número finito de complejos simpliciales no homeomorfos $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_r$ (este es el concepto de *filtración* que se explicará más adelante) que se pueden construir a partir de $\{\mathbb{X}_\epsilon, \epsilon > 0\}$. Por otro lado, en el esquema de homología persistente se han construido procedimientos eficientes para el cómputo de información homológica de la familia completa $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_r$ (ver por ejemplo [21]).

Dado un parámetro ϵ y su conjunto \mathbb{X}_ϵ , hay varias estructuras simpliciales que son útiles para el estudio de la correspondiente información homológica. En particular, una construcción computacional eficiente está dada por el *complejo de Vietoris-Rips* $R_\epsilon(X)$, definido al tomar a X como el conjunto de vértices, y donde un conjunto de vértices $\sigma = \{x_0, \dots, x_k\}$ determina un k -simplejo de $R_\epsilon(X)$ si $d(x_i, x_j) \leq \epsilon$ para todo $x_i, x_j \in \sigma$. Dado un valor ϵ_i , el complejo de Vietoris-Rips $R_{\epsilon_i}(X)$ determina un elemento de la filtración $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_r$, con $K_i = R_{\epsilon_i}(X)$. En conclusión:

- A:** Un número finito de valores $\{\epsilon_i\}_{i=1}^r$ describen las características homológicas de X .
- B:** Cada uno de estos valores genera un complejo de Vietoris-Rips K_i .
- C:** La colección $\{K_i\}_{i=1}^r$ representa las propiedades topológicas de la familia $\{\mathbb{X}_\epsilon, \epsilon > 0\}$.

Por lo tanto, el análisis topológico de una nube de puntos X se reduce al análisis de una filtración $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_r$, que es el principal objeto de estudio en homología persistente. Ahora vamos a describir los ingredientes conceptuales de esta teoría.

3.3. Esquema conceptual. El *input* en la homología persistente es una *filtración* de un complejo simplicial K , es decir, una sucesión anidada de subcomplejos $\emptyset = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_r = K$. Dado un complejo simplicial K , recordemos que los operadores de frontera ∂_k determinan un *complejo de cadenas* denotado por $C_* = C_*(K)$ y representado por el diagrama

$$\dots \rightarrow C_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \rightarrow \dots$$

Recordemos asimismo que, dado un complejo de cadenas C_* de módulos sobre un anillo conmutativo unitario R , se definen los módulos de k -ciclos y de k -fronteras como $Z_k = \ker \partial_k$ y $B_k = \text{im} \partial_{k+1}$, respectivamente. Como tenemos submódulos anidados $B_k \subseteq Z_k \subseteq C_k$, el R -módulo de k -homología $H_k = H_k(C_*) = Z_k/B_k$ está bien definido.

A continuación damos las tres definiciones básicas que se requieren dentro del marco de la homología persistente.

- (1) Un *complejo persistente* está definido por una familia de complejos de cadena $\{C_*^i\}_{i \geq 0}$ junto con morfismos

$$C_*^0 \xrightarrow{f^0} C_*^1 \xrightarrow{f^1} C_*^2 \xrightarrow{f^2} \dots \xrightarrow{f^{i-1}} C_*^i \xrightarrow{f^i} C_*^{i+1} \xrightarrow{f^{i+1}} \dots$$

De forma explícita²:

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \downarrow \partial_3 & & \downarrow \partial_3 & & \downarrow \partial_3 & \\ C_2^0 & \xrightarrow{f^0} & C_2^1 & \xrightarrow{f^1} & C_2^2 & \xrightarrow{f^2} & \dots \\ & \downarrow \partial_2 & & \downarrow \partial_2 & & \downarrow \partial_2 & \\ C_1^0 & \xrightarrow{f^0} & C_1^1 & \xrightarrow{f^1} & C_1^2 & \xrightarrow{f^2} & \dots \\ & \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_1 & \\ C_0^0 & \xrightarrow{f^0} & C_0^1 & \xrightarrow{f^1} & C_0^2 & \xrightarrow{f^2} & \dots \\ & \downarrow \partial_0 & & \downarrow \partial_0 & & \downarrow \partial_0 & \\ 0 & \xrightarrow{f^0} & 0 & \xrightarrow{f^1} & 0 & \xrightarrow{f^2} & \dots \end{array}$$

Dada una filtración de un complejo simplicial K , un ejemplo básico de un complejo persistente está dado al considerar las funciones f^i como las inclusiones entre cada complejo simplicial en la sucesión anidada $\emptyset = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_r = K$ descrita en el párrafo anterior.

- (2) La contraparte algebraica de un complejo persistente viene dada por el concepto de *módulo persistente*: una familia de R -módulos M^i y homomorfismos $\phi^i : M^i \rightarrow M^{i+1}$. Decimos que el módulo persistente es de *tipo finito* si cada M^i es finitamente generado, y los mapeos ϕ^i son isomorfismos para i suficientemente grande. Un ejemplo básico de un módulo persistente está dado por la homología (en una dimensión fija) del complejo simplicial de una filtración.
- (3) Finalmente, los *módulos p -persistentes de homología* se definen como

$$H_k^{i,p} = Z_k^i / (B_k^{i+p} \cap Z_k^i),$$

²Debido a las aplicaciones que tenemos en mente, vamos a asumir que las cadenas de complejos son triviales en dimensiones negativas.

donde Z_k^i y B_k^i son respectivamente los módulos de k -ciclos y k -fronteras en C^i . Estos módulos pueden ser descritos de manera equivalente en términos de las inclusiones $K^i \subset K^{i+p}$, sus homomorfismos inducidos $f_k^{i,p} : H_k^i \rightarrow H_k^{i+p}$ y las relaciones correspondientes $\text{im}(f_k^{i,p}) \cong H_k^{i,p}$ (de hecho, como se observa en [21], la información se puede empaquetar eficientemente en términos de una *sucesión espectral*).

Los grupos de homología persistente contienen clases homológicas que son estables en el intervalo de i a $i + p$: tales clases “nacen en un tiempo” no posterior al i , y siguen “vivas” en $i + p$. Las clases de homología persistente que permanecen vivas para grandes valores de p detectan características topológicas estables de X , mientras que las clases que sobreviven sólo para pequeños valores de p son inestables o componentes topológicas tipo ruido.

En los párrafos siguientes veremos explicaciones alternativas para generalizar el concepto de objetos persistentes como funtores entre categorías especiales.

Los resultados del algoritmo de homología persistente son representaciones de la evolución, con respecto del parametro $\epsilon > 0$, de las características topológicas de X . Estas representaciones se describen con *diagramas de persistencia* en los que se indica, para cada nivel de homología k , la cantidad y estabilidad de los diferentes huecos k -dimensionales de la nube de puntos X . Presentamos a continuación una explicación más precisa de los conceptos relacionados con diagramas de persistencia y algunas de sus propiedades.

La principal tarea dentro del análisis de los grupos de persistencia homológica viene dada al capturar sus propiedades mediante una única entidad algebraica representada por un módulo finitamente generado. Recordemos que un objetivo principal en homología persistente es el de construir un resumen de la evolución (con respecto al parámetro ϵ) de las características topológicas de X usando los conjuntos $\{\mathbb{X}_\epsilon, \epsilon > 0\}$. Esta propiedad es analizada al construir, con los R -módulos de homología de los complejos K_i , un módulo sobre el anillo de polinomios $R[t]$. El marco general para este procedimiento es considerar un R -módulo persistente $M = \{M^i, \phi_i\}_{i \geq 0}$ y construir el modulo graduado $\alpha(M) = \bigoplus_{i \geq 0} M^i$ sobre el anillo $R[t]$ (con la graduación usual), de forma tal que la acción de t quede dada por los morfismos ϕ_i , es decir, en elementos no homogéneos

$$t \cdot (m^0, m^1, \dots) = (0, \phi^0(m^0), \phi^1(m^1), \dots).$$

La propiedad crucial en esta construcción es que, cuando $R = \mathbb{F}$ es un campo, α es un functor que define una equivalencia de categorías entre la categoría de módulos persistentes de tipo finito sobre \mathbb{F} , y la categoría de modulos graduados no negativos que son finitamente generados sobre $\mathbb{F}[t]$. En el caso de la filtración de complejos $K_0 \subset \dots \subset K_r$, esta caracterización de modulos persistentes produce el $\mathbb{F}[t]$ módulo finitamente generado

$$\alpha(M) = H_p(K_0) \oplus H_p(K_1) \oplus \dots \oplus H_p(K_r).$$

Estos módulos son utilizados en el paso crucial que define y caracteriza el resultado de homología persistente. La herramienta principal es el conocido teorema de estructura que caracteriza a los módulos finitamente generados sobre un dominio de ideales principales (como lo es $\mathbb{F}[t]$, razón por la cual hemos supuesto que $R = \mathbb{F}$ es un campo). En el caso que nos atañe, este teorema asegura que, para un módulo \mathfrak{M} finitamente generado y graduado no negativamente, hay una familia de enteros no negativos $\{i_1, \dots, i_m\}$, $\{j_1, \dots, j_n\}$, $\{l_1, \dots, l_n\}$,

y un isomorfismo

$$\mathfrak{M} \cong \bigoplus_{s=1}^m \mathbb{F}[t](i_s) \oplus \bigoplus_{r=1}^n (\mathbb{F}[t]/(t^{l_r})) (j_r)$$

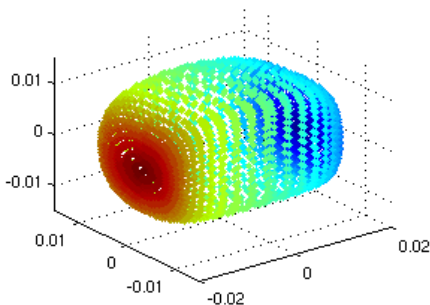
donde $\mathbb{F}[t](i_s)$ denota a $\mathbb{F}[t]$ visto como módulo sobre sí mismo, pero con la graduación desplazada hacia arriba en i_s dimensiones. Esta descomposición es única salvo permutación de factores, y la relación con homología persistente está dada por el hecho de que, cuando una clase de homología persistente τ nace en K_i y muere en K_j , genera un módulo de torsión de la forma $(\mathbb{F}[t]/(t^{j-i})) (i)$. En cambio, cuando la clase τ nace en K_i pero no muere, genera un módulo libre de la forma $\mathbb{F}[t](i)$.

Con esta información adicional sobre la caracterización $\mathbb{F}[t]$ -módulos, explicaremos el concepto de diagramas de persistencia. Primero definimos un P -intervalo como un par ordenado (i, j) donde $0 \leq i < j$ para $i, j \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Ahora construimos la función Q que mapea P -intervalos a $\mathbb{F}[t]$ -módulos de acuerdo a

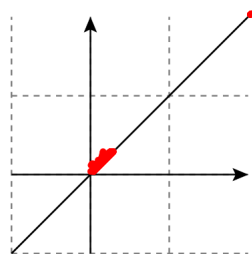
$$Q(i, j) = (\mathbb{F}[t]/(t^{j-i})) (i)$$

donde convenimos en que $t^\infty = 0$. Más generalmente, para un conjunto de P -intervalos $S = \{(i_1, j_1), \dots, (i_n, j_n)\}$, tenemos un $\mathbb{F}[t]$ -módulo $Q(S) = \bigoplus_{\ell=1}^n Q(i_\ell, j_\ell)$. El mapeo Q resulta ser una biyección entre el conjunto de familias finitas de P -intervalos y el conjunto de $\mathbb{F}[t]$ -módulos finitamente generados graduados no negativamente.

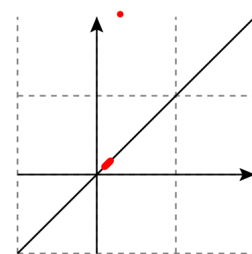
Ahora podemos recapitular estos resultados al notar que el concepto de diagrama persistente puede ser descrito en términos del conjunto de P -intervalos asociados al $\mathbb{F}[t]$ -módulo finitamente generado y no negativamente graduado construido con el funtor α en base a una filtración $\emptyset = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_r = K$. Hay varias representaciones gráficas para diagramas de persistencia, y un ejemplo básico está dado mediante regiones triangulares en el plano de índice-persistencia. Por ejemplo, en las figuras siguientes se ilustra el análisis de una nube de puntos X localizada en un esferoide. Se muestran dos diagramas de persistencia correspondientes al primer y segundo niveles de homología. Cada diagrama presenta la familia de P -intervalos, ploteando los correspondientes pares (i, j) en el plano \mathbb{R}^2 . Para el primer nivel de homología, la mayoría de los valores se encuentran cerca de la diagonal, lo cual indica que el objeto geométrico no contiene huecos 1-dimensionales. En el segundo nivel de homología se tiene un punto estable lejos de la diagonal, indicando un hueco 2-dimensional. Estos resultados numéricos indican que el objeto geométrico que ha sido usado para construir la nube de puntos X es en efecto esferoidal.



Esferoide



1er Nivel de Homología



2do Nivel de Homología

3.4. Generalización usando propiedades functoriales. Con el fin de diseñar generalizaciones útiles de homología persistente, es importante comprender su esquema conceptual de una forma más profunda. Una reciente formulación que explica las características claves de homología persistente ha sido presentada en [2], y describe este concepto como un functor entre dos categorías particulares. En efecto, un aspecto crucial de la homología persistente es la asociación entre un conjunto de índices y una sucesión de grupos de homología construida a partir de una filtración $\emptyset = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_r = K$. Una generalización importante de esta construcción considera un conjunto parcialmente ordenado P como índices que asociamos con una familia de objetos en una categoría \mathbf{C} . Note que se puede considerar el conjunto parcialmente ordenado P como una categoría \mathbf{P} cuyos objetos son P , y un morfismo entre x y y esta definido siempre y cuando $x \leq y$. En este marco, un objeto P -persistente en \mathbf{C} está definido por un functor $\Phi : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{C}$, descrito también como una familia de objetos $\{c_x\}_{x \in P}$ en \mathbf{C} , y morfismos $\phi_{xy} : c_x \rightarrow c_y$, cuando $x \leq y$.

Estos conceptos son cruciales para extender las ideas principales de homología persistente a situaciones más generales. Note que, en la homología persistente estándar, usamos los conjuntos parcialmente ordenados $P = \mathbb{N}$ o $P = \mathbb{R}$, pero extensiones importantes han sido recientemente desarrolladas en el contexto de persistencia multidimensional, por ejemplo situaciones donde los conjuntos parcialmente ordenados son $P = \mathbb{N}^k$ o $P = \mathbb{R}^k$ para $k > 1$. Estos desarrollos son motivados por diversas consideraciones prácticas, como el análisis de nubes de puntos que consideran simultáneamente estimaciones de densidad, así como las variadas construcciones de complejos de Vietoris-Rips.

3.5. Muestreo Finito de Variedades. Un requisito importante al trabajar con una nube de puntos $X \subset \mathcal{M}$ es el de asegurar condiciones bajo las cuales el conjunto de muestreo $X = \{x_i\}_{i=1}^m$ sea suficientemente denso como para recuperar información geométrica y topológica de \mathcal{M} . En el caso de que \mathcal{M} tenga una estructura de variedad Riemanniana, nuevas propiedades han sido descubiertas durante los últimos años [17]. Un concepto principal es el de *número de condición* $1/\tau$ de una variedad, cuyo valor codifica propiedades locales y globales de curvatura de \mathcal{M} . Este número de condición se relaciona con el *eje medial* de \mathcal{M} , que se define como la cerradura del conjunto

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists p, q \in \mathcal{M}, p \neq q, \text{ with } d(x, \mathcal{M}) = \|x - p\| = \|x - q\|\}.$$

Al usar el eje medial de una variedad, tenemos

$$\tau = \inf_{p \in \mathcal{M}} d(p, \overline{G}).$$

También recordemos que, dados un par de espacios topológicos $X \subset U$, decimos que X es una *deformación retráctil* de U si existe un mapeo continuo $r : U \rightarrow X$ cuya restricción $r|_X$ sea la identidad, y tal que la composición $U \xrightarrow{r} X \hookrightarrow U$ sea homotópica (relativa a X) a la identidad en U [12]. Con estos conceptos, el resultado siguiente relaciona el muestreo de una variedad con su reconstrucción homológica (ver [17]).

Proposición 9 (Niyogi, Smale, Weinberger, 2008). *Sea \mathcal{M} una subvariedad compacta Riemanniana de \mathbb{R}^n y sea $X = \{x_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^n$ una colección finita $\epsilon/2$ -densa en \mathcal{M} , i.e., tal que para cada $p \in \mathcal{M}$, hay un $x \in X$ que satisface $\|p - x\|_{\mathbb{R}^n} < \epsilon/2$. Si $\epsilon < \sqrt{\frac{3}{5}}\tau$, entonces \mathcal{M} es una deformación retráctil de $U = \bigcup_{x \in X} B_\epsilon(x)$. Consecuentemente la homología de U es la misma que la homología de \mathcal{M} .*

REFERENCES

- [1] Gustavo A. Arteca and Paul G. Mezey. Shape characterization of some molecular model surfaces. *J. Comput. Chem.*, 9(5):554–563, 1988.
- [2] G. Carlsson. Topology and data. *American Mathematical Society*, 46(2):255–308, 2009.
- [3] H. Edelsbrunner and J. Harer. Persistent homology - a survey. In *Surveys on discrete and computational geometry: twenty years later: AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference, June 18-22, 2006, Snowbird, Utah*, volume 453, page 257. Amer Mathematical Society, 2008.
- [4] H. Edelsbrunner, D. Letscher, and A. Zomorodian. Topological persistence and simplification. In *Proc. 41st Ann. IEEE Sympos. Found Comput. Sci.*, pages 454–463, 2000.
- [5] Michael Farber and Mark Grant. Symmetric motion planning. In *Topology and robotics*, volume 438 of *Contemp. Math.*, pages 85–104. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [6] Michael Farber, Serge Tabachnikov, and Sergey Yuzvinsky. Topological robotics: motion planning in projective spaces. *Int. Math. Res. Not.*, 34:1853–1870, 2003.
- [7] Jesús González. Symmetric topological complexity as the first obstruction in goodwillie’s euclidean embedding tower for real projective spaces. a ser publicado en *Transactions of the American Mathematical Society*.
- [8] Jesús González and Peter Landweber. The integral cohomology groups of configuration spaces of pairs of points in real projective spaces. en preparación.
- [9] Jesús González and Peter Landweber. Symmetric topological complexity of projective and lens spaces. *Algebr. Geom. Topol.*, 9(1):473–494, 2009.
- [10] André Haefliger. Plongements différentiables dans le domaine stable. *Comment. Math. Helv.*, 37:155–176, 1962/1963.
- [11] André Haefliger and Morris W. Hirsch. Immersions in the stable range. *Ann. of Math. (2)*, 75:231–241, 1962.
- [12] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [13] W.-C. Hsiang and R. H. Szczarba. On the embeddability and nonembeddability of certain parallelizable manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69:534–536, 1963.
- [14] Luis Lechuga and Aniceto Murillo. Topological complexity of formal spaces. In *Topology and robotics*, volume 438 of *Contemp. Math.*, pages 105–114. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [15] Paul G. Mezey. Differential and algebraic topology of chemical potential surfaces. In *Mathematical and computational concepts in chemistry (Dubrovnik, 1985)*, Ellis Horwood Ser. Math. Appl., pages 208–221. Horwood, Chichester, 1986.
- [16] James C. Moore. *General equilibrium and welfare economics*. Springer, Berlin, 2007. An introduction.
- [17] P. Niyogi, S. Smale, and S. Weinberger. Finding the homology of submanifolds with high confidence from random samples. *Discrete and Computational Geometry*, 39(1):419–441, 2008.
- [18] S. P. Novikov. Topology in the 20th century: a view from the inside. *Uspekhi Mat. Nauk*, 59(5(359)):3–28, 2004.
- [19] A. S. Schwarz. The genus of a fiber space. *Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2*, 55:49–140, 1966.
- [20] Yasuhito Tanaka. On the equivalence of the Arrow impossibility theorem and the Brouwer fixed point theorem when individual preferences are weak orders. *J. Math. Econom.*, 45(3-4):241–249, 2009.
- [21] A. Zomorodian and G. Carlsson. Computing persistent homology. *Discrete Comput. Geom.*, 33(2):249–274, 2005.

JESÚS GONZÁLEZ

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, CINVESTAV-IPN

A.P. 14-740, MÉXICO CITY 07000, MÉXICO

E-mail address: `jesus@math.cinvestav.mx`

MIJAIL GUILLEMARD

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF HAMBURG

BUNDESSTRASSE 55, D-20146 HAMBURG, GERMANY

E-mail address: `guillemard@math.uni-hamburg.de`