Mathematik I für Studierende der Informatik und Wirtschaftsinformatik (Diskrete Mathematik) im Wintersemester 2017/2018

23. November 2017

Satz 4.27 (Multinomialsatz)

Seien $r, n \in \mathbb{N}_0$.
Dann gilt für alle $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}$

$$(x_1 + \ldots + x_r)^n = \sum_{n_1+\ldots+n_r=n} \binom{n}{n_1, \ldots, n_r} x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_r^{n_r}.$$

Diese Summe läuft über alle r-Tupel $(n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{N}_0^r$ mit $n_1 + \ldots + n_r = n$.

Man beachte, dass man für $r = 2$ aus dem Multinomialsatz genau den Binomialsatz erhält.

Beispiel 4.28

Nach Ausmultiplizieren von $(x+y+z)^{10}$ ist der Koeffizient vor dem Produkt $x^5y^3z^2$ die Zahl

$$\binom{10}{5,3,2} = \frac{10!}{5!\cdot 3!\cdot 2!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{3!\cdot 2!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{2} = 7\cdot 4\cdot 9\cdot 10 = 2520.$$

Satz 4.29 (Schubfachprinzip)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$. Wenn m Objekte auf n Fächer verteilt werden, so gibt es mindestens ein Fach mit mindestens zwei Objekten.

Eine andere Formulierung dieses Satzes ist die folgende: Sind m und n natürliche Zahlen mit $m > n$, so gibt es keine injektive Abbildung $f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$.

Beispiel 4.30

In einer Menge von 13 Menschen gibt es mindestens zwei, die im gleichen Monat Geburtstag haben. In einer Menge von 367 Menschen gibt es mindestens zwei, die am gleichen Tage Geburtstag haben. (Der 29. Februar ist ein möglicher Geburtstag.)

Satz 4.31

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Wenn m Objekte auf n Fächer verteilt werden, so gibt es mindestens ein Fach mit mindestens $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ Objekte.

Satz 4.32

Sei M eine unendliche Menge und $n \in \mathbb{N}$. Sind $M_1, \ldots, M_n$ Teilmengen von M mit $M = M_1 \cup \cdots \cup M_n$, so ist eine der Mengen $M_1, \ldots, M_n$ unendlich.

Beweis.

Angenommen, $M_1, \ldots, M_n$ sind endlich.
Sei m das Maximum der Mächtigkeiten der M_i.
Dann ist auch M endlich und es gilt $|M| \leq m \cdot n$. $\square$

Satz 4.33 (Prinzip der Inklusion und Exklusion, Siebformel)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $A_1, \ldots, A_n$ endliche Mengen. Dann gilt

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1} \cdot \sum_{1 \leq n_1 < \cdots < n_k \leq n} |A_{n_1} \cap \cdots \cap A_{n_k}| \right).$$

Die innere Summe auf der rechten Seite der Gleichung läuft dabei über alle k-Tupel $(n_1, \ldots, n_k)$ natürlicher Zahlen mit $1 \leq n_1 < \cdots < n_k \leq n$.

Für den Beweis dieses Satzes benutzen wir folgendes Lemma:

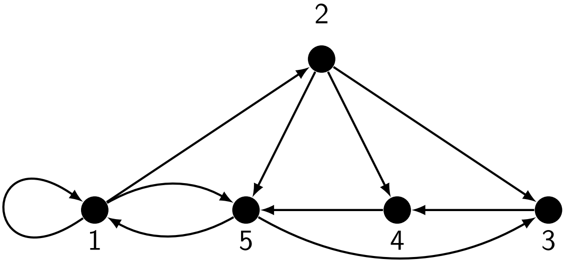
Lemma 4.34

Jede nichtleere endliche Menge M hat genauso viele Teilmengen mit gerader Mächtigkeit wie mit ungerader Mächtigkeit.

Graphen von Relationen

Eine (zweistellige) Relation R auf einer Menge A kann man als *gerichteten Graphen* darstellen:
Für jedes Element a von A wird ein Punkt in die Ebene gezeichnet.
Für jedes Paar $(a, b) \in R$ zeichnen wir dann eine Pfeil von dem Punkt, der zu a gehört, zu dem Punkt, der zu b gehört.

Wir betrachten die Relation
$R = \{(1,1),(1,2),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),$
$(4,5),(5,1),(5,3)\}$ auf der Menge $A = \{1,2,3,4,5\}$.



Die Punkte nennt man die *Knoten* des Graphen, die Pfeile *gerichtete Kanten*. Eine Kante von einem Knoten auf sicher selber nennt man auch eine *Schlinge*.

Beispiel 4.35

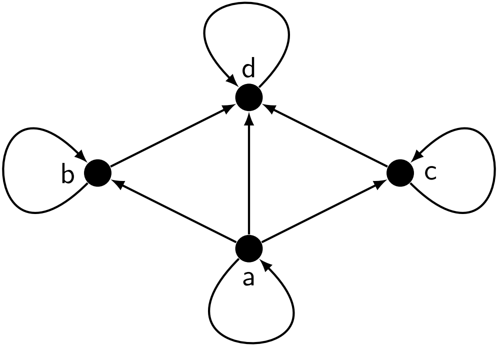
Sei R eine Relation auf der Menge A.

1. R ist reflexiv, falls jeder Knoten im zugehörigen gerichteten Graphen eine Schlinge hat.
2. R ist irreflexiv, falls kein Knoten im zugehörigen gerichteten Graphen eine Schlinge hat.
3. R ist symmetrisch, wenn im gerichteten Graphen für jeden Pfeil von a nach b auch der Pfeil zurück von b nach a vorhanden ist.

4. R ist antisymmetrisch, wenn für je zwei verschiedene Knoten im gerichteten Graphen höchstens ein Pfeil zwischen den beiden Knoten a und b vorhanden ist.
5. R ist transitiv, wenn für den gerichteten Graphen folgendes gilt:Immer wenn man entlang der Pfeile (in Pfeilrichtung) von einem Knoten a zu einem Knoten b laufen kann, dann ist bereits ein direkter Pfeil von a nach b vorhanden.

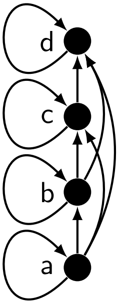
Beispiel 4.36

Sei $A = \{a, b, c, d\}$ und
$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (c, d)\}$.



Beispiel 4.37

Sei $A = \{a, b, c, d\}$ und $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(c,d)\}$.

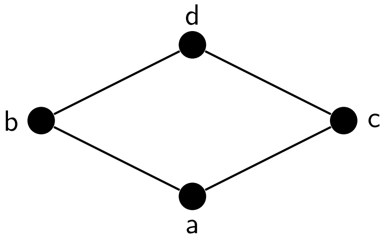


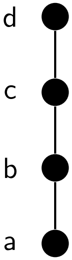
Wenn man von einer Relation R auf einer Menge A schon weiß, dass es sich um eine Ordnungsrelation handelt, dann kann man in dem gerichteten Graphen die Schlingen an den einzelnen Knoten weglassen sowie gerichtete Kanten, deren Existenz aus der Transitivität der Relation folgt.

Diese letzte Bedingung kann man dadurch erzwingen, dass man verlangt, dass für zwei Knoten a und b mit $(a, b) \in R$, die durch eine Kante verbunden sind, kein Knoten c mit $(a, c), (c, b) \in R$ existiert.

Außerdem können wir noch vereinbaren, dass Kanten immer nach oben zeigen, so dass wir die Pfeilspitzen weglassen können. Diese Darstellung nennt man ein *Hassediagramm* einer geordneten Menge.

Folgende Diagramme sind Hassediagramme der Relationen in den Beispielen 4.36 und 4.37.





Hüllenbildungen

Sei R eine Relation auf einer Menge A.
Falls R nicht bereits reflexiv ist, so kann man R zu einer reflexiven Relation R' machen, indem man für jedes $a \in A$ das Paar (a, a) zu R hinzufügt.

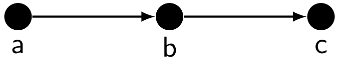
Definition 4.38

Für eine Relation R auf einer Menge A sei
$R' := R \cup \{(a, a) : a \in A\}$.
R' ist die kleinste reflexive Relation, die R umfasst, und wird die *reflexive Hülle* von R genannt.

Sei zum Beispiel $<$ die übliche $<$-Relation auf $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$. Dann ist die Relation $\leq$ auf derselben Menge die reflexive Hülle von $<$.

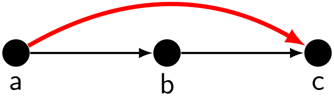
Auf ähnliche Weise können wir aus einer Relation R eine transitive Relation machen.

Sei $A = \{a, b, c\}$ und $R = \{(a, b), (b, c)\}$.



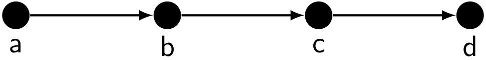
Damit R transitiv wird, müssen wir das Paar (a, c) zu R hinzufügen.

Sei $A = \{a, b, c\}$ und $R = \{(a, b), (b, c)\}$.

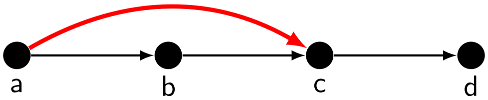


Nun ist die Relation transitiv.

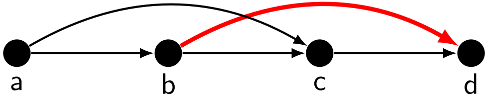
Wir betrachten noch die folgende, etwas kompliziertere Situation.
Sei $A = \{a, b, c, d\}$ und $R = \{(a, b), (b, c), (c, d)\}$.



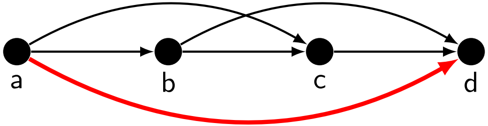
Wir betrachten noch die folgende, etwas kompliziertere Situation.
Sei $A = \{a, b, c, d\}$ und $R = \{(a, b), (b, c), (c, d)\}$.



Wir betrachten noch die folgende, etwas kompliziertere Situation.
Sei $A = \{a, b, c, d\}$ und $R = \{(a, b), (b, c), (c, d)\}$.



Wir betrachten noch die folgende, etwas kompliziertere Situation.
Sei $A = \{a, b, c, d\}$ und $R = \{(a, b), (b, c), (c, d)\}$.



Im Allgemeinen gilt für eine transitive Relation R:
Falls $(a_1, a_2), \ldots, (a_{n-1}, a_n) \in \mathbb{R}$ gilt, so ist auch $(a_1, a_n) \in R$.
Das erklärt die folgende Definition:

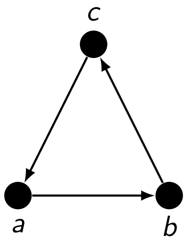
Definition 4.39

Sei R eine Relation auf einer Menge A. Dann ist

$$R^+ := \{(a, b) : \text{ es gibt } n \geq 2 \text{ und } a_1, \ldots, a_n \in A \text{ mit } \\ a = a_1,\ b = a_n \text{ und } (a_1, a_2), \ldots, (a_{n-1}, a_n) \in R\}$$

die kleinste transitive Relation mit $R \subseteq R^+$. R^+ ist die *transitive Hülle* von R.

Man beachte, dass es durchaus vorkommen kann, dass $(a_1, a_2), \ldots, (a_{n-1}, a_n) \in R$ gilt und dabei $a_1 = a_n$ ist.
So ist die transitive Hülle der Relation $R = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$ auf der Menge A die Relation $R^+ = A \times A$.



Schließlich kombinieren wir noch die transitive und die reflexive Hülle.

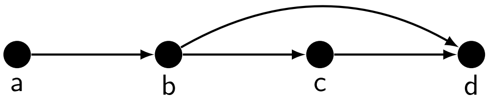
Definition 4.40

Sei R eine Relation auf einer Menge A. Dann ist $R^* = R^+ \cup R'$ die *reflexive, transitive Hülle* von R. R^* ist die kleinste reflexive, transitive Relation, die R umfasst.

Beispiel 4.41

Sei $A = \{a, b, c, d\}$ und $R = \{(a, b), (b, c), (c, d), (b, d)\}$. Wir geben die reflexive Hülle, die transitive Hülle und die reflexive, transitive Hülle von R an.

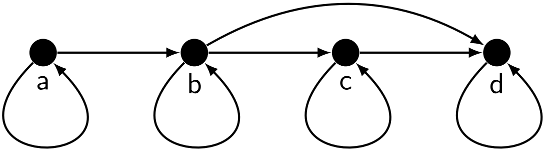
$R = \{(a, b), (b, c), (c, d), (b, d)\}$



Beispiel 4.41

Sei $A = \{a, b, c, d\}$ und $R = \{(a, b), (b, c), (c, d), (b, d)\}$. Wir geben die reflexive Hülle, die transitive Hülle und die reflexive, transitive Hülle von R an.

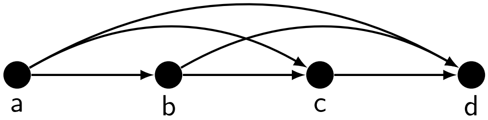
$R' = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, c), (c, d), (b, d)\}$



Beispiel 4.41

Sei $A = \{a, b, c, d\}$ und $R = \{(a, b), (b, c), (c, d), (b, d)\}$. Wir geben die reflexive Hülle, die transitive Hülle und die reflexive, transitive Hülle von R an.

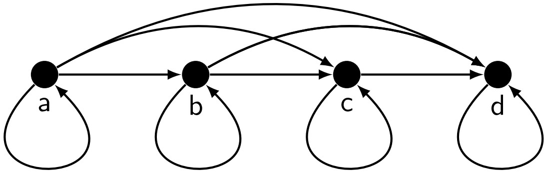
$R^+ = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}$



Beispiel 4.41

Sei $A = \{a, b, c, d\}$ und $R = \{(a, b), (b, c), (c, d), (b, d)\}$. Wir geben die reflexive Hülle, die transitive Hülle und die reflexive, transitive Hülle von R an.

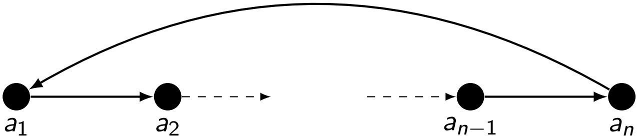
$R^* = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c), (a, d), (b, c),$
$(b, d), (c, d)$



Definition 4.42

Eine reflexive, transitive Relation heißt *Quasiordnung*.

Die reflexive, transitive Hülle einer Relation ist immer eine Quasiordnung, aber nicht unbedingt eine Ordnungsrelation.
Es stellt sich heraus, dass R^* genau dann eine Ordnungsrelation ist, wenn es in R keine Kreise der Form



mit $n \geq 2$ gibt.

n-stellige Relationen

Definition 4.43

Sei $n \geq 1$ und seien $A_1 \ldots, A_n$ Mengen. Dann ist

$$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1 \wedge \cdots \wedge a_n \in A_n\}$$

das *kartesische Produkt* der Mengen $A_1, \ldots, A_n$.
Eine *n-stellige Relation über* $A_1, \ldots, A_n$ ist eine Teilmenge R des Produkts $A_1 \times \ldots \times A_n$.
Eine *n-stellige Relation auf* einer Menge A ist eine Teilmenge R von A^n.

Im vorigen Abschnitt haben wir nur *binäre*, also zweistellige Relationen diskutiert. Einstellige Relationen auf einer Menge A sind einfach Teilmengen der Menge A.

Beispiel 4.44

Seien $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1\}$ und $C = \{2, 3\}$.
Dann sind $R_1 = \emptyset$, $R_2 = \{(2, 0, 2)\}$,
$R_3 = \{(1, 0, 2), (1, 1, 2), (2, 1, 3)\}$ und $R_4 = A \times B \times C$ Relationen über A, B und C.

Mehr über Abbildungen

Definition 4.45

Seien A und B Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung.
Für $A' \subseteq A$ ist die Menge

$$f[A'] = \{b \in B : \exists a \in A'(f(a) = b)\} = \{f(a) : a \in A'\}$$

das *Bild von A' unter f*.
Anstelle von $f[A']$ schreibt man auch $f(A')$.
Für $B' \subseteq B$ ist die Menge

$$f^{-1}[B'] = \{a \in A : f(a) \in B'\}$$

das *Urbild von B' unter f*.

Beispiel 4.46

Sei $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{0, 1, 2\}$.
Weiter sei $f : A \to B$ definiert durch $f(1) = f(2) = 0$, $f(3) = f(5) = 1$ und $f(4) = 2$.
Schließlich seien $A' = \{3, 4, 5\}$ und $B' = \{0, 2\}$.
Dann gilt $f[A'] = \{1, 2\}$ und $f^{-1}[B'] = \{1, 2, 4\}$.

Satz 4.47

Es seien A und B Mengen und $f : A \to B$ eine Funktion. Für alle $A_1, A_2 \subseteq A$ und $B_1, B_2 \subseteq B$ gelten die folgenden Aussagen:

1. $f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2]$
2. $f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2]$
3. $f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$
4. $f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]$
5. $f^{-1}[f[A_1]] \supseteq A_1$
6. $f[f^{-1}[B_1]] \subseteq B_1$

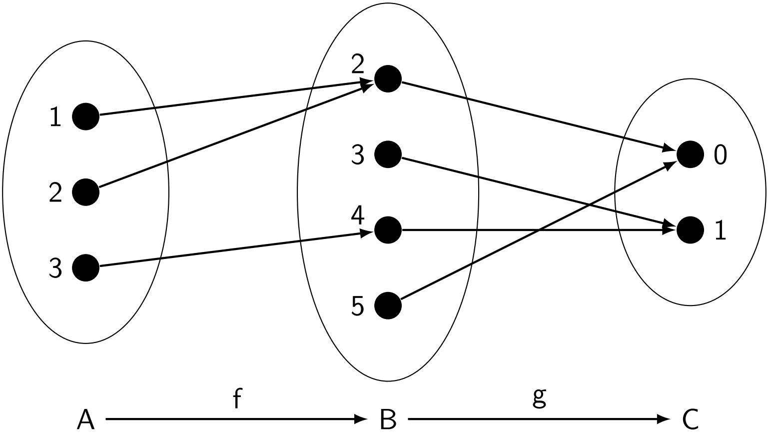
Definition 4.48

Sind $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen, so definieren wir die *Komposition* von f und g als die Funktion
$g \circ f : A \to C; a \mapsto g(f(a))$.
Die Komposition $g \circ f$ wird "g nach f" gelesen.

Beispiel 4.49

Es seien $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ und $C = \{0, 1\}$. Die Funktionen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ seien definiert durch
$f(1) = f(2) = 2$, $f(3) = 4$, $g(2) = g(5) = 0$ und $g(3) = g(4) = 1$.
Dann gilt $(g \circ f)(1) = (g \circ f)(2) = 0$ sowie $(g \circ f)(3) = 1$.

Die Komposition $g \circ f$ kann man sich leicht vorstellen, wenn man die entsprechenden Pfeildiagramme betrachtet.



Die Komposition von Abbildungen erfüllt das Assoziativgesetz.

Satz 4.50

Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$ und $h : C \to D$ Abbildungen. Dann gilt $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Beweis.

Wir müssen zeigen, dass für alle $a \in A$ die Gleichung $(h \circ (g \circ f))(a) = ((h \circ g) \circ f)(a)$ gilt.
Sei also $a \in A$. Dann ist

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(a) &= h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a))) \\ &= (h \circ g)(f(a)) = ((h \circ g) \circ f)(a).\end{aligned}$$

Das zeigt den Satz. □

Definition 4.51

Sei $f : A \to B$ eine Funktion und $A' \subseteq A$.
Unter der *Einschränkung* oder *Restriktion* von f auf A' versteht man die Funktion $g : A' \to B; a \mapsto f(a)$.
Für die Einschränkung von f auf A' schreibt man $f \upharpoonright A'$ oder $f|_{A'}$.

Definition 4.52

Sei $f : A \to B$ eine injektive Funktion. Dann kann man eine Funktion $g : f[A] \to A$ so definieren, dass für alle $b \in f[A]$ und $a \in A$ die Gleichung $g(b) = a$ genau dann gilt, wenn $f(a) = b$ ist.
Die Funktion g ist die *Umkehrfunktion* von f. Für die Umkehrfunktion von f schreibt man f^{-1}.