

# MODELLE DER MENGENLEHRE

STEFAN GESCHKE

## 1. AXIOME DER MENGENLEHRE

Das zur Zeit populärste Axiomensystem der Mengenlehre ist das Zermelo-Fraenkelsche (ZF) zusammen mit dem Auswahlaxiom (AC,  $ZF+AC=ZFC$ ). Die Sprache, in dem dieses Axiomensystem formuliert ist, ist die Sprache der erststufigen Logik mit den zweistelligen Relationssymbolen  $\in$  und  $=$ . Im wesentlichen lässt sich die gesamte Mathematik in dieser Sprache formulieren. Die Existenz der üblicherweise betrachteten Strukturen (die natürlichen Zahlen, die reellen Zahlen, der vollständige Graph mit sieben Ecken, die Stone-Czech-Kompaktifizierung von  $\mathbb{N}$ , der Dualraum von  $L^\infty([0, 1])$ ) und ihre bekannten Eigenschaften lassen sich in ZFC zeigen.

Die Axiome lauten wie folgt (wir verwenden hemmungslos offensichtliche Abkürzungen):

- (1) Nullmengenaxiom.

$$\exists x(x = \emptyset)$$

- (2) Extensionalitätsaxiom.

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

- (3) Fundierungsaxiom.

$$\forall x (x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x \forall z \in x (z \notin y))$$

- (4) Aussonderungsaxiom (eigentlich ein Axiomenschema). Für jede Formel  $\phi(x, y_1, \dots, y_n)$ , in der  $y$  nicht frei vorkommt, ist

$$\forall y_1 \dots \forall y_n \forall z \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \phi(x, y_1, \dots, y_n))$$

ein Axiom.

- (5) Paarmengenaxiom.

$$\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z)$$

- (6) Vereinigungsaxiom.

$$\forall F \exists A \forall Y \in F (Y \subseteq A)$$

- (7) Ersetzungsaxiom (wieder ein Axiomenschema). Für jede Formel  $\phi(x, y, y_1, \dots, y_n)$ , in der  $Y$  nicht frei vorkommt, ist

$$\forall y_1 \dots \forall y_n \forall A (\forall x \in A \exists! y \phi(x, y, y_1, \dots, y_n) \rightarrow \exists Y \forall x \in A \exists y \in Y \phi(x, y, y_1, \dots, y_n))$$

ein Axiom.

- (8) Unendlichkeitsaxiom.

$$\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y \in x (y \cup \{y\} \in x))$$

- (9) Potenzmengenaxiom.

$$\forall x \exists y \forall z (z \subseteq x \rightarrow z \in y)$$

- (10) Auswahlaxiom.

$$\forall x \exists R (R \text{ ist Wohlordnung auf } x)$$

## 2. DER UNVOLLSTÄNDIGKEITSSATZ

Oft formuliert man die Gödelschen Unvollständigkeitssätze für Theorien, die über die natürlichen Zahlen reden. Da sich die natürlichen Zahlen in der Mengenlehre definieren lassen (als die Menge  $\omega$  der Ordinalzahlen  $\alpha$ , so dass kein  $\beta \leq \alpha$  eine Limesordinalzahl ist) und man in ZFC beweisen kann, dass zum Beispiel die Peano-Axiome in  $\omega$  gelten, treffen die Unvollständigkeitssätze auch auf ZFC zu:

**Satz 2.1.** *Sei  $T$  eine Theorie, die ZFC umfasst und rekursiv axiomatisierbar ist.*

a) *Wenn  $T$  widerspruchsfrei ist, so gibt es eine Aussage  $\phi$  in der Sprache von  $T$ , so dass weder  $\phi$  noch  $\neg\phi$  aus ZFC folgen.*

b) *Falls  $T$  widerspruchsfrei ist, so ist die Aussage  $\text{Con}(T)$  in  $T$  weder beweisbar noch widerlegbar.*

Insbesondere trifft dieser Satz für  $T = \text{ZFC}$  zu.

Teil b) des Satzes zeigt, dass wir, wenn wir die gesamte Mathematik innerhalb von ZFC aufbauen wollen, nicht zeigen können, dass ZFC widerspruchsfrei ist, es sei denn, ZFC ist widerspruchsvoll. Wir werden in folgenden immer annehmen, dass ZFC widerspruchsfrei ist. Es gibt auch keinen Grund zu glauben, dass diese Annahme falsch ist.

Ein Beispiel für eine Aussage  $\phi$  wie in Teil a) des Satzes ist die Kontinuums-Hypothese CH, also die Aussage

$$\phi = \text{„}2^{\aleph_0} = \aleph_1\text{“}.$$

Wie werden später zeigen, dass CH in ZFC weder beweisbar noch widerlegbar ist.

Teil b) des Satzes liefert ebenfalls eine Aussage  $\phi$  wie in Teil a), aber  $\text{Con}(\text{ZFC})$  ist von etwas technischerem Charakter als CH.

In der Mengenlehre kann man etwas leichter eine Intuition für die Aussage  $\text{Con}(T)$  für eine rekursiv axiomatisierbare Theorie  $T$  gewinnen als in der Zahlentheorie, innerhalb der man die Unvollständigkeitssätze üblicherweise formuliert. In der Mengenlehre kann man formulieren, was ein Modell einer Theorie ist. Da der Vollständigkeitssatz, wie alle allgemein akzeptierten Sätze der Mathematik, in ZFC bewiesen werden kann, bedeutet  $\text{Con}(T)$  in jedem Modell  $M$  von ZFC einfach, dass die Theorie (ein Objekt in  $M$ ), die man erhält, wenn man die rekursive Definition von  $T$  in  $M$  anwendet, in  $M$  ein Modell hat.

Da sich  $\text{Con}(\text{ZFC})$  in ZFC nicht beweisen lässt, gibt es auch ein Modell von ZFC, in dem es kein Modell von ZFC gibt. Man beachte, dass das letzte ZFC im vorigen Satz verschieden vom vorletzten ZFC ist. Das vorletzte ZFC meint die (metamathematische) Theorie, die wir auf ein Blatt Papier schreiben könnten, wenn wir unendlich viel Zeit (und Tinte) hätten. Das zweite ZFC bezeichnet das Objekt in  $M$ , welches in  $M$  die rekursive Definition von ZFC erfüllt.

Das Modell  $M$  haben wir im wesentlichen durch syntaktische Überlegungen (der Unvollständigkeitssatz) gewonnen. Wir haben den Unvollständigkeitssatz in Form eines *relativen Konsistenzresultats* angewendet, nämlich in der Form „wenn ZFC widerspruchsfrei ist, dann auch  $\text{ZFC} + \neg \text{Con}(\text{ZFC})$ “. Wir sagen kurz „ $\neg \text{Con}(\text{ZFC})$  ist konsistent“, da wir ZFC immer als die zugrunde liegende Theorie annehmen (und auch üblicherweise annehmen, dass ZFC widerspruchsfrei ist).

Im folgenden werden wir relative Konsistenzbeweise nicht so sehr durch syntaktische Betrachtungen, als vielmehr durch mehr oder weniger explizite Konstruktionen von Modellen führen.

**Übung 2.2.** Zeige, dass aus  $\text{Con}(\text{ZFC})$  nicht  $\text{Con}(\text{ZFC} + \text{Con}(\text{ZFC}))$  folgt.

Wir sagen daher „die Konsistenzstärke von  $\text{ZFC} + \text{Con}(\text{ZFC})$  ist echt größer als die von ZFC“ oder einfach „ $\text{ZFC} + \text{Con}(\text{ZFC})$  ist stärker ZFC“. Wir werden später noch einmal auf die Konsistenzstärke von  $\text{ZFC} + \text{Con}(\text{ZFC})$  zurückkommen.

### 3. DIE KONSISTENZ DES FUNDIERUNGSAXIOMS

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass ZF widerspruchsfrei ist, falls ZF ohne das Fundierungsaxiom widerspruchsfrei ist. Das ist ein sogenannter *relativer Konsistenzbeweis*, da nur gezeigt wird, dass das Fundierungsaxiom *relativ konsistent* ist mit dem Rest von ZF, nicht aber, dass ZF wirklich konsistent ist. Wegen des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes lässt sich die Konsistenz von ZF innerhalb von ZF bzw. ZFC, dem Axiomensystem in dem wir Mathematik betreiben, auch nicht beweisen. Es ist trotzdem sinnvoll, die Konsistenz des Fundierungsaxioms relativ zu den anderen Axiomen zu zeigen, und zwar aus zwei Gründen.

Zum einen sind die anderen Axiome von ZF natürliche Abschlusseigenschaften der Klasse aller Mengen, die man benötigt, um sinnvoll Mathematik zu betreiben (wobei bei einigen Axiomen deutliche Abschwächungen sicher für die meisten Anwendungen ausreichend sind). Beim Fundierungsaxiom ist das nicht so klar. Der Sinn des Fundierungsaxioms ist es eher, innerhalb der Mengenlehre ein angenehmes Bild des *Universums*, der Klasse aller Mengen, zu liefern. Es ist gut zu wissen, dass man diese angenehme Struktur des Universums voraussetzen kann, ohne Gefahr zu laufen, in neue Widersprüche zu geraten.

Zum anderen verdeutlicht der Beweis der relativen Konsistenz des Fundierungsaxioms ein paar wichtige Ideen, wie man relative Konsistenzbeweise führen kann, und das ohne technisch sehr anspruchsvoll zu sein.

$ZF^-$  sei ZF ohne das Fundierungsaxiom.

**Satz 3.1.** *Wenn  $ZF^-$  widerspruchsfrei ist, dann auch ZF.*

*Beweis.* Angenommen,  $ZF^-$  ist widerspruchsfrei. Dann gibt es nach dem Vollständigkeitssatz der Prädikatenlogik ein Modell  $(V, \in)$  von  $ZF^-$ . Wir benutzen  $(V, \in)$  um ein Modell von ZF zu konstruieren. Dazu stellen wir uns zunächst vor, in  $V$  zu leben. Die Ordinalzahlen sind die Ordinalzahlen von  $V$ , die Kardinalzahlen sind die von  $V$  und so weiter. Für  $\alpha \in \text{Ord}$  sei  $V_\alpha$  definiert durch

- (i)  $V_0 := \emptyset$
- (ii)  $V_{\alpha+1} := \mathcal{P}(V_\alpha)$
- (iii)  $V_\alpha := \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta$ , falls  $\alpha$  eine Limesordinalzahl ist.

Durch Induktion über  $\text{Ord}$  rechnet man nach, dass  $(V_\alpha)_{\alpha \in \text{Ord}}$  eine bezüglich  $\subseteq$  streng monoton wachsende Folge transitiver Mengen ist.

WF sei die Klasse aller Mengen  $x$ , für die es ein  $\alpha \in \text{Ord}$  mit  $x \in V_\alpha$  gibt, also  $\text{WF} = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} V_\alpha$ . Für jedes  $x \in \text{WF}$  sei  $\text{rk}(x)$  die kleinste Ordinalzahl  $\alpha$  mit  $x \in V_{\alpha+1}$ .  $\text{rk}(x)$  ist der *Rang* von  $x$ . Beachte, dass jede Ordinalzahl  $\alpha$  ein Element von  $\text{WF}$  ist und  $\text{rk}(\alpha) = \alpha$  gilt.

Wir zeigen, dass  $(\text{WF}, \in)$  ein Modell von ZF ist. Das Nullmengenaxiom ist offenbar erfüllt. Aus der Transitivität der  $V_\alpha$  folgt, dass auch  $\text{WF}$  transitiv ist. Damit erfüllt  $\text{WF}$  das Extensionalitätsaxiom. Das Aussonderungsaxiom folgt aus der Konstruktion der  $V_\alpha$ . Ist nämlich  $x$  ein Element von  $V_\alpha$ , so auch jede Teilmenge von  $x$ . Unendlichkeits-, Vereinigungs- und Paarmengenaxiom rechnet man leicht nach.

Für das Ersetzungsaxiom sei  $F$  eine Funktion, d.h., eine Klasse von Paaren, so dass jede Menge in nicht mehr als einem Paar aus der Klasse als linker Partner vorkommt. Betrachte die Funktion  $\text{rk} \circ F$ . Für jedes  $x \in \text{WF}$  sind, da  $V$  Ersetzungs- und Aussonderungsaxiom erfüllt,  $F[x]$  und  $(\text{rk} \circ F)[x]$  Mengen. Wir müssen eine Obermenge von  $F[x]$  finden, die ein Element von  $\text{WF}$  ist. Setze  $\alpha := \sup((\text{rk} \circ F)[x])$ . Es gilt  $F[x] \subseteq V_{\alpha+1}$  und  $V_{\alpha+1} \in V_{\alpha+2} \subseteq \text{WF}$ . Das zeigt das Ersetzungsaxiom für  $\text{WF}$ .

Es bleibt, das Fundierungsaxiom zu zeigen, das einzige Axiom, dass in  $V$  eventuell verletzt ist. Sei  $x \in \text{WF}$ . Wähle  $y \in x$  von minimalen Rang. Dann ist  $y$  ein  $\in$ -minimales Element von  $x$ , da für alle  $y, z \in \text{WF}$  mit  $z \in y$  gilt:  $\text{rk}(z) < \text{rk}(y)$ .  $\square$

Dieser Beweis weist einige Subtilitäten bzw. Unschärfen auf. Zunächst einmal ist es ungeschickt, ein Modell von  $ZF^-$  mit  $(V, \in)$  zu bezeichnen, auch wenn diese Bezeichnung sehr intuitiv ist, da wir ja über Modelle der Mengenlehre reden. Wenn wir von Modellen reden, stellen wir uns vor, dass wir, wie in der Algebra und in der Analysis auch, in einem Universum leben, das die Axiome von ZFC, oder auch einer anderen sinnvollen Mengenlehre, erfüllt, und dass die Modelle bzw. Strukturen, über die wir reden, Mengen sind.  $V$  ist aber eigentlich reserviert als Name für die Allklasse in dem Universum, in dem wir leben. Außerdem braucht die zweistellige Relation des betrachteten Modells von  $ZF^-$  natürlich nicht die wirkliche  $\in$ -Relation zu sein. Formal sollte das betrachtete Modell von  $ZF^-$  also mit  $(M, E)$  oder ähnlich bezeichnet werden.

Die Klasse (in  $M$ ) WF, ein rein syntaktisches Objekt, haben wir stillschweigend mit der Teilmenge von  $M$  identifiziert, die aus denjenigen Elementen von  $M$  besteht, auf die die Formel, die WF definiert, in der Struktur  $(M, E)$  zutrifft. Dann haben wir nachgerechnet, dass die Teilmenge WF von  $M$  zusammen mit der Einschränkung von  $E$  auf diese Menge ein Modell von ZF ist.

Es ist auch möglich, im Beweis von Satz 3.1 die Welt außerhalb von  $M$  völlig zu ignorieren. In diesem Fall ist die Schreibweise  $(V, \in)$  wieder angemessen, da wir nun Wesen in dem Modell von  $ZF^-$  sind und  $V$  in der Tat für uns die Allklasse ist. Genauso ist  $\in$  für uns die wirkliche  $\in$ -Relation. Wie oben definieren wir die Klasse WF. Allerdings ist die Aussage “WF ist ein Modell von ZF” nun nicht mehr sinnvoll, da nur eine Menge Modell von Formeln sein kann. Trotzdem kann man formalisieren, dass WF zusammen mit der Einschränkung von  $\in$  auf WF von außen betrachtet ein Modell einer Formel ist.

Sei  $C$  eine Klasse und  $\phi$  eine Formel in der Sprache der Mengenlehre. Die *Relativierung*  $\phi^C$  von  $\phi$  auf  $C$  erhält man aus  $\phi$  in dem man alle Quantoren der Form  $\exists x$  durch  $\exists x \in C$  und alle der Form  $\forall x$  durch  $\forall x \in C$  ersetzt. “WF ist ein Modell von ZF” können wir nun wie folgt ausdrücken: Für jedes Axiom  $\phi$  von ZF gilt  $\phi^{WF}$ .

Beim Nachweis von  $\phi^{WF}$  für jedes Axiom  $\phi$  von ZF tritt eine Schwierigkeit auf, die im Beweis von Satz 3.1 verschwiegen wurde, aber wesentlich ist. Um zum Beispiel die Relativierung des Paarmengenaxioms auf WF zu beweisen, startet man mit  $x, y \in WF$  und zeigt, dass  $\{x, y\}$  wieder in WF liegt. Die Existenz von  $\{x, y\}$  ist klar, da unser Universum  $V$  alle Axiome von  $ZF^-$  erfüllt. Es ist aber nicht so klar, dass die Menge, die wir in  $V$  mit  $\{x, y\}$  bezeichnen, auch in WF die (relativierte) Definition von  $\{x, y\}$  erfüllt. Zum Glück ist die Formel, die  $\{x, y\}$  definiert, so einfach, dass das in diesem Falle keine Problem bereitet. Betrachten wir aber eine Klasse  $C$  mit  $\{x, y, z\}, x, y \in C$ , die nicht die Menge  $z$  enthält, so erfüllt  $\{x, y, z\}$  in  $C$  die Definition von  $\{x, y\}$ . Es muss also nicht jedes Element von  $C$  in  $C$  dieselben Eigenschaften haben wie in  $V$ .

An dieser Stelle ist es angebracht, das Konzept der *Absolutheit* einzuführen.

**Definition 3.2.** Sei  $C$  eine Klasse und  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  eine Formel. Die Formel  $\phi$  heißt *absolut* über  $C$ , falls gilt:

$$\forall x_1, \dots, x_n \in C (\phi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \phi^C(x_1, \dots, x_n))$$

Eine Funktion (möglicherweise eine echte Klasse) heißt absolut über  $C$ , wenn ihre definierende Formel absolut über  $C$  ist.

Es ist klar, dass quantorenfreie Formeln über jeder Klasse absolut sind. Quantoren der Form  $\exists x \in y$  oder  $\forall x \in y$  heißen beschränkt, alle anderen unbeschränkt. Eine Formel  $\phi$  ist  $\Delta_0$ , wenn  $\phi$  nur beschränkte Quantoren enthält. Folgendes Lemma hilft einem üblicherweise weiter, wenn nach nachweisen will, dass gewisse Mengen relativ zu einer Klasse  $C$  dieselben relevanten Eigenschaften haben wie relativ zu  $V$ .

**Lemma 3.3.**  $\Delta_0$ -Formeln sind absolut über transitiven Klassen.

Sei  $C$  eine Klasse, die ein gewisses Fragment  $ZF^*$  von  $ZF$  erfüllt. Angenommen, aus  $ZF^*$  folgt, dass die Formel  $\phi$  zu einer  $\Delta_0$ -Formel äquivalent ist. Dann ist  $\phi$  absolut über transitiven Klassen, die  $ZF^*$  erfüllen. Daraus folgt, dass Schnitte, Vereinigungen, Paarmengen, geordnete Paare, die leere Menge usw. absolut sind über transitiven Klassen, die  $ZF^-$  ohne das Potenzmengen- und ohne das Unendlichkeitsaxiom erfüllen. Aufpassen muss man nur bei  $\bigcap x$ .  $\bigcap x$  ist im wesentlichen auch absolut über transitiven Klassen, allerdings muss man dabei  $\bigcap \emptyset$  ausschließen.  $\bigcap \emptyset$  ist nämlich üblicherweise definiert als  $V$ , und das ist natürlich nicht absolut.

Die Funktion  $\alpha \mapsto V_\alpha$  ist insofern absolut über transitiven Klassen, die ein genügend grosses Fragment von  $ZF$  (genug, um z.B. den Rekursionsatz zu beweisen) erfüllen, als dass die Formel  $\phi(x, \alpha)$ , die besagt, dass  $x$  Element von  $V_\alpha$  ist, über solchen Klassen absolut ist. Aus dieser Absolutheit der  $V_\alpha$  folgt übrigens, dass  $WF$  ein Modell der Aussage  $V = WF$  ist. Per Induktion über die  $\in$ -Relation kann man leicht zeigen, dass  $V = WF$  äquivalent zum Fundierungsaxiom ist (wenn man die anderen Axiome voraussetzt).

## 4. ELEMENTARE SUBMODELLE UND DAS REFLEXIONSPRINZIP

In der Modelltheorie kennt man den Begriff des elementaren Submodells bzw. der elementaren Unterstruktur. Sei  $(M, E)$  eine Menge mit einer zweistelligen Relation.  $N \subseteq M$  heißt *elementares Submodell* von  $M$ , falls für jede Formel  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  in der Sprache der Mengenlehre und für alle  $a_1, \dots, a_n \in N$  gilt:

$$(N, E \cap N^2) \models \phi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow (M, E) \models \phi(a_1, \dots, a_n)$$

Der Gödelsche Unvollständigkeitssatz und noch schärfer Tarskis „undefinability of truth“-Theorem verbieten es, Mengen zu konstruieren, die, zusammen mit der entsprechend eingeschränkten  $\in$ -Relation, elementare Submodelle von  $V$  sind. Es gibt also keine Mengen, über denen alle Formeln absolut sind.

Wie wir bald sehen werden, ist es jedoch möglich, für endlich viele Formeln eine transitive Menge  $M$  zu finden, so dass jede dieser Formeln absolut über  $M$  ist<sup>1</sup>. Wegen des Kompaktheitssatzes ist diese Feststellung enorm nützlich. Der Kompaktheitssatz besagt, dass eine Menge von Formeln genau dann widerspruchsfrei ist, wenn jede endliche Teilmenge widerspruchsfrei ist. Anders ausgedrückt, wenn wir aus einer Menge von Formeln einen Widerspruch ableiten können, so können wir diesen Widerspruch bereits aus einer endlichen Teilmenge der Formelmengung ableiten.

Um zum Beispiel die Konsistenz von ZFC+¬CH zu zeigen, kann man so tun, als ob es eine transitive Menge  $M$  gäbe, die Modell von ZFC ist. Mit Hilfe von  $M$  konstruieren wir dann ein Modell von ZFC+¬CH. Da wir nur zeigen müssen, dass jede endliche Teilmenge von ZFC+¬CH konsistent ist, genügt es aber, Modelle für jede endliche Teilmenge von ZFC+¬CH zu konstruieren. Und für eine gegebene endliche Teilmenge von ZFC+¬CH genügt es uns zu wissen, dass  $M$  Modell einer gewissen endlichen Teilmenge von ZFC ist. Und die Existenz solcher  $M$  folgt aus dem sogenannten *Reflexionsprinzip*.

Zunächst stellen wir folgendes fest:

**Lemma 4.1.** *Sei  $C$  eine Klasse und  $\phi_1, \dots, \phi_n$  eine Folge von Formeln, die abgeschlossen ist unter der Bildung von Teilformeln. Die  $\phi_k$  seien ohne Allquantoren geschrieben. Dann sind  $\phi_1, \dots, \phi_n$  genau dann absolut über  $C$ , wenn für jedes  $\phi_i(y_1, \dots, y_m)$  von der Form  $\exists x \phi_j(x, y_1, \dots, y_m)$  gilt:*

$$\forall y_1, \dots, y_m \in C (\exists x \phi_j(x, y_1, \dots, y_m) \rightarrow \exists x \in C \phi_j(x, y_1, \dots, y_m))$$

*Beweis.* Induktion über den Formelaufbau. □

**Satz 4.2** (Reflexionsprinzip). *Sei  $W : \text{Ord} \rightarrow V$  eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

- (i) *Für alle  $\alpha, \beta \in \text{Ord}$  mit  $\alpha < \beta$  ist  $W(\alpha) \subseteq W(\beta)$ .*
- (ii) *Ist  $\gamma$  eine Limesordinalzahl, so gilt  $W(\gamma) = \bigcup_{\alpha < \gamma} W(\alpha)$ .*
- (iii)  *$V = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} W(\alpha)$ .*

*Für jede Folge  $\phi_1, \dots, \phi_n$  von Formeln und jedes  $\alpha \in \text{Ord}$  existiert dann ein  $\beta \in \text{Ord}$  mit  $\beta > \alpha$ , so dass die  $\phi_j$  über  $W(\beta)$  absolut sind.*

*Beweis.* Seien  $\phi_1, \dots, \phi_n$  Formeln und  $\alpha \in \text{Ord}$ . Wir können annehmen, dass die Folge  $\phi_1, \dots, \phi_n$  unter der Bildung von Teilformeln abgeschlossen ist. Nach Lemma 4.1 genügt es,  $\beta > \alpha$  zu finden, so dass für jedes  $\phi_i(y_1, \dots, y_m)$  der Form  $\exists x \phi_j(x, y_1, \dots, y_m)$  gilt:

$$(*) \quad \forall y_1, \dots, y_m \in W(\beta) (\exists x \phi_j(x, y_1, \dots, y_m) \rightarrow \exists x \in W(\beta) \phi_j(x, y_1, \dots, y_m))$$

<sup>1</sup>Bald werden wir auch einen Weg kennenlernen, Modelle  $M$  von ZFC zu konstruieren, in denen es abzählbare transitive Mengen gibt, die Modell von ZFC sind, was  $M$  aber nicht weiß.

Für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  definieren wir eine Funktion  $F_i : \text{Ord} \rightarrow \text{Ord}$  wie folgt: Angenommen  $\phi_i(y_1, \dots, y_m)$  hat die Form  $\exists x \phi_j(x, y_1, \dots, y_m)$ . Dann sei

$$G_i(b_1, \dots, b_m) := 0,$$

falls  $\neg \exists x \phi_j(x, b_1, \dots, b_m)$ . Falls  $\exists x \phi_j(x, b_1, \dots, b_m)$ , so sei  $G_i(b_1, \dots, b_m)$  das kleinste  $\eta \in \text{Ord}$  mit  $\exists x \in W(\eta) \phi_j(x, b_1, \dots, b_m)$ . Für  $\xi \in \text{Ord}$  sei

$$F_i(\xi) := \sup\{G_i(b_1, \dots, b_m) : b_1, \dots, b_m \in W(\xi)\}.$$

Falls  $\phi$  nicht mit einem Existenzquantor beginnt, so sei  $F_i(\xi) := 0$  für alle  $\xi \in \text{Ord}$ .

Wähle nun eine Folge  $(\beta_k)_{k \in \omega}$  wie folgt:  $\beta_0$  sei  $\alpha$ . Für  $k \in \omega$  sei

$$\beta_{k+1} := \max(\beta_k + 1, F_1(\beta_k), \dots, F_n(\beta_k)).$$

Setze  $\beta := \sup_{k \in \omega} \beta_k$ .

Für alle  $\xi < \beta$  und alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  ist dann  $F_i(\xi) < \beta$ . Damit erfüllt  $\beta$  die Formel (\*) für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Also sind  $\phi_1, \dots, \phi_n$  absolut über  $W(\beta)$ .  $\square$

Beachte, dass zum Beispiel die Funktion  $\alpha \mapsto V_\alpha$  die Voraussetzungen von Satz 4.2 erfüllt.

Mit einem ganz ähnlichen Beweis erhält man

**Satz 4.3** (Satz von Löwenheim-Skolem, abwärts). *Sei  $(M, E)$  eine Menge mit einer zweistelligen Relation. Für jedes  $X \subseteq M$  existiert ein elementares Submodell  $N \subseteq M$  von  $M$  mit  $X \subseteq N$  und  $|N| \leq \max(|X|, \aleph_0)$ .*

*Beweis.* Wie im Beweis von Satz 4.2 genügt es,  $N \subseteq M$  zu finden, so dass für jede Existenzformel  $\exists x \phi(x, y_1, \dots, y_n)$  und alle  $b_1, \dots, b_n \in N$  gilt:

$$M \models \exists x \phi(x, b_1, \dots, b_n) \Rightarrow \text{es gibt } a \in N \text{ mit } N \models \phi(a, b_1, \dots, b_n).$$

Dazu weisen wir jeder Formel  $\phi(x, y_1, \dots, y_n)$  eine Funktion  $f_\phi : M^n \rightarrow M$  zu. Fixiere irgendein  $a_0 \in M$ . Seien  $b_1, \dots, b_n \in M$ . Falls es  $a \in M$  mit  $M \models \phi(a, b_1, \dots, b_n)$  gibt, so sei  $f_\phi(b_1, \dots, b_n)$  ein solches  $a$ . Falls so ein  $a$  nicht existiert, so sei  $f_\phi(b_1, \dots, b_n) := a_0$ . Die Funktionen  $f_\phi$  heißen *Skolem-Funktionen*.

Für  $X \subseteq M$  sei  $\text{sk}(X)$  der Abschluss von  $X$  unter sämtlichen  $f_\phi$ . Da es nur abzählbar viele Formeln gibt, gilt  $|\text{sk}(X)| \leq \max(|X|, \aleph_0)$ .  $\text{sk}(X)$  heißt die *Skolem-Hülle* von  $X$ . Es ist klar, dass in  $N := \text{sk}(X)$  sämtliche Existenz-Aussagen mit Parametern aus  $N$  wahr sind, die in  $M$  wahr sind. Also ist  $N$  ein elementares Submodell von  $M$ .  $\square$

Wenn unser Universum  $V$  alle Axiome von ZFC erfüllt, so ergibt sich folgendes Bild: Für jede endliche Teilmenge von ZFC gibt es ein  $\alpha \in \text{Ord}$ , so dass  $V_\alpha$  Modell dieser endlichen Teilmenge von ZFC ist. Das folgt aus dem Reflexionsprinzip. Nach dem Satz von Löwenheim-Skolem hat  $V_\alpha$  ein abzählbares elementares Submodell  $M$ . Da  $\in$  fundiert ist, hat  $M$  einen transitiven Kollaps  $N$ . Da  $(M, \in)$  zu  $(N, \in)$  isomorph ist, erfüllt auch  $N$  die vorgegebene endliche Teilmenge von ZFC. Jede endliche Teilmenge von ZFC hat also ein abzählbares, transitives Modell. Man beachte jedoch, dass die Quantifikation über endliche Teilmengen von ZFC in der Metasprache erfolgt. Sonst hätten wir in ZFC bewiesen, dass ZFC konsistent ist.

Es ist auch möglich, abzählbare, transitive Modelle gewisser unendlicher Teilmengen von ZFC zu konstruieren. Mit dem Argument von eben, Satz von Löwenheim-Skolem und Mostowski-Kollaps, genügt es, transitive Mengen zu finden, die viele Axiome von ZFC erfüllen. Zum Beispiel erfüllen die  $V_\alpha$  einige Axiome und sogar recht viele, falls  $\alpha$  eine Limesordinalzahl ist. Weitere wichtige Modelle für große Teile von ZFC sind die  $H_\kappa$ : Für eine Menge  $X$  sei

$$\text{trcl}(X) := X \cup \bigcup X \cup \bigcup^2 X \cup \dots$$

die *transitive Hülle* von  $X$ . Wie man leicht nachprüft, ist  $\text{trcl}(X)$  die kleinste transitive Obermenge von  $X$ . Für jede unendliche Kardinalzahl  $\kappa$  sei

$$H(\kappa) := \{X : |\text{trcl}(X)| < \kappa\}.$$

Ist  $\kappa$  regulär und überabzählbar, so erfüllt  $H_\kappa$  alle Axiome von ZFC bis auf, unter Umständen, das Potenzmengen-Axiom. Eine reguläre Kardinalzahl  $\kappa > \aleph_0$  heißt *stark unerreichbar*, falls gilt:

$$\forall \lambda < \kappa (2^\lambda < \kappa)$$

Ist  $\kappa$  stark unerreichbar, so gilt  $V_\kappa = H_\kappa$  und  $H_\kappa$  ist Modell von ZFC.

**Übung 4.4.** Zeige  $H_{\aleph_0} = V_\omega$ .

**Übung 4.5.** Welche Axiome von ZFC gelten in  $(V_\omega, \in)$ ?

**Übung 4.6.** Gib ein Axiom von ZFC an, welches in  $(V_{\aleph_1}, \in)$  gilt, aber nicht in  $(H_{\aleph_1}, \in)$ .

Welche Folgerung aus ZFC gilt in  $(H_{\aleph_1}, \in)$ , aber nicht in  $(V_{\aleph_1}, \in)$ .

Wir stellen noch eine Methode vor, wirklich abzählbare transitive Modelle von ZFC zu bekommen. Der Haken an dieser Methode ist, dass sie nicht etwa in jedem beliebigen Universum  $V$  ein abzählbares transitives Modell von ZFC liefert (was aus den oben genannten Gründen auch nicht geht), sondern dass sie ein Modell  $(M, E)$  von ZFC liefert, in dem es eine aus der Sicht von  $M$  abzählbare transitive Struktur  $(N, E \cap N^2)$  gibt, die von außen (außerhalb von  $M$ ) betrachtet ein Modell von ZFC ist.

**Definition 4.7.** Wir betrachten die Sprache der Mengenlehre bereichert durch das Konstantensymbol  $\delta$ . Mit  $V_\delta \preccurlyeq V$  bezeichnen wir das Formelschema, dass für jede Formel  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  in der Sprache der Mengenlehre (ohne  $\delta$ ) die Aussage

$$\forall x_1, \dots, x_n \in V_\delta (\phi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \phi^{V_\delta}(x_1, \dots, x_n))$$

enthält.

**Lemma 4.8.** Falls ZFC konsistent ist, so auch  $ZFC + V_\delta \preccurlyeq V$ .

*Beweis.* Nach dem Kompaktheitssatz genügt es zu zeigen, dass jede endliche Teilmenge von  $ZFC + V_\delta \preccurlyeq V$  konsistent ist.

Sei  $(M, E)$  ein Modell von ZFC und  $T$  eine endliche Teilmenge von  $ZFC + V_\delta \preccurlyeq V$ . Da  $T$  endlich ist, gibt es auch nur endlich viele Formeln  $\phi_1, \dots, \phi_n$ , für die eine Aussage der Form

$$\forall x_1, \dots, x_m \in V_\delta (\phi_i(x_1, \dots, x_m) \leftrightarrow \phi_i^{V_\delta}(x_1, \dots, x_m))$$

in  $T$  auftritt.

Wir argumentieren nun in  $M$ . Nach dem Reflexionssatz existiert  $\alpha \in \text{Ord}$ , so dass die  $\phi_i$  über  $V_\alpha$  absolut sind. Interpretiert man nun  $\delta$  in  $M$  durch  $\alpha$ , so ist  $(M, E)$  Modell von  $T$  (genauer,  $(M, E, \alpha)$  ist Modell von  $T$ ).  $\square$

**Korollar 4.9.** Falls ZFC konsistent ist, so gibt es ein Modell  $(M, E)$  von ZFC und  $N \in M$ , so dass gilt:

- (1)  $(M, E) \models \text{„}N \text{ ist abzählbar und transitiv“}$
- (2)  $(\{x \in M : (x, N) \in E\}, E)$  erfüllt genau dieselben Aussagen in der Sprache der Mengenlehre wie  $(M, E)$  und ist insbesondere Modell von ZFC.

Achtung: Dass  $(\{x \in M : (x, N) \in E\}, E)$  Modell von ZFC ist, ist zwar äquivalent dazu, dass für jede Aussage  $\phi \in \text{ZFC}$  die Aussage  $\phi^N$  in  $M$  gilt. Das heißt aber nicht, dass  $M$  glaubt, dass  $N$  Modell von ZFC ist. Das liegt daran, dass das, was  $M$  für ZFC hält, wenig mit dem wirklichen ZFC, das wir kennen, zu tun haben muss.



*Beweis von Korollar 4.9.* Sei  $(M, E, \alpha)$  ein Modell von  $\text{ZFC} + V_\delta \preceq V$ . Wir argumentieren in  $M$ . Durch Anwendung des Satzes von Löwenheim-Skolem auf  $V_\alpha$ , erhält man ein abzählbares  $N_0$ , welches elementares Submodell von  $V_\alpha$  ist.  $N$  sei der transitive Kollaps von  $N_0$ . Wie man leicht nachrechnet, leistet  $N$  das Gewünschte.

Man beachte, dass  $N$  (in  $M$ ) zwar isomorph zu  $N_0$  ist und damit dieselben Aussagen erfüllt, aber üblicherweise nicht elementares Submodell von  $V_\alpha$  ist.  $\square$

## 5. DIE KONSTRUKTIBLEN MENGEN

Wir definieren, in ZF, eine Klasse L, die ZFC+GCH erfüllt. GCH ist dabei die Aussage

$$\forall \kappa \in \text{Card}(\kappa \geq \aleph_0 \rightarrow 2^\kappa = \kappa^+).$$

L ist Gödels Universum der *konstruktiblen Mengen*. Da wir die Konsistenz von AC mit ZF zeigen wollen, werden wir bei den folgenden Argumenten AC üblicherweise nicht benutzen. Falls AC doch einmal benutzt wird (an unwesentlichen Stellen für das Entwickeln der Theorie), so wird darauf hingewiesen.

**5.1. Definierbarkeit.** Die Konstruktion von L verläuft ähnlich der Konstruktion von WF. Allerdings werden wir nicht in jedem Schritt die volle Potenzmenge des bisher Konstruierten nehmen, sondern die Menge der definierbaren Teilmengen dessen, was wir bereits konstruiert haben. Dazu müssen wir uns ein paar Gedanken über Definierbarkeit machen.

Zunächst muß man wissen, was eine Formel ist. Wir beschränken uns dabei auf die Sprache der Mengenlehre. Wie üblich ist eine Formel eine Folge von Zeichen. Es ist sinnvoll, als Alphabet die natürlichen Zahlen zu wählen. Man legt also zum Beispiel fest, dass 0 das Zeichen für die Relation  $\in$  ist, 1 das Zeichen für  $=$ , 2 das Zeichen für  $\wedge$  und so weiter. In dem Alphabet gibt es unendlich viele Zeichen für Variablen. Formeln sind nun einfach endliche Folgen von Zeichen, also eigentlich Abbildungen von einer natürlichen Zahl nach  $\omega$ , die gewissen syntaktischen Regeln genügen. Jeder Formel  $\phi$  in der Metasprache lässt sich nun eine endliche Folge  $[\phi]$  von natürlichen Zahlen zuordnen, in dem man die Zeichen von  $\phi$  in die entsprechenden natürlichen Zahlen unseres Universums übersetzt. Die Menge  $[\phi]$  in unserem Universum ist die *Gödelisierung* von  $\phi$ . Man beachte, dass das Gödelisieren in der Zahlentheorie etwas aufwendiger ist, weil man da nicht über endliche Folgen etc. reden kann.

Mit Hilfe des Rekursionsatzes kann man nun eine Formel  $\text{fml}(x)$  in der Metasprache hinschreiben, die definiert, wann die Menge  $x$  eine Formel ist. Per Induktion über den Formelaufbau zeigt man dann, dass  $\text{fml}([\phi])$  für jede metasprachliche Formel  $\phi$  erfüllt ist.

Wiederum mit Hilfe des Rekursionsatzes kann man eine Formel  $\text{sat}(x, y, z)$  hinschreiben, die folgendes aussagt:

- (i) Es gibt ein  $n \in \omega$ , so dass  $y$  eine Formel mit  $n$  freien Variablen ist,
- (ii) es gibt  $x_1, \dots, x_n \in x$  mit  $z = (x_1, \dots, x_n)$  und
- (iii)  $(x, \in)$  erfüllt die Formel  $y$  wenn man die freien Variablen mit  $x_1, \dots, x_n$  interpretiert.

Durch Induktion über den Formelaufbau zeigt man dann, dass für jede Formel  $\phi(x_1, \dots, x_n)$ , jede Menge  $M$  und alle  $a_1, \dots, a_n \in M$  gilt:

$$\phi^M(a_1, \dots, a_n) \leftrightarrow \text{sat}(M, [\phi], (a_1, \dots, a_n))$$

Die Relation  $\models$  können wir damit als definierbare Klasse in  $V$  auffassen (wobei wir  $\models$  nur für Strukturen der Form  $(M, \in)$  betrachten. Aber der allgemeine Fall geht genauso durch).

Man beachte, dass wir uns bei der Definition von  $\text{sat}$  der Tatsache bedient haben, dass es in der Mengenlehre möglich ist, Mengen  $a_1, \dots, a_n$  als eine Menge, nämlich als  $n$ -Tupel, zu kodieren. Das ist nötig, weil eine Formel wie  $\text{sat}$  eine feste Anzahl von freien Variablen haben muss (bzw. automatisch hat, sonst wäre es keine Formel).

Es ist nun problemlos möglich, eine Formel hinzuschreiben, die die Formelmenge ZFC definiert. Ist man etwas allgemeiner bei der Definition von  $\text{sat}$ , so kann man auch die Gültigkeit von Formeln in Strukturen der Form  $(M, E)$  definieren. Damit

kann man dann auch eine Formel  $\text{Con}(x)$  hinschreiben, die sagt, dass die Formelmengemenge  $x$  ein Modell hat. Der schon oft angeführte Unvollständigkeitssatz sagt nun einfach, dass die Formel  $\text{Con}(\text{ZFC})$  nicht aus ZFC ableitbar ist. Beachte, dass das ZFC in  $\text{Con}(\text{ZFC})$  eine in  $V$  definierte Formelmengemenge ist (die eben so definiert ist, wie wir ZFC als Formelmengemenge definieren würden), während das zweite ZFC das metasprachliche Axiomensystem ist.

Sei nun  $M$  eine Menge. Eine Menge  $P \subseteq M$  heißt definierbar, wenn es eine Formel  $\phi(x, y_1, \dots, y_n)$  gibt, so dass für gewisse  $b_1, \dots, b_n \in M$  gilt:

$$P = \{a \in M : (M, \in) \models \phi(a, b_1, \dots, b_n)\}$$

Mit Hilfe von sat kann man eine Definition der Funktion  $\mathcal{D}$  angeben, die jeder Menge  $M$  die in  $(M, \in)$  definierbaren Teilmengen von  $M$  zuordnet. Für jede Formel  $\phi(x, y_1, \dots, y_n)$  in der Metasprache kann man zeigen, dass für alle  $M$  und alle  $b_1, \dots, b_n \in M$  gilt:

$$\{x \in M : \phi^M(x, b_1, \dots, b_n)\} \in \mathcal{D}(M)$$

**Lemma 5.1.** *Für alle  $M$  gilt:*

- (1)  $\mathcal{D}(M) \subseteq \mathcal{P}(M)$ .
- (2) Ist  $M$  transitiv, so gilt  $M \subseteq \mathcal{D}(M)$ .
- (3)  $\forall X \subseteq M (|X| < \omega \rightarrow X \in \mathcal{D}(M))$ .
- (4) (AC)  $|M| \geq \omega \rightarrow |\mathcal{D}(M)| = |M|$ .

*Beweis.* (1) ist klar. Für (2) sei  $M$  transitiv und  $a \in M$ . Dann ist  $a = \{x \in M : x \in a\}$ . Damit ist  $a$  eine definierbare Teilmenge von  $M$ , also  $a \in \mathcal{D}(M)$ .

(3) ist weniger trivial, als es aussieht. Aus der Tatsache, dass  $V$  glaubt, dass  $X$  endlich ist, folgt nämlich nicht, dass ein  $n$  in der Metasprache sowie  $a_1, \dots, a_n$  existieren mit  $X = \{a_1, \dots, a_n\}$ . Es könnte passieren, dass es in  $V$  mehr natürliche Zahlen gibt, als nur  $0, 1, 2$  usw. Wir können jedoch in  $V$  mittels vollständiger Induktion über die natürlichen Zahlen von  $V$  beweisen, dass alle endlichen  $X \subseteq M$  definierbar sind.

Es ist klar, dass die leere Menge definierbar ist. Sei nun  $n \in \omega$  und  $f : n + 1 \rightarrow X$  eine Bijektion (alles in  $V$ ). Nach Induktionsannahme ist  $f[n]$  eine definierbare Teilmenge von  $M$ , zum Beispiel  $f[n] = \{x \in M : M \models \phi(x, b_1, \dots, b_m)\}$  für geeignete  $b_1, \dots, b_m \in M$ . Dann ist

$$f[n + 1] = \{x \in M : M \models \phi(x, b_1, \dots, b_m) \vee x = b_{m+1}\},$$

wobei  $b_{m+1} := f(n)$  sei.

(4) folgt aus der Tatsache, dass es nur abzählbar viele Formeln und für jedes  $n$  nur  $|M|$   $n$ -Tupel von Parametern in  $M$  zum Einsetzen in Formeln gibt.  $\square$

## 5.2. Definition und elementare Eigenschaften von L.

**Definition 5.2.** Durch Rekursion über  $\alpha \in \text{Ord}$  definiert man  $L_\alpha$  wie folgt:

- (i)  $L_0 := \emptyset$
- (ii)  $L_{\alpha+1} := \mathcal{D}(L_\alpha)$
- (iii)  $L_\alpha := \bigcup_{\beta < \alpha} L_\beta$ , falls  $\alpha$  eine Limesordinalzahl ist.

Weiter sei  $L := \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} L_\alpha$  die Klasse der *konstruktiblen Mengen*.

Mittels transfiniten Induktion über alle Ordinalzahlen ergibt sich aus Lemma 5.1 sofort

**Lemma 5.3.** *Für alle  $\alpha \in \text{Ord}$  ist  $L_\alpha$  transitiv. Für alle  $\alpha, \beta \in \text{Ord}$  mit  $\alpha \leq \beta$  ist  $L_\alpha \subseteq L_\beta$ .*

Insgesamt erfüllt die Funktion  $\alpha \mapsto L_\alpha$  damit die Voraussetzungen des Reflexionsprinzips (Lemma 4.2) relativ zu L. Wie man leicht sieht, kann man das Reflexionsprinzip auch in diesem Falle anwenden. Wir werden das später ausnutzen.

**Übung 5.4.** Sei  $(W_\alpha)_{\alpha \in \text{Ord}}$  eine bzgl.  $\subseteq$  wachsende, stetige Folge von Mengen. Stetig heißt hierbei, dass für jede Limesordinalzahl  $\delta$  gilt:  $W_\delta = \bigcup_{\alpha < \delta} W_\alpha$ . Formuliere und beweise einen Reflexionssatz relativ zu  $W := \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} W_\alpha$ . (Der Satz soll aussagen, dass Formeln vom Typ  $\phi^W(x_1, \dots, x_n)$  bereits in einem  $W_\alpha$  reflektiert werden. Man orientiere sich bei der genauen Formulierung an Lemma 4.2.)

**Definition 5.5.** Für jedes  $x \in L$  sei  $\rho(x) := \min\{\alpha \in \text{Ord} : x \in L_{\alpha+1}\}$  der *L-Rang* von  $x$ .

**Lemma 5.6.** *Für alle  $\alpha \in \text{Ord}$  gilt:*

- (1)  $L_\alpha = \{x \in L : \rho(x) < \alpha\}$ ;
- (2)  $\alpha \in L$  und  $\rho(\alpha) = \alpha$ ;
- (3)  $L_\alpha \cap \text{Ord} = \alpha$ ;
- (4)  $L_\alpha \in L_{\alpha+1}$ ;
- (5) *Jede endliche Teilmenge von  $L_\alpha$  ist Element von  $L_{\alpha+1}$ .*

*Beweis.* (1) ist klar. (2) folgt sofort aus (3). Wir beweisen (3) mittels transfiniten Induktion über  $\alpha$ . Der Induktionsanfang,  $L_0 \cap \text{Ord} = \emptyset = 0$ , und die Limeschritte sind einfach. Sei also  $\alpha \in \text{Ord}$  und  $L_\alpha \cap \text{Ord} = \alpha$ . Dann ist  $\alpha \in \mathcal{D}(L_\alpha)$ , da  $\alpha$  einfach die Menge der Ordinalzahlen in  $L_\alpha$  ist. Hierbei wird benutzt, dass die Definition von Ordinalzahlen  $\Delta_0$  ist und damit absolut über der transitiven Klasse  $L_\alpha$ . Also gilt  $\alpha + 1 \subseteq L_{\alpha+1}$ . Wegen  $L_\alpha \cap \text{Ord} = \alpha$  ist keine Ordinalzahl  $\beta > \alpha$  Teilmenge von  $L_\alpha$ . Also ist keine Ordinalzahl  $\beta > \alpha$  Element von  $L_{\alpha+1}$ . Es folgt  $L_{\alpha+1} \cap \text{Ord} = \alpha + 1$ .

(4) ist klar. (5) folgt aus Lemma 5.1(3).  $\square$

**Lemma 5.7.** *a) Für alle  $\alpha \in \text{Ord}$  gilt  $L_\alpha \subseteq V_\alpha$ .*

*b) Für alle  $n \in \omega$  gilt  $L_n = V_n$ .*

*c)  $L_\omega = V_\omega$ .*

*d) (AC) Für alle  $\alpha \geq \omega$  ist  $|L_\alpha| = |\alpha|$ .*

*Beweis.* Teil a) folgt sofort mittels transfiniten Induktion. Teil b) folgt per Induktion über  $n \in \omega$  unter Ausnutzung von Lemma 5.1(3). Teil c) folgt aus Teil b). Teil d) folgt mittels transfiniten Induktion aus c) zusammen mit Lemma 5.1(4).  $\square$

**5.3. ZF in L.** Wir setzen nur voraus, dass  $V$  ZF erfüllt und rechnen ZF in L nach.

**Satz 5.8.** *L erfüllt ZF.*

*Beweis.* L erfüllt das Extensionalitätsaxiom, da es transitiv ist. Das Nullmengenaxiom ist erfüllt wegen  $\emptyset \in L$ . Das Fundierungsaxiom gilt automatisch in Teilklassen

von  $V$ .  $L$  erfüllt das Unendlichkeitsaxiom, da  $\omega \in L$  gilt und die Eigenschaften von  $\omega$  genügend absolut sind.

Das Aussonderungsaxiom in  $L$  zeigt man wie folgt: Sei  $\phi(x, y_1, \dots, y_n)$  eine Formel und  $a, b_1, \dots, b_n \in L$ . Wir müssen  $\{x \in a : \phi^L(x, b_1, \dots, b_n)\} \in L$  zeigen. Wähle  $\alpha \in \text{Ord}$  mit  $a, b_1, \dots, b_n \in L_\alpha$ . Nach dem Reflexionsprinzip existiert  $\beta > \alpha$ , so dass  $\phi$  absolut über  $L_\beta$  ist (relativ zu  $L$ , d.h., wenn man so tut, als ob  $V = L$  gilt). Es gilt dann

$$\{x \in a : \phi^L(x, b_1, \dots, b_n)\} = \{x \in a : \phi^{L_\beta}(x, b_1, \dots, b_n)\}.$$

Offenbar ist  $\{x \in a : \phi^{L_\beta}(x, b_1, \dots, b_n)\} \in \mathcal{D}(L_\beta) = L_{\beta+1} \subseteq L$ .

Paarmengen-, Vereinigungs-, Potenzmengen- und Ersetzungsaxiom verlangen jeweils nur die Existenz genügend großer Mengen. Gute Kandidaten für genügend große Mengen sind die  $L_\alpha$ . Wir rechnen zum Beispiel das Potenzmengenaxiom nach.

Sei  $a \in L$ . Sei  $\alpha := \sup\{\rho(b) : b \in L \wedge b \subseteq a\} + 1$ . Dann gilt  $b \in L_\alpha$  für alle  $b \in L$  mit  $b \subseteq a$ . Damit ist das Potenzmengenaxiom in  $L$  erfüllt.  $\square$

5.4.  $V = L$ ? Es ist eine naheliegende Frage, ob  $V = L$  sein kann. Ein guter Kandidat für ein Modell von  $ZF + V = L$  ist natürlich  $L$  selbst. In der Tat gilt  $V = L$  in  $L$ , wie wir gleich sehen werden. Das Axiom  $V = L$  ist also konsistent mit  $ZF$ . Das ermöglicht viele relative Konsistenzbeweise. Man muss nur zeigen, dass eine gewisse Aussage  $\phi$  aus  $V = L$  folgt, um ihre relative Konsistenz mit  $ZF$  zu zeigen. Auf diese Weise werden wir im nächsten Abschnitt die Konsistenz von  $AC$  und  $GCH$  mit  $ZF$  zeigen.

**Satz 5.9.**  $L$  ist ein Modell von  $V = L$ .

*Beweis.* Wir wissen bereits, dass alle Ordinalzahlen in  $L$  liegen. Um nun  $(V = L)^L$  zu zeigen, genügt es  $L_\alpha = L_\alpha^L$  für alle  $\alpha \in \text{Ord}$  nachzuweisen. Das geht mittels transfiniter Induktion über  $\alpha$ . Der Induktionsanfang,  $L_0 = \emptyset = L_0^L$ , und die Limeschritte sind klar.

Sei nun  $\alpha \in \text{Ord}$  und gelte  $L_\alpha = L_\alpha^L$ .  $L_{\alpha+1} = L_{\alpha+1}^L$  ist dann äquivalent zu  $\mathcal{D}(L_\alpha) = (\mathcal{D}(L_\alpha))^L$ . Die Definition von  $\mathcal{D}$  ist eine Formel, die aber den Parameter  $\omega$  bzw.  $\omega^{<\omega} = \bigcup_{n \in \omega} \omega^n$  verwendet. In der Formel wird Rekursion über  $\omega$  verwendet. Die verwendeten Rekursionsvorschriften selbst sind  $\Delta_0$ . Wie man leicht nachrechnet, sind rekursiv definierte Funktionen mit absoluter Rekursionsvorschrift wieder absolut.

Damit ist  $\mathcal{D}$  absolut über transitiven Klassen, die Modell von  $ZF$  ohne das Potenzmengenaxiom sind. (Die Formulierung "Modell von  $ZF$  ohne das Potenzmengenaxiom" ist nützlich, weil sie sich einfach hinschreiben lässt und es viele Mengen gibt, die das erfüllen.) Insgesamt ergibt sich der Satz.  $\square$

Die Absolutheitsbetrachtungen im Beweis von Satz 5.9 liefern sofort, dass für jede transitive Klasse  $M$ , die Modell von  $ZF$  ohne das Potenzmengenaxiom ist und die alle Ordinalzahlen enthält, gilt:

$$L = L^M \subseteq M$$

In diesem Sinne ist  $L$  also das kleinste transitive Modell von  $ZF$ , das alle Ordinalzahlen enthält.

Wir werden später sehen, dass  $V \neq L$  relativ konsistent mit  $ZF$  ist.

### 5.5. AC und GCH in L.

**Satz 5.10.**  $V = L$  impliziert AC.

*Beweis.* Wir zeigen eine stärkere Aussage als AC. Wir zeigen, dass man in L eine zweistellige Relation  $\triangleleft$  definieren kann, die eine Wohlordnung auf ganz L ist. Dazu definiert man rekursiv über  $\alpha \in \text{Ord}$  Relationen  $\triangleleft_\alpha$ , die jeweils Wohlordnungen auf  $L_\alpha$  sind und Anfangsstücke voneinander. Die Relation  $\triangleleft$  ist dann einfach  $\bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} \triangleleft_\alpha$ .

Für  $\triangleleft_0$  hat man keine andere Wahl, als die leere Relation zu nehmen. Ist  $\gamma$  eine Limesordinalzahl, so hat man, wenn die  $\triangleleft_\alpha$  Anfangsstücke voneinander werden sollen, keine andere Wahl, als  $\triangleleft_\gamma := \bigcup_{\alpha < \gamma} \triangleleft_\alpha$  zu setzen.

Sei nun  $\triangleleft_\alpha$  bereits definiert. Wir definieren  $\triangleleft_{\alpha+1}$ . Dazu benutzen wir sogenannte lexikographische Ordnungen.

Sei  $(X, \sqsubset)$  eine lineare Ordnung. Für jedes  $n \in \omega$  sei  $\sqsubset^n$  die folgende Ordnung auf  $X^n$ . Für  $x, y \in X^n$  mit  $x \neq y$  sei  $x \sqsubset^n y$ , falls  $x(\Delta(x, y)) \sqsubset y(\Delta(x, y))$  gilt, wobei  $\Delta(x, y) := \min\{i < n : x(i) \neq y(i)\}$  ist. Wie man leicht sieht, ist  $\sqsubset^n$  eine lineare Ordnung auf  $X^n$ , die von  $\sqsubset$  induzierte *lexikographische Ordnung*.

Ist  $\sqsubset$  eine Wohlordnung, so ist auch  $\sqsubset^n$  eine Wohlordnung. Sonst gäbe es nämlich in  $X^n$  eine  $\sqsubset^n$ -fallende Folge  $x_0, x_1, \dots$ . Schreibe  $x_i$  als  $(x_{i,1}, \dots, x_{i,n})$ . Nach der Definition von  $\sqsubset^n$  ist die Folge  $(x_{i,1})_{i \in \omega}$  fallend bezüglich der Relation

$$\sqsubseteq := \sqsubset \cup (= \cap X^2).$$

Da  $\sqsubset$  eine Wohlordnung ist, wird  $(x_{i,1})_{i \in \omega}$  irgendwann konstant, sagen wir ab  $i_1$ . Die Folge  $(x_{i,2})_{i \geq i_1}$  ist nach Definition von  $\sqsubset^n$  wieder  $\sqsubseteq$ -fallend in  $X$ , wird also ab einem gewissen  $i_2$  konstant. Wir können dabei  $i_2 \geq i_1$  wählen. Auf diese Weise erhalten wir natürliche Zahlen  $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n$ , so dass  $(x_{i,k})_{i \geq i_k}$  konstant ist für alle  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Damit ist aber auch die Folge  $((x_{i,1}, \dots, x_{i,n}))_{i \geq i_n}$  konstant, ein Widerspruch zur Wahl der  $x_i$ .

Mit Hilfe der  $\sqsubset^n$  definieren wir nun eine Ordnung auf  $X^{<\omega} := \bigcup_{n \in \omega} X^n$ . Für  $x, y \in X^{<\omega}$  mit  $x \neq y$  sei  $x \sqsubset^{<\omega} y$ , falls der Definitionsbereich von  $x$  echt kleiner ist, als der von  $y$  oder falls es ein  $n \in \omega$  gibt mit  $x, y \in X^n$  und  $x \sqsubset^n y$ . Mit im wesentlichen dem gleichen Argument wie für  $\sqsubset^n$  sieht man, dass  $\sqsubset^{<\omega}$  eine Wohlordnung ist, falls  $\sqsubset$  eine Wohlordnung ist.

Die Relation  $\triangleleft_{\alpha+1}$  sei nun wie folgt definiert: Für  $x, y \in L_\alpha$  sei  $x \triangleleft_{\alpha+1} y$ , falls  $x \triangleleft_\alpha y$ . Für alle  $x \in L_\alpha$  und alle  $y \in L_{\alpha+1} \setminus L_\alpha$  sei  $x \triangleleft_{\alpha+1} y$ . Es bleibt der Fall  $x, y \in L_{\alpha+1} \setminus L_\alpha$  zu betrachten. Seien also  $x, y \in L_{\alpha+1} \setminus L_\alpha$  verschieden. Nach der Definition von  $L_{\alpha+1}$  sind  $x, y \in \mathcal{D}(L_\alpha)$ .

Betrachte die übliche Wohlordnung  $<$  auf  $\omega$ . Seien  $a, b \in \omega^{<\omega}$  jeweils  $<^{<\omega}$ -minimal, so dass für gewisse  $(c_1, \dots, c_k), (d_1, \dots, d_l) \in L_\alpha^{<\omega}$

$$(1) \quad x = \{z \in L_\alpha : \text{sat}(L_\alpha, a, (z, c_1, \dots, c_k))\}$$

bzw.

$$(2) \quad y = \{z \in L_\alpha : \text{sat}(L_\alpha, b, (z, d_1, \dots, d_l))\}$$

gilt. Wähle  $c = (c_1, \dots, c_k) \in L_\alpha^{<\omega}$  sowie  $d = (d_1, \dots, d_l) \in L_\alpha^{<\omega}$  jeweils  $\triangleleft_\alpha^{<\omega}$ -minimal mit (1) bzw. (2). Setze nun  $x \triangleleft_{\alpha+1} y$ , falls entweder  $a <^{<\omega} b$  oder  $a = b$  und  $c \triangleleft_\alpha^{<\omega} d$ .

Man rechnet leicht nach, dass alle  $\triangleleft_\alpha$  Wohlordnungen sind. Außerdem ist für alle  $\alpha, \beta \in \text{Ord}$  mit  $\alpha \leq \beta$  die Wohlordnung  $(L_\alpha, \triangleleft_\alpha)$  ein Anfangsstück von  $(L_\beta, \triangleleft_\beta)$ . Damit ist  $\triangleleft := \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} \triangleleft_\alpha$  eine Wohlordnung auf ganz L.  $\square$

Die Aussage, dass man das gesamte Universum wohlordnen kann, wie wir das gerade für L gezeigt haben, wird mit *global choice* bezeichnet.

Um GCH in L nachzuweisen, benötigen wir

**Lemma 5.11.** *Sei  $\kappa$  eine reguläre Kardinalzahl  $> \omega$ . Dann ist  $L_\kappa$  ein Modell von ZF ohne das Potenzmengenaxiom.*

*Beweis.* Jede unendliche Kardinalzahl ist Limesordinalzahl. Der Beweis von Nullmengen-, Extensionalitäts-, Fundierungs-, Paarmengen- und Vereinigungsaxiom in  $L$  geht auch für  $L_\alpha$  durch, wenn  $\alpha$  eine Limesordinalzahl ist. Wir zeigen das Aussonderungsaxiom in  $L_\kappa$ . Sei  $a \in L_\kappa$ ,  $\phi(x, y_1, \dots, y_n)$  eine Formel und  $b_1, \dots, b_n \in L_\kappa$ . Da  $\kappa$  eine Limesordinalzahl ist, existiert ein  $\alpha < \kappa$  mit  $a, b_1, \dots, b_n \in L_\alpha$ .

Wir machen jetzt den Beweis des Reflexionsprinzips in  $L_\kappa$  nach, um zu zeigen, dass ein  $\beta < \kappa$  existiert, so dass  $\phi(x, y_1, \dots, y_n)$  in  $L_\kappa$  absolut über  $L_\beta$  ist. Setze  $\beta_0 := \alpha$ . Angenommen, für  $n \in \omega$  kennen wir bereits  $\beta_n \in \kappa$ . Wähle  $\beta_{n+1} \in \kappa$ , so dass für jede Teilformel der Form  $\exists z \psi(z, z_1, \dots, z_m)$  von  $\phi$  folgendes gilt: Für alle  $c_1, \dots, c_m \in L_{\beta_n}$  mit  $\exists z \in L_\kappa \psi^{L_\kappa}(z, c_1, \dots, c_m)$  gibt es ein  $c \in L_{\beta_{n+1}}$  mit  $\psi^{L_\kappa}(c, c_1, \dots, c_m)$ . Das geht, da für alle  $\gamma < \kappa$  die Mächtigkeit von  $L_\gamma$  echt kleiner ist als  $\kappa$ .

Da  $\kappa$  regulär ist und  $> \omega$ , ist  $\beta := \sup_{n \in \omega} \beta_n < \kappa$ . Wie im Beweis des Reflexionsprinzips sieht man, dass  $\phi(x, y_1, \dots, y_n)$  in  $L_\kappa$  absolut ist über  $L_\beta$ .

Damit ist

$$\{x \in a : \phi^{L_\kappa}(x, b_1, \dots, b_n)\} = \{x \in a : \phi^{L_\beta}(x, b_1, \dots, b_n)\}.$$

Die Menge auf der rechten Seite der Gleichung ist aber eine definierbare Teilmenge von  $L_\beta$ , also ein Element von  $L_{\beta+1}$  und damit von  $L_\kappa$ . Das zeigt das Aussonderungsaxiom in  $L_\kappa$ .

Es bleibt, das Ersetzungsaxiom nachzurechnen. Sei  $F$  eine Funktion auf  $L_\kappa$  und  $a \in L_\kappa$ . Wir suchen eine Obermenge von  $F[a]$  in  $L_\kappa$ . Sei  $\alpha < \kappa$  so, dass  $a \in L_\alpha$  gilt. Dann ist  $a \subseteq L_\alpha$  und damit  $|a| \leq |L_\alpha| = |\alpha| < \kappa$ . Wegen der Regularität von  $\kappa$  ist  $\sup((\rho \circ F)[a]) < \kappa$ . Setze  $\beta := \sup((\rho \circ F)[a]) + 1$ . Dann gilt  $F[a] \subseteq L_\beta \in L_\kappa$ .  $\square$

**Satz 5.12.**  *$V = L$  impliziert GCH.*

*Beweis.* Angenommen  $V = L$ . Sei  $\kappa$  eine unendliche Kardinalzahl. Wir zeigen  $\mathcal{P}(\kappa) \subseteq L_{\kappa^+}$ . Wegen  $|L_{\kappa^+}| = \kappa^+$  folgt daraus  $2^\kappa = \kappa^+$ .

Sei also  $A \subseteq \kappa$ . Wähle eine reguläre Kardinalzahl  $\lambda > \kappa$  mit  $A \in L_\lambda$ . Sei  $M$  ein elementares Submodell von  $L_\lambda$  mit  $L_\kappa \cup \{A\} \subseteq M$  und  $|M| = \kappa$ .  $M$  existiert nach dem Satz von Löwenheim-Skolem. Da  $M$  das Extensionalitätsaxiom erfüllt, existieren eine transitive Menge  $T$  und ein Isomorphismus  $\mu : (M, \in) \rightarrow (T, \in)$ , der Mostowski-Kollaps von  $M$ .

Da  $L_\kappa$  transitiv ist und  $A$  eine Teilmenge von  $L_\kappa$ , ist auch  $L_\kappa \cup \{A\}$  transitiv. Wegen der Eindeutigkeit des Mostowski-Kollaps' ist  $\mu$  auf  $L_\kappa \cup \{A\}$  die Identität. Insbesondere ist  $A \in T$ . Da  $T$  isomorph zu  $M$  ist und da  $M$  ein elementares Submodell von  $L_\lambda$  ist, glaubt  $T$ , die Vereinigung der  $L_\alpha$ ,  $\alpha \in \text{Ord}$ , zu sein. Da  $T$  transitives Modell von ZF ohne das Potenzmengenaxiom ist und wegen der Absolutheit der Funktion  $\alpha \mapsto L_\alpha$  (und wegen der Absolutheit der Ordinalzahlen) über solchen Klassen gilt

$$T = \bigcup_{\alpha \in T \cap \text{Ord}} L_\alpha.$$

Wegen der Transitivität von  $T$  ist  $T \cap \text{Ord}$  aber selbst eine Ordinalzahl  $\beta$ . Damit ist  $T = L_\beta$ . Insbesondere gilt  $A \in L_\beta$ . Wegen  $|T| = \kappa$  ist  $\beta < \kappa^+$ . Das zeigt  $\mathcal{P}(\kappa) \subseteq L_{\kappa^+}$ .  $\square$

## 6. FORCING

Ziel dieses Abschnittes ist es, einen Weg zu finden, das Universum zu vergrößern. Als Mittel zum Zweck dienen dabei sogenannte generische Filter über Halbordnungen.

## 6.1. Halbordnungen, Filter und dichte Mengen.

**Definition 6.1.** Sei  $\mathbb{P}$  eine Menge und  $\leq$  eine zweistellige Relation auf  $\mathbb{P}$ .  $(\mathbb{P}, \leq)$  ist eine *Halbordnung* oder auch eine *partielle Ordnung*, falls gilt:

- (i) (Transitivität)  $\forall x, y, z \in \mathbb{P} (x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z)$
- (ii) (Reflexivität)  $\forall x \in \mathbb{P} (x \leq x)$
- (iii) (Antisymmetrie)  $\forall x, y \in \mathbb{P} (x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y)$

Die Elemente von  $\mathbb{P}$  heißen *Bedingungen*. Für  $p, q \in \mathbb{P}$  mit  $p \leq q$  sagen wir  $p$  *erweitert*  $q$  oder auch  $p$  *ist stärker als*  $q$ . Zwei Bedingungen  $p, q \in \mathbb{P}$  sind *kompatibel*, falls sie eine gemeinsame Erweiterung haben, d.h., falls es eine Bedingung  $r \in \mathbb{P}$  mit  $r \leq p$  und  $r \leq q$  gibt. Sonst heißen  $p$  und  $q$  *inkompatibel*. Im diesem Fall schreibt man  $p \perp q$ . Aus technischen Gründen betrachten wir nur partielle Ordnungen  $\mathbb{P}$ , die ein größtes Element haben. Dieses wird mit  $1$  bezeichnet.

Wenn mehrere Halbordnungen gleichzeitig betrachtet werden, so versieht man  $\leq$ ,  $\perp$  und  $1$  gerne noch mit einem Index, der anzeigt, über welche Halbordnung gerade gesprochen wird. Zum Beispiel wird das größte Element von  $\mathbb{P}$  dann mit  $1_{\mathbb{P}}$  bezeichnet.

Wir betrachten ein paar Beispiele.  $(\mathbb{N}, \leq)$  ist in unserem Sinne keine Halbordnung, weil es kein größtes Element gibt.  $(\mathbb{N}, \geq)$  ist in unserem Sinne eine Halbordnung, aber langweilig, weil je zwei Elemente kompatibel sind.

Sei  $\mathbb{O}$  die Menge aller offenen, nichtleeren Teilmengen von  $\mathbb{R}$ . Dann ist  $(\mathbb{O}, \subseteq)$  eine sehr schöne Halbordnung. Zwei nichtleere, offene Teilmengen von  $\mathbb{R}$  sind in dieser Halbordnung genau dann kompatibel, wenn ihr Durchschnitt nicht leer ist. Das größte Element von  $\mathbb{O}$  ist  $\mathbb{R}$ .

In gewisser Weise dual zu  $\mathbb{O}$  ist die Halbordnung  $\mathbb{M}$  aller messbaren Teilmengen von  $\mathbb{R}$ , deren Maß echt größer als 0 ist. Die Ordnung ist wieder  $\subseteq$ . Zwei Elemente von  $\mathbb{M}$  sind genau dann inkompatibel, wenn ihr Durchschnitt eine Nullmenge ist. Man beachte, dass die Bezeichnungen  $\mathbb{M}$  und  $\mathbb{O}$  keine Standardbezeichnungen sind, sondern nur ad hoc gewählt. In der Literatur betrachtet man diese Halbordnungen üblicherweise in etwas anderer Form. Anstelle von  $\mathbb{O}$  betrachtet man die eng mit  $\mathbb{O}$  zusammenhängende *Cohenalgebra*  $\mathbb{C}$  (bitte nicht mit den komplexen Zahlen verwechseln) und anstelle von  $\mathbb{M}$  die *Maßalgebra*  $\mathbb{B}$ .

Eine weitere, sehr schöne Halbordnung ist

$$\text{Fn}(X, 2) := \{p : p \text{ ist Funktion von einer endlichen Teilmenge von } X \text{ nach } 2\}$$

für eine beliebige Menge  $X$ . Die Ordnung auf  $\text{Fn}(X, 2)$  ist  $\supseteq$ , die umgekehrte mengentheoretische Inklusion. Das größte Element von  $\text{Fn}(X, 2)$  ist die leere Funktion. Zwei Bedingungen  $p, q \in \text{Fn}(X, 2)$  sind genau dann kompatibel, wenn ihre Vereinigung eine Funktion ist. Man kann sich die Elemente von  $\text{Fn}(X, 2)$  als mögliche endliche Approximationen einer Funktion von  $X$  nach  $2$  vorstellen. Die Halbordnung  $\text{Fn}(\omega, 2)$  ist übrigens für unsere Zwecke praktisch dasselbe wie  $\mathbb{O}$  und  $\mathbb{C}$ . (Wir werden später feststellen, warum.)

**Definition 6.2.** Sei  $(\mathbb{P}, \leq)$  eine Halbordnung und  $D \subseteq \mathbb{P}$ . Dann liegt  $D$  *dicht* in  $\mathbb{P}$ , wenn es für alle  $p \in \mathbb{P}$  ein  $q \in D$  mit  $q \leq p$  gibt. Für  $p \in \mathbb{P}$  ist  $D \subseteq \mathbb{P}$  *dicht unterhalb von*  $p$ , wenn es für jedes  $q \leq p$  ein  $r \in D$  mit  $r \leq q$  gibt. Eine Menge  $A \subseteq \mathbb{P}$  ist eine *Antikette*, wenn die Elemente von  $A$  paarweise inkompatibel sind. Eine Menge  $G \subseteq \mathbb{P}$  ist ein *Filter*, falls gilt:



- (i)  $\forall p \in \mathbb{P} \forall q \in G (q \leq p \rightarrow p \in G)$
- (ii)  $\forall p, q \in G \exists r \in G (r \leq p \wedge r \leq q)$

Ist  $\mathcal{D}$  eine Familie dichter Teilmengen von  $\mathbb{P}$  und  $G \subseteq \mathbb{P}$  ein Filter, so heißt  $G$   $\mathcal{D}$ -generisch, falls  $G$  jedes Element von  $\mathcal{D}$  schneidet.

Wie sehen dichte Teilmengen von  $\mathbb{O}$  aus? Ist  $D \subseteq \mathbb{O}$  dicht, so ist  $X := \bigcup D$  eine offene Menge, da  $X$  Vereinigung offener Mengen ist. Die Dichtigkeit von  $D$  bedeutet, dass es für jede nichtleere, offene Menge  $U \subseteq \mathbb{R}$  ein  $V \in D$  mit  $V \subseteq U$  gibt. Da die leere Menge kein Element von  $\mathbb{O}$  ist und damit auch nicht von  $D$ , folgt, dass jede nichtleere, offene Menge  $U \subseteq \mathbb{R}$  die Menge  $X$  schneidet. Also ist  $X$  dicht im topologischen Sinne.

Sei umgekehrt  $X \subseteq \mathbb{R}$  dicht im topologischen Sinne und offen. Setze  $D := \{V \in \mathbb{O} : V \subseteq X\}$ . Wegen der Dichtigkeit von  $X$  gilt  $X \cap U \neq \emptyset$  für jede nichtleere, offene Teilmenge von  $\mathbb{R}$ . Insbesondere ist für alle  $U \in \mathbb{O}$  die Menge  $V := X \cap U$  ein Element von  $D$ , welches  $U$  erweitert (im Halbordnungssinne). Also ist  $D$  dicht in  $\mathbb{O}$ . Beachte, dass die Vereinigung über  $D$  wieder genau die Menge  $X$  ist. Aber nicht jede dichte Teilmenge von  $\mathbb{O}$  ist die Menge aller nichtleeren, offenen Teilmengen einer bestimmten offenen, topologisch dichten Teilmenge von  $\mathbb{R}$ . Sei zum Beispiel  $\varepsilon > 0$  und

$$D_\varepsilon := \{U \in \mathbb{O} : U \text{ ist offenes Intervall mit einer Länge } < \varepsilon\}.$$

Jedes  $D_\varepsilon$  ist dicht in  $\mathbb{O}$  und es gilt  $\bigcup D_\varepsilon = \mathbb{R}$ . Aber offenbar ist  $D_\varepsilon \neq \mathbb{O}$ .

Sei nun  $x$  eine reelle Zahl. Dann ist  $G_x := \{U \in \mathbb{O} : x \in U\}$  ein Filter in  $\mathbb{O}$ , der  $\{D_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ -generisch ist. Ist umgekehrt  $G \subseteq \mathbb{O}$  ein Filter, der  $\{D_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ -generisch ist, so gibt es genau eine reelle Zahl  $x$  mit  $x \in \bigcap_{U \in G} \overline{U}$ . Es gilt jedoch nicht unbedingt  $x \in \bigcap G$ .

**Übung 6.3.** Betrachte die Halbordnung  $\text{Fn}(\omega, 2)$ . Zeige:

- (1) Ist  $G \subseteq \text{Fn}(\omega, 2)$  ein Filter, so ist  $\bigcup G$  eine Funktion.
- (2) Für alle  $n \in \omega$  ist  $D_n := \{p \in \text{Fn}(\omega, 2) : n \in \text{dom}(p)\}$  dicht in  $\text{Fn}(\omega, 2)$ .
- (3) Ist  $G \subset \text{Fn}(\omega, 2)$  ein  $\{D_n : n \in \omega\}$ -generischer Filter, so ist  $\bigcup G$  eine Funktion von  $\omega$  nach 2.
- (4) Für jede Funktion  $f : \omega \rightarrow 2$  ist die Menge  $G_f := \{p \in \text{Fn}(\omega, 2) : p \subseteq f\}$  ein  $\{D_n : n \in \omega\}$ -generischer Filter.

Folgender Satz liefert die Existenz ausreichend generischer Filter und ist in Wirklichkeit eine Variante des Baireschen Kategoriensatzes.

**Satz 6.4.** (Satz von Rasiowa-Sikorsky) Sei  $(\mathbb{P}, \leq)$  eine Halbordnung und  $\mathcal{D}$  eine abzählbare Familie dichter Teilmengen von  $\mathbb{P}$ . Dann existiert ein  $\mathcal{D}$ -generischer Filter  $G \subseteq \mathbb{P}$ .

*Beweis.* Sei  $\{D_n : n \in \omega\}$  eine Aufzählung von  $\mathcal{D}$ . Wähle eine Folge  $(p_n)_{n \in \omega} \in \mathbb{P}$  wie folgt: Die Bedingung  $p_0$  sei ein Element von  $D_0$ . Angenommen für  $n \in \omega$  sei  $p_n$  bereits definiert. Wähle  $p_{n+1} \leq p_n$  mit  $p_{n+1} \in D_{n+1}$ . Das geht, da  $D_{n+1}$  dicht ist.

Setze nun

$$G := \{p \in \mathbb{P} : \exists n \in \omega (p_n \leq p)\}.$$

Aus der Definition von  $G$  folgt sofort, dass Bedingung (i) in Definition 6.2 erfüllt ist. Für (ii) seien  $p, q \in G$ . Dann existieren  $n, m \in \omega$  mit  $p_n \leq p$  und  $p_m \leq q$ . O.B.d.A. sei  $n \leq m$ . Da die  $p_i$  eine fallende Folge bilden, gilt  $p_m \leq p$  und  $p_m \leq q$ . Außerdem ist  $p_m \in G$ . Das zeigt Bedingung (ii) in Definition 6.2.

Für die Generizität von  $G$  sei  $n \in \omega$ . Offenbar gilt  $p_n \in G$ . Nach Wahl von  $p_n$  ist  $p_n \in D_n$  und damit  $G \cap D_n \neq \emptyset$ .  $\square$

**Übung 6.5.** Seien  $(A, \leq_A)$  und  $(B, \leq_B)$  abzählbar unendliche, dichte lineare Ordnungen ohne Endpunkte. Zeige, dass  $A$  und  $B$  isomorph sind.

Anleitung: Benutze den Satz von Rasiowa und Sikorski. Betrachte dazu die Halbordnung  $\mathbb{P}$  der endlichen partiellen Isomorphismen zwischen  $A$  und  $B$ , geordnet durch umgekehrte Inklusion. Finde eine abzählbare Familie  $\mathcal{D}$  dichter Teilmengen von  $\mathbb{P}$ , so dass für jeden  $\mathcal{D}$ -generischen Filter  $G \subseteq \mathbb{P}$  die Funktion  $\bigcup G$  ein Isomorphismus zwischen  $A$  und  $B$  ist. Man orientiere sich insgesamt an Übung 6.3.

**6.2. Generische Erweiterungen.** Um die Konsistenz von  $\text{ZFC} + \neg\text{CH}$  zu zeigen, genügt es nach dem Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik zu zeigen, dass jede endliche Teilmenge von  $\text{ZFC} + \neg\text{CH}$  widerspruchsfrei ist. Natürlich müssen wir voraussetzen, dass  $\text{ZFC}$  selbst konsistent ist. Wir stellen uns vor, dass wir in einem Universum  $V$  leben, das alle Axiome von  $\text{ZFC}$  erfüllt. Sei  $F$  eine endliche Menge von Aussagen in  $\text{ZFC} + \neg\text{CH}$ . Wir zeigen, dass es dann eine endliche Menge  $F'$  von Axiomen in  $\text{ZFC}$  gibt, so dass wir aus einem abzählbaren, transitiven Modell  $M$  von  $F'$  ein abzählbares, transitives Modell  $N$  von  $F$  konstruieren können. Die Konstruktion von  $N$  aus  $M$  hängt dabei nicht von der Menge  $F$  ab. Wir werden einfach so tun, als wäre  $M$  ein abzählbares transitives Modell von ganz  $\text{ZFC}$ . Dann konstruieren wir die Menge  $N$ . Wenn wir nun für ein Axiom  $\phi$  von  $\text{ZFC} + \neg\text{CH}$  nachweisen wollen, dass  $\phi$  in  $N$  gilt, so genügt es zu wissen, dass  $M$  eine gewisse endliche Menge von Axiomen in  $\text{ZFC}$  erfüllt.

Um endlich viele Axiome von  $\text{ZFC} + \neg\text{CH}$  in  $N$  nachzuweisen, genügt es also zu wissen, dass  $M$  eine gewisse endliche Menge von Axiomen von  $\text{ZFC}$  erfüllt. Und die Existenz abzählbarer transitiver Modelle von beliebigen endlichen Teilmengen von  $\text{ZFC}$  folgt aus dem Reflexionsprinzip, dem Satz von Löwenheim-Skolem, und der Existenz des Mostowski-Kollaps' von extensionalen, fundierten Strukturen.

Damit können wir, auch wenn wir in  $\text{ZFC}$  nicht zeigen können, dass es abzählbare transitive Modelle von  $\text{ZFC}$  gibt, doch so tun, als gäbe es solche. (In Wirklichkeit haben wir oben aus der Konsistenz von  $\text{ZFC}$  die Konsistenz folgender Menge von Aussagen abgeleitet: Wir führen in die Sprache der Mengenlehre noch ein Konstantensymbol  $M$  ein. Unsere Menge von Aussagen sei  $\text{ZFC}$  zusammen mit  $\text{ZFC}^M$ , also allen Relativierungen von  $\text{ZFC}$ -Axiomen nach  $M$ , und der Aussage " $M$  ist abzählbar und transitiv".)

Sei nun  $M$  ein abzählbares transitives Modell von  $\text{ZFC}$  und  $(\mathbb{P}, \leq)$  eine Halbordnung in  $M$ . Für jedes  $D \in M$  ist die Eigenschaft, dichte Teilmenge von  $\mathbb{P}$  zu sein, absolut über  $M$ , da die entsprechende Formel  $\Delta_0$  ist. Nach Satz 6.4 existiert ein Filter  $G \subseteq \mathbb{P}$ , der alle dichten Teilmengen von  $\mathbb{P}$  schneidet, die Elemente von  $M$  sind. So ein Filter heißt  $\mathbb{P}$ -generisch über  $M$ . (Man beachte die leichte Inkonsistenz mit der Definition eines  $\mathcal{D}$ -generischen Filters für eine Familie  $\mathcal{D}$  von dichten Teilmengen von  $\mathbb{P}$ .)

**Übung 6.6.** Sei  $(\mathbb{P}, \leq) \in M$  eine Halbordnung, so dass für alle  $p \in \mathbb{P}$  zwei Elemente  $q_0, q_1 \leq p$  mit  $q_0 \perp q_1$  existieren.  $G$  sei  $\mathbb{P}$ -generisch über  $M$ . Zeige  $G \notin M$ .

Anleitung: Angenommen  $G \in M$ . Finde eine dichte Menge  $D \in M$ , die  $G$  nicht schneidet.

Wir wollen nun die *generische Erweiterung*  $M[G]$  von  $M$  konstruieren.  $M[G]$  wird folgende Eigenschaften haben:

- (i)  $M[G]$  ist ein abzählbares, transitives Modell von  $\text{ZFC}$ ,
- (ii)  $M \subseteq M[G]$ ,  $G \in M[G]$ ,  $\text{Ord} \cap M = \text{Ord} \cap M[G]$  und
- (iii)  $M[G]$  ist das kleinste Modell von  $\text{ZFC}$ , das  $M$  umfasst und  $G$  enthält.

Wenn die Halbordnung  $\mathbb{P}$  geschickt gewählt ist, wird  $M[G]$  auch  $\neg\text{CH}$  erfüllen.

Um  $M[G]$  zu definieren, benötigen wir das Konzept der  $\mathbb{P}$ -Namen.

**Definition 6.7.** Eine Menge  $\tau$  ist ein  $\mathbb{P}$ -Name, wenn  $\tau$  eine Menge von Paaren ist und für jedes Paar  $(\sigma, p) \in \tau$  gilt:  $p \in \mathbb{P}$  und  $\sigma$  ist ein  $\mathbb{P}$ -Name.  $M^{\mathbb{P}}$  sei die Klasse aller  $\mathbb{P}$ -Namen in  $M$ .

Beachte, dass die Definitionen von  $\mathbb{P}$ -Namen rekursiv ist, wobei die Rekursionsvorschrift absolut über  $M$  ist. Ein Element von  $M$  ist also genau dann ein  $\mathbb{P}$ -Name in  $M$ , wenn es  $\mathbb{P}$ -Name in  $V$  ist.

Die Elemente von  $M^{\mathbb{P}}$  sollte man sich als Namen für Elemente von  $M[G]$  vorstellen. Um aus einem Namen das entsprechende Element von  $M[G]$  zu machen, benutzt man  $G$ .

**Definition 6.8.** Sei  $G$  ein  $\mathbb{P}$ -generischer Filter über  $M$ . Für  $\tau \in M^{\mathbb{P}}$  sei

$$\tau_G := \{\sigma_G : \exists p \in G((\sigma, p) \in \tau)\}$$

die Auswertung von  $\tau$  in Bezug auf  $G$ . Weiter sei

$$M[G] := \{\tau_G : \tau \in M^{\mathbb{P}}\}.$$

Man beachte folgendes:  $G$  ist üblicherweise (d.h., außer in trivialen Fällen) kein Element von  $M$ . Damit brauchen auch die  $\tau_G$ ,  $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ , keine Elemente von  $M$  zu sein.

Die Absolutheit der Definition der  $\tau_G$  liefert sofort

**Lemma 6.9.** *Ist  $N$  transitives Modell von ZFC mit  $M \subseteq N$  und  $G \in N$ , so gilt  $M[G] \subseteq N$ .*

Um  $M \subseteq M[G]$  zu zeigen, müssen wir für jedes  $x \in M$  einen Namen  $\check{x}$  angeben, für den  $x = \check{x}_G$  gilt.

**Definition 6.10.** Für alle  $x$  sei  $\check{x} := \{(\check{y}, 1_{\mathbb{P}}) : y \in x\}$  der *kanonische Name* von  $x$ .

**Lemma 6.11.** *Für alle  $x \in M$  ist  $\check{x}_G = x$ .*

*Beweis.* Induktion über den Rang von  $x$ . Wir benutzen hierbei  $1_{\mathbb{P}} \in G$ . □

Um  $G \in M[G]$  zu zeigen, müssen wir einen Namen für  $G$  angeben.

**Definition 6.12.** Setze  $\Gamma := \{(\check{p}, p) : p \in \mathbb{P}\}$ .

**Lemma 6.13.**  $\Gamma_G = G$ .

*Beweis.*  $\Gamma_G = \{\check{p}_G : p \in G\} = \{p : p \in G\} = G$ . □

Wir sammeln ein paar Eigenschaften von  $M[G]$ .

**Lemma 6.14.** *a)  $M[G]$  ist transitiv.*

*b) Für alle  $\tau \in M^{\mathbb{P}}$  ist  $\text{rk}(\tau_G) \leq \text{rk}(\tau)$ .*

*c)  $\text{Ord} \cap M = \text{Ord} \cap M[G]$ .*

*Beweis.* Für a) sei  $y \in M[G]$  und  $x \in y$ . Dann existiert ein  $\tau \in M^{\mathbb{P}}$  mit  $y = \tau_G$ . Wegen  $x \in y$  existiert ein Paar  $(\sigma, p) \in \tau$  mit  $p \in G$  und  $\sigma_G = x$ . Offenbar ist  $x \in M[G]$ .

Induktion über die Relation  $\in$  liefert b). In c) folgt  $\text{Ord} \cap M \subseteq \text{Ord} \cap M[G]$  sofort aus  $M \subseteq M[G]$ . Sei nun  $\alpha \in \text{Ord} \cap M[G]$ . Wähle  $\tau \in M^{\mathbb{P}}$  mit  $\tau_G = \alpha$ . Nach b) ist  $\alpha = \text{rk}(\alpha) \leq \text{rk}(\tau) \in M$ . Wegen der Transitivität von  $M$  folgt daraus  $\alpha \in M$ . □

Der einfachere Teil des Nachweises von ZFC in  $M[G]$  ist

**Lemma 6.15.**  *$M[G]$  erfüllt das Fundierungs-, Extensionalitäts-, Paarmengen-, und Vereinigungsaxiom.*

*Beweis.* Das Extensionalitätsaxiom folgt aus der Transitivität von  $M[G]$ . Das Fundierungsaxiom folgt aus der Fundiertheit von  $\in$  in  $V$ . Für das Paarmengenaxiom seien  $x, y \in M[G]$ . Wähle  $\sigma, \tau \in M^{\mathbb{P}}$  mit  $\sigma_G = x$  und  $\tau_G = y$ . Setze  $\rho := \{(\sigma, 1_{\mathbb{P}}), (\tau, 1_{\mathbb{P}})\}$ . Offenbar gilt  $\rho \in M^{\mathbb{P}}$  sowie  $\rho_G = \{x, y\}$ .

Für das Vereinigungsaxiom sei  $F \in M[G]$ . Wähle  $\tau \in M^{\mathbb{P}}$  mit  $\tau_G = F$ . Setze

$$\sigma := \{(\rho, 1_{\mathbb{P}}) : \exists p, q \in \mathbb{P} \exists \pi \in M^{\mathbb{P}} ((\pi, p) \in \tau \wedge (\rho, q) \in \pi)\}.$$

Offenbar ist  $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ .

Wir zeigen  $\bigcup F \subseteq \sigma_G$ . Sei  $x \in \bigcup F$ . Dann existiert  $y \in F$  mit  $x \in y$ . D.h., es gibt  $\pi, \rho \in M^{\mathbb{P}}$  und  $p, q \in G$  mit  $\pi_G = y$ ,  $\rho_G = x$ ,  $(\rho, q) \in \pi$  und  $(\pi, p) \in \tau$ . Nach Definition von  $\sigma$  ist  $(\rho, 1_{\mathbb{P}}) \in \sigma$  und damit  $x \in \sigma_G$ . Das zeigt das Vereinigungsaxiom in  $M[G]$ .  $\square$

Die technischen Hilfsmittel, die benötigt werden, um den Rest von ZFC in  $M[G]$  nachzuweisen, werden im nächsten Abschnitt bereitgestellt. Zunächst stellen wir noch ein paar Tatsachen über generische Filter fest.

**Definition 6.16.** Eine Teilmenge  $D$  einer Halbordnung  $\mathbb{P}$  heißt *prädicht*, wenn die Menge  $\{p \in \mathbb{P} : \exists q \in D(p \leq q)\}$  dicht ist.  $D \subseteq \mathbb{P}$  heißt *prädicht unterhalb von*  $p \in \mathbb{P}$ , falls  $\{r \in \mathbb{P} : \exists q \in D(r \leq q)\}$  dicht unterhalb von  $p$  ist. Eine Menge  $O \subseteq \mathbb{P}$  heißt *offen*, falls für alle  $p \in \mathbb{P}$  und alle  $q \in O$  mit  $p \leq q$  gilt:  $p \in O$ .

Ein gutes Beispiel für prädichte Mengen sind maximale Antiketten (maximal bezüglich  $\subseteq$ ). Ist  $A \subseteq \mathbb{P}$  eine Antikette, so ist  $A$  offenbar genau dann maximal, wenn für alle  $p \in \mathbb{P}$  ein  $q \in A$  existiert, so dass  $p$  und  $q$  kompatibel sind. Ist also  $A$  maximale Antikette in  $\mathbb{P}$ , so ist die Menge  $\{p \in \mathbb{P} : \exists q \in A(p \leq q)\}$  eine dichte, offene Teilmenge von  $\mathbb{P}$  und damit  $A$  prädicht.

Umgekehrt enthält jede dichte Teilmenge von  $\mathbb{P}$  eine maximale Antikette: Sei  $D \subseteq \mathbb{P}$  dicht. Wähle  $A \subseteq D$  maximal mit der Eigenschaft, dass je zwei Elemente von  $A$  inkompatibel sind. Dann ist  $A$  eine maximale Antikette in  $\mathbb{P}$ . Falls nicht, so existiert ein  $p \in \mathbb{P}$ , das zu allen Elementen von  $A$  inkompatibel ist. Ist  $q \leq p$  und  $q \in D$ , so ist auch  $q$  zu allen Elementen von  $A$  inkompatibel, ein Widerspruch zur Maximalität von  $A$  in  $D$ .

**Lemma 6.17.** Sei  $M$  abzählbares, transitives Modell von ZFC,  $\mathbb{P} \in M$  eine Halbordnung und  $G \subseteq \mathbb{P}$  ein Filter.

a) Ist  $G$  generisch über  $M$  und  $p \in \mathbb{P}$ , so gilt

$$p \in G \leftrightarrow \forall q \in G(p \not\leq q).$$

b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (1)  $G$  ist generisch über  $M$ .
- (2)  $G$  schneidet jede prädichte Menge  $D \subseteq \mathbb{P}$  mit  $D \in M$ .
- (3)  $G$  schneidet jede dichte, offene Menge  $D \subseteq \mathbb{P}$  mit  $D \in M$ .

c) Sei  $p \in \mathbb{G}$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1)  $G$  ist generisch über  $M$ .
- (2)  $G$  schneidet jede Menge  $D \subseteq \mathbb{P}$  mit  $D \in M$ , die dicht unterhalb von  $p$  ist.
- (3)  $G$  schneidet jede Menge  $D \subseteq \mathbb{P}$  mit  $D \in M$ , die prädicht unterhalb von  $p$  ist.

*Beweis.* a) Ist  $p \in G$ , so ist  $p$  kompatibel zu allen Elementen von  $G$ . Für die andere Richtung sei  $p$  kompatibel mit allen Elementen von  $G$ . Die Menge  $D := \{q \in \mathbb{P} : q \leq p \vee q \perp p\}$  ist dicht in  $\mathbb{P}$ . Sei nämlich  $r \in \mathbb{P}$ . Angenommen,  $r \not\leq p$ . Dann existiert  $q \in \mathbb{P}$  mit  $q \leq r, p$ . Insbesondere ist  $q \leq r$  und  $q \in D$ . Das zeigt die Dichtheit von  $D$ . Offenbar gilt  $D \in M$ . Wegen der Generizität von  $G$  ist  $D \cap G \neq \emptyset$ .

Sei  $q \in G \cap D$ . Da  $p$  mit  $q$  kompatibel ist, gilt nach der Definition von  $D$ :  $q \leq p$ . Es folgt  $p \in G$ .

b) Offenbar gilt  $(2) \Rightarrow (1) \Rightarrow (3)$ . Es bleibt  $(3) \Rightarrow (2)$  zu zeigen. Angenommen,  $G$  schneidet jede dichte, offene Teilmenge von  $\mathbb{P}$ , die Element von  $M$  ist. Sei  $D \subseteq \mathbb{P}$  prädicht und ein Element von  $M$ . Dann ist  $D' := \{p \in \mathbb{P} : \exists q \in D(p \leq q)\}$  dicht, offen und ein Element von  $M$ . Nach Annahme existiert ein  $p \in G \cap D'$ . Nach der Definition von  $D'$  existiert ein  $q \in D$  mit  $p \leq q$ . Da  $G$  Filter ist, gilt  $q \in G$ . Also ist  $G \cap D \neq \emptyset$ .

c) Die Äquivalenz von (2) und (3) sieht man wie die Äquivalenz der entsprechenden Aussagen in b). Für  $(1) \Rightarrow (2)$  sei  $G$  generisch über  $M$  und  $D \in M$  dicht unterhalb von  $p$ . O.B.d.A. können wir annehmen, dass  $D$  nur Elemente unterhalb von  $p$  enthält. Wie im Beweis von a) sieht man, dass die Menge  $D' := \{q \in \mathbb{P} : q \perp p\} \cup D$  dicht in  $\mathbb{P}$  ist. Offenbar ist  $D' \in M$ . Wegen der Generizität von  $G$  existiert  $q \in D' \cap G$ . Wegen  $p \in G$  ist  $p$  kompatibel mit  $q$ . Also ist  $q \in D$  und damit  $G \cap D \neq \emptyset$ .

Für  $(2) \Rightarrow (1)$  genügt es zu bemerken, dass jede dichte Teilmenge von  $\mathbb{P}$  auch dicht unterhalb von  $p$  ist.  $\square$

**6.3. Die Forcing-Relation.** Wir brauchen eine Methode, Gültigkeit von Formeln in  $M[G]$  in gewissem Maße schon in  $M$  zu beschreiben. Das leistet die Forcing-Relation  $\Vdash$ . Auf der linken Seite der Relation stehen dabei Bedingungen aus  $\mathbb{P}$  und auf der rechten Seite Formeln aus der *Forcing-Sprache*. Die Forcing-Sprache besteht aus allen Zeichenfolgen der Form  $\phi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ , wobei  $\tau_1, \dots, \tau_n$   $\mathbb{P}$ -Namen sind,  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  eine Formel in der Sprache der Mengenlehre mit den freien Variablen  $x_1, \dots, x_n$  ist und  $\phi(\tau_1, \dots, \tau_n)$  durch Substitution der Variablen  $x_1, \dots, x_n$  durch die Namen  $\tau_1, \dots, \tau_n$  entsteht.

**Definition 6.18.** Seien  $\tau_1, \dots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$ ,  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  eine Formel und  $p \in \mathbb{P}$ . Dann setzt man

$$p \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_n)$$

genau dann, wenn für alle  $\mathbb{P}$ -generischen Filter  $G$  über  $M$  mit  $p \in G$  gilt:

$$M[G] \models \phi((\tau_1)_G, \dots, (\tau_n)_G)$$

Das Zeichen  $\Vdash$  wird „erzwingt“ gelesen.

Überraschender Weise lässt sich die Relation  $\Vdash$  in  $M$  definieren, also ohne die Kenntnis irgendwelcher generischer Filter über  $M$ . Ziel dieses Abschnittes ist es, genau das zu zeigen.

**Definition 6.19.** Für eine Formel  $\phi(\tau_1, \dots, \tau_n)$  aus der Forcing-Sprache von  $M$  sei

$$\llbracket \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket := \{p \in \mathbb{P} : p \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_n)\}$$

der *Wahrheitswert* von  $\phi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ .

Man beachte, dass diese Definition der Wahrheitswerte keine Standard-Definition ist. Üblicherweise definiert man Wahrheitswerte nur, wenn die Halbordnung  $\mathbb{P}$  von der Form  $B \setminus \{0\}$  ist, wobei  $B$  eine vollständige Boolesche Algebra ist und  $0$  das kleinste Element von  $B$ . In diesem Falle setzt man

$$\llbracket \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket := \sup\{a \in B \setminus \{0\} : a \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_n)\}.$$

Da Suprema in allgemeinen Halbordnungen  $\mathbb{P}$  jedoch nicht existieren müssen, begnügen wir uns mit der oben angegebenen, etwas weniger eleganten Definition von  $\llbracket \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket$ .

Wir halten ein paar elementare Eigenschaften von Wahrheitswerten fest.

**Lemma 6.20.** Sei  $\phi(\tau_1, \dots, \tau_n)$  eine Formel aus der Forcing-Sprache von  $M$ . Dann ist  $\llbracket \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{P}$ . Ist  $p \in \mathbb{P}$  und  $\llbracket \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket$  prädicht unterhalb von  $p$ , so ist  $p \in \llbracket \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket$ .

*Beweis.* Angenommen  $p \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ . Sei  $q \leq p$ . Dann gilt  $p \in G$  für jeden Filter  $G$  mit  $q \in G$ . Insbesondere gilt  $q \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ . Das zeigt die Offenheit von  $\llbracket \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket$ .

Sei nun  $\llbracket \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket$  prädicht unterhalb von  $p \in \mathbb{P}$  und  $G$   $\mathbb{P}$ -generisch über  $M$  mit  $p \in G$ . Wegen der Offenheit von  $\llbracket \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket$  ist bereits die Menge

$$D = \{q \in \mathbb{P} : q \leq p \wedge q \in \llbracket \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket\}$$

prädicht unterhalb von  $p$ . Nach Lemma 6.17 c) existiert  $q \in G \cap D$ . Wegen  $q \in \llbracket \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket$  gilt

$$M[G] \models \phi((\tau_1)_G, \dots, (\tau_n)_G).$$

Da  $G$  beliebig war mit  $p \in G$ , folgt daraus  $p \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ , also  $p \in \llbracket \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket$ .  $\square$

Um zu zeigen, dass  $\Vdash$  in  $M$  definierbar ist, genügt es natürlich nachzuweisen, dass die Abbildung  $\phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \mapsto \llbracket \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket$  in  $M$  definierbar ist. Dazu definieren wir für alle Formeln  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  und alle  $\tau_1, \dots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$  eine Approximation  $\llbracket \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket^*$  von  $\llbracket \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket$  und rechnen nach, dass die beiden Mengen gleich sind.

In den folgenden Definitionen und Bemerkungen tun wir so, als ob wir in  $M$  leben.

**Definition 6.21.** Für  $A \subseteq \mathbb{P}$  sei

$$\text{reg}(A) := \{p \in \mathbb{P} : A \text{ ist prädict unterhalb von } p\}$$

die *Regularisierung* von  $A$ . Wir nennen  $A \subseteq \mathbb{P}$  *regulär offen*, falls  $A = \text{reg}(A)$  gilt. Für  $A, B \subseteq \mathbb{P}$  sei

$$A + B := \text{reg}(A \cup B), \quad A \cdot B := \text{reg}(A) \cap \text{reg}(B) \quad \text{und} \quad -A := \{p \in \mathbb{P} : \forall q \in A (p \perp q)\}.$$

Für  $p \in \mathbb{P}$  und  $A \subseteq \mathbb{P}$  sei  $A \cdot p := p \cdot A := A \cdot \text{reg}(\{p\})$  und  $-p := -\text{reg}(\{p\})$ . Für  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{P})$  sei

$$\sum \mathcal{F} := \text{reg}\left(\bigcup \mathcal{F}\right) \quad \text{und} \quad \prod \mathcal{F} := \bigcap \{\text{reg}(A) : A \in \mathcal{F}\}.$$

Beachte, dass  $\text{reg}(A)$  offen ist und alle  $p \in \mathbb{P}$  enthält, unter denen  $\text{reg}(A)$  prädict ist. Die Menge  $\text{reg}(A)$  ist die kleinste Obermenge von  $A$  mit diesen Eigenschaften. Alle Teilmengen von  $\mathbb{P}$ , die durch Anwendung einer der oben definierten Operationen entstehen, sind regulär offen. Die Menge aller regulär offenen Teilmengen von  $\mathbb{P}$  wird mit  $\text{ro}(\mathbb{P})$  bezeichnet und ist mit den oben definierten Operationen eine vollständige Boolesche Algebra, die *Vervollständigung* von  $\mathbb{P}$ . Mittels der Abbildung  $e : \mathbb{P} \rightarrow \text{ro}(\mathbb{P}); p \mapsto \text{reg}(\{p\})$  lässt sich jedes Element von  $\mathbb{P}$  als Element von  $\text{ro}(\mathbb{P})$  auffassen.

**Übung 6.22.** a) Zeige, dass das Bild von  $e$  in  $\text{ro}(\mathbb{P})$  dicht liegt. Dabei heißt eine Teilmenge  $D$  einer Booleschen Algebra  $A$  dicht in  $A$ , wenn  $D$  in  $A \setminus \{0\}$  dicht ist, wobei  $0$  das kleinste Element von  $A$  bezeichnet.

b) Seien  $p, q \in \mathbb{P}$ . Zeige, dass  $e(p) = e(q)$  genau dann gilt, wenn für alle  $r \in \mathbb{P}$  gilt:  $r \perp p \Leftrightarrow r \perp q$ .

c) Die Halbordnung  $\mathbb{P}$  heißt *separativ*, wenn für alle  $p, q \in \mathbb{P}$  mit  $p \not\leq q$  ein  $r \leq p$  mit  $r \perp q$  existiert. Zeige, dass  $e$  genau dann injektiv ist, wenn  $\mathbb{P}$  separativ ist.

**Definition 6.23.** Seien  $\sigma$  und  $\tau$   $\mathbb{P}$ -Namen. Setze

$$\llbracket \sigma \in \tau \rrbracket^* := \sum \{ \llbracket \sigma = \rho \rrbracket^* \cdot p : (\rho, p) \in \tau \},$$

$$\llbracket \sigma \subseteq \tau \rrbracket^* := \prod \{ -p + \llbracket \rho \in \tau \rrbracket^* : (\rho, p) \in \sigma \}$$

und

$$\llbracket \sigma = \tau \rrbracket^* := \llbracket \sigma \subseteq \tau \rrbracket^* \cdot \llbracket \tau \subseteq \sigma \rrbracket^*.$$

Seien  $\phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  und  $\psi(\tau_1, \dots, \tau_m)$  Formeln in der Forcingsprache. Setze

$$\llbracket \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \wedge \psi(\tau_1, \dots, \tau_m) \rrbracket^* := \llbracket \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \rrbracket^* \cdot \llbracket \psi(\tau_1, \dots, \tau_m) \rrbracket^*,$$

$$\llbracket \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \vee \psi(\tau_1, \dots, \tau_m) \rrbracket^* := \llbracket \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \rrbracket^* + \llbracket \psi(\tau_1, \dots, \tau_m) \rrbracket^*$$

und

$$\llbracket \neg \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \rrbracket^* := -\llbracket \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \rrbracket^*.$$

Sei  $\phi(x, y_1, \dots, y_n)$  eine Formel in der Sprache der Mengenlehre und seien  $\tau_1, \dots, \tau_n$   $\mathbb{P}$ -Namen. Setze

$$\llbracket \exists x \phi(x, \tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket^* := \sum \{ \llbracket \phi(\sigma, \tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket^* : \sigma \text{ ist ein } \mathbb{P}\text{-Name} \}$$

und

$$\llbracket \forall x \phi(x, \tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket^* := \prod \{ \llbracket \phi(\sigma, \tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket^* : \sigma \text{ ist ein } \mathbb{P}\text{-Name} \}.$$

Man beachte die subtile Rekursion in dieser Definition. Für  $\mathbb{P}$ -Namen  $\sigma_0, \sigma_1, \tau_0, \tau_1$  sei  $(\sigma_0, \tau_0)R(\sigma_1, \tau_1)$ , falls  $\text{rk}(\sigma_0) < \text{rk}(\sigma_1)$  und  $\text{rk}(\tau_0) \leq \text{rk}(\tau_1)$  oder falls  $\text{rk}(\sigma_0) \leq \text{rk}(\sigma_1)$  und  $\text{rk}(\tau_0) < \text{rk}(\tau_1)$ . Die Relation  $R$  ist fundiert.  $\llbracket \sigma = \tau \rrbracket^*$ ,  $\llbracket \sigma \in \tau \rrbracket^*$  und  $\llbracket \sigma \subseteq \tau \rrbracket^*$  werden durch Rekursion über  $R$  definiert, wobei man zuerst  $\llbracket \sigma \subseteq \tau \rrbracket^*$  und  $\llbracket \tau \subseteq \sigma \rrbracket^*$  definiert und dann  $\llbracket \sigma = \tau \rrbracket^*$ . Der Rest der Definition 6.23 ist eine gewöhnliche Rekursion über den Formelaufbau. Wir betrachten dabei auch  $\sigma \subseteq \tau$  als atomare Formel.

**Lemma 6.24.** *Sei  $\phi(\tau_1, \dots, \tau_n)$  eine Formel in der Forcingsprache von  $M$  und  $G$   $\mathbb{P}$ -generisch über  $M$ . Dann gilt  $\phi((\tau_1)_G, \dots, (\tau_n)_G)$  in  $M[G]$  genau dann, wenn  $G \cap \llbracket \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket^* \neq \emptyset$  ist.*

*Beweis.* Wir beweisen das Lemma mittels Induktion über den Formelaufbau. Beachte dabei, dass Formel in der Forcingsprache von  $M$  einfach Formeln in der Forcingsprache sind, bei denen die eingesetzten Namen Elemente von  $M$  sind.

Wir betrachten zunächst atomare Formeln. Um das Lemma für atomare Formeln zu zeigen, benutzen wir Induktion über dieselbe fundierte Relation  $R$ , mit deren Hilfe wir  $\llbracket \cdot \rrbracket^*$  für atomare Formeln definiert haben.

Seien  $\sigma, \tau \in M^{\mathbb{P}}$ . Angenommen,  $\sigma_G \in \tau_G$ . Dann existieren  $\rho \in M^{\mathbb{P}}$  und  $p \in G$  mit  $(\rho, p) \in \tau$  und  $\sigma_G = \rho_G$ . Es gilt  $(\sigma, \rho)R(\sigma, \tau)$ . Also gibt es nach Induktionsvoraussetzung ein  $q \in \llbracket \sigma = \rho \rrbracket^* \cap G$ . Wegen  $p, q \in G$  existiert  $r \in G$  mit  $r \leq p, q$ . Es gilt  $r \in \llbracket \sigma = \rho \rrbracket^* \cdot p \subseteq \llbracket \sigma \in \tau \rrbracket^*$ .

Angenommen,  $G$  schneidet die Menge

$$\llbracket \sigma \in \rho \rrbracket^* = \sum \{ \llbracket \sigma = \rho \rrbracket^* \cdot p : (\rho, p) \in \tau \}.$$

Nach Definition von  $\sum$  ist  $\bigcup \{ \llbracket \sigma = \rho \rrbracket^* \cdot p : (\rho, p) \in \tau \}$  prädicht unterhalb jedes Elements von  $\llbracket \sigma \in \rho \rrbracket^*$ . Wegen der Generizität von  $G$  existiert also  $(\rho, p) \in \tau$  mit  $G \cap \llbracket \sigma = \rho \rrbracket^* \cdot p \neq \emptyset$ . Es gilt  $p \in G$  und  $G \cap \llbracket \sigma = \rho \rrbracket^* \neq \emptyset$ . Nach Induktionsvoraussetzung ist  $\sigma_G = \rho_G$ . Wegen  $p \in G$  gilt  $\rho_G \in \tau_G$ . Damit ist  $\sigma_G \in \tau_G$ .

Sei nun  $\sigma_G \subseteq \tau_G$ . Angenommen,  $G \cap \llbracket \sigma \subseteq \tau \rrbracket^* = \emptyset$ . Wegen der Generizität von  $G$  existiert  $q \in G \cap -\llbracket \sigma \subseteq \tau \rrbracket^*$ . Es gilt

$$\begin{aligned} -\llbracket \sigma \subseteq \tau \rrbracket^* &= -\prod \{ -p + \llbracket \rho \in \tau \rrbracket^* : (\rho, p) \in \sigma \} = \\ &= \sum \{ -(-p + \llbracket \rho \in \tau \rrbracket^*) : (\rho, p) \in \sigma \} = \sum \{ p \cdot -\llbracket \rho \in \tau \rrbracket^* : (\rho, p) \in \sigma \} \end{aligned}$$

Damit ist  $\bigcup \{ p \cdot -\llbracket \rho \in \tau \rrbracket^* : (\rho, p) \in \sigma \}$  prädicht unterhalb von  $q$ . Also existiert  $(\rho, p) \in \sigma$  mit  $G \cap p \cdot -\llbracket \rho \in \tau \rrbracket^* \neq \emptyset$ . Insbesondere ist  $p \in G$ . Damit gilt  $\rho_G \in \sigma_G$ . Außerdem ist  $G \cap \llbracket \rho \in \tau \rrbracket^* = \emptyset$ . Nach Induktionsvoraussetzung gilt also  $\rho_G \notin \tau_G$ . Insbesondere ist  $\sigma \not\subseteq \tau$ .

Sei  $\sigma_G \not\subseteq \tau_G$ . Dann existiert  $(\rho, p) \in \sigma$  mit  $p \in G$  und  $\rho_G \notin \tau_G$ . Nach Induktionsannahme schneidet  $G$  nicht die Menge  $\llbracket \rho \in \tau \rrbracket^*$ . Wegen der Generizität schneidet  $G$  dann aber  $-\llbracket \rho \in \tau \rrbracket^*$ . Es folgt, dass  $G$  die Menge

$$p \cdot -\llbracket \rho \in \tau \rrbracket^* = -(-p + \llbracket \rho \in \tau \rrbracket^*)$$

schneidet. Damit ist  $G$  disjunkt zu

$$\llbracket \sigma \subseteq \tau \rrbracket^* = \prod \{ -p + \llbracket \rho \in \tau \rrbracket^* : (\rho, p) \in \sigma \}.$$

Gelte nun  $\sigma_G = \tau_G$ . Dann ist  $\sigma_G \subseteq \tau_G$  und  $\tau_G \subseteq \sigma_G$ . Wenn  $G$  sowohl  $\llbracket \sigma \subseteq \tau \rrbracket^*$  als auch  $\llbracket \tau \subseteq \sigma \rrbracket^*$  schneidet, dann auch  $\llbracket \sigma = \tau \rrbracket^*$ .

Wenn umgekehrt  $G$  die Menge  $\llbracket \sigma = \tau \rrbracket^*$  schneidet, dann offenbar auch  $\llbracket \sigma \subseteq \tau \rrbracket^*$  und  $\llbracket \tau \subseteq \sigma \rrbracket^*$ . Damit gilt  $\sigma_G = \tau_G$ . Das schließt das Argument für atomare Formeln ab.



Für nicht-atomare Formeln benutzen wir Induktion über den Formelaufbau. Alle Fälle gehen glatt durch und benutzen Argumente, die wir oben schon genannt haben (insbesondere müssen wir an ein paar Stellen die Generizität von  $G$  ausnutzen).  $\square$

Mit diesem Lemma bekommen wir relativ leicht

**Satz 6.25.** *Für alle Formeln  $\phi(\tau_1, \dots, \tau_n)$  aus der Forcingsprache von  $M$  und alle  $p \in \mathbb{P}$  gilt  $p \in \llbracket \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket$  genau dann, wenn  $p \in \llbracket \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket^*$  in  $M$  gilt. Insbesondere ist  $\Vdash$  in  $M$  definierbar.*

*Beweis.* Angenommen  $p \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ . Wir zeigen, dass  $\llbracket \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket^*$  prädicht unterhalb von  $p$  ist. Angenommen nicht. Dann existiert ein  $q \leq p$ , das mit keinem Element von  $\llbracket \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket^*$  kompatibel ist. Nach dem Beweis des Satzes von Rasiowa-Sikorski existiert ein  $\mathbb{P}$ -generischer Filter  $G$  über  $M$  mit  $q \in G$ . Wegen der Wahl von  $q$  ist  $G$  disjunkt zu  $\llbracket \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket^*$ . Nach Lemma 6.24 gilt in  $M[G]$  dann  $\neg \phi((\tau_1)_G, \dots, (\tau_n)_G)$ . Ein Widerspruch. Das zeigt

$$\llbracket \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket \subseteq \llbracket \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket^*.$$

Sei nun  $p \in \llbracket \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket^*$ . Angenommen es gibt einen  $\mathbb{P}$ -generischen Filter  $G$  über  $M$  mit  $p \in G$ , so dass  $\phi((\tau_1)_G, \dots, (\tau_n)_G)$  in  $M[G]$  falsch ist. Nach Lemma 6.24 ist dann  $G \cap \llbracket \neg \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket^* \neq \emptyset$ . Die Bedingung  $p$  ist aber inkompatibel mit allen Elementen von  $\llbracket \neg \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket^*$ . Ein Widerspruch. Damit gilt  $p \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ . Das zeigt

$$\llbracket \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket^* \subseteq \llbracket \phi(\tau_1, \dots, \tau_n) \rrbracket.$$

$\square$

**Korollar 6.26.** *Sei  $G$   $\mathbb{P}$ -generisch über  $M$ . Für eine Formel  $\phi(\tau_1, \dots, \tau_n)$  aus der Forcingsprache von  $M$  gilt  $\phi((\tau_1)_G, \dots, (\tau_n)_G)$  in  $M[G]$  genau dann, wenn es ein  $p \in G$  gibt mit  $p \Vdash \phi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ .*

**6.4. ZFC in  $M[G]$ .** Wie oben sei  $M$  ein abzählbares, transitives Modell von ZFC und  $\mathbb{P} \in M$  eine Halbordnung.  $G$  sei ein  $\mathbb{P}$ -generischer Filter über  $M$ .

**Satz 6.27.**  *$M[G]$  ist ein Modell von ZFC.*

*Beweis.* Nach Lemma 6.15 sind nur noch Unendlichkeits-, Aussonderungs-, Ersetzungs-, Potenzmengen- und Auswahlaxiom nachzurechnen. Das Unendlichkeitsaxiom gilt in  $M[G]$ , da  $\omega = \check{\omega}_G$  ein Element von  $M[G]$  ist. Für das Aussonderungsaxiom sei  $\phi(x, y_1, \dots, y_n)$  eine Formel und  $a, b_1, \dots, b_n \in M[G]$ . Wir zeigen

$$\{x \in a : M[G] \models \phi(x, b_1, \dots, b_n)\} \in M[G].$$

Seien  $\sigma, \tau_1, \dots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$  mit  $\sigma_G = a$  und  $(\tau_i)_G = b_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Setze

$$\rho := \{(\pi, p) : \exists q \in \mathbb{P}((\pi, q) \in \sigma \wedge p \leq q) \wedge p \Vdash \phi(\pi, \tau_1, \dots, \tau_n)\}.$$

Wegen der Definierbarkeit der Forcingrelation in  $M$  ist  $\rho \in M$ . Wir zeigen  $\rho_G = \{x \in a : M[G] \models \phi(x, b_1, \dots, b_n)\}$ . Sei  $x \in \rho_G$ . Dann existiert  $(\pi, p) \in \rho$  mit  $\pi_G = x$  und  $p \in G$ . Nach Definition von  $\rho$  gilt  $p \Vdash \phi(\pi, \tau_1, \dots, \tau_n)$  und  $p \leq q$  für ein  $q \in \mathbb{P}$  mit  $(\pi, q) \in \sigma$ . Damit ist  $x = \pi_G \in \sigma_G$ , und in  $M[G]$  gilt  $\phi(\pi, \tau_1, \dots, \tau_n)$ .

Sei nun  $x \in a$  mit  $M[G] \models \phi(x, b_1, \dots, b_n)$ . Dann existiert  $(\pi, q) \in \sigma$  mit  $x = \pi_G$  und  $q \in G$ . Außerdem gibt es  $p \in G$  mit  $p \Vdash \phi(\pi, \tau_1, \dots, \tau_n)$ . Da je zwei Elemente von  $G$  eine gemeinsame Erweiterung in  $G$  haben, können wir  $p \leq q$  annehmen. Damit ist  $(\pi, p) \in \rho$ , also  $x = \pi_G \in \rho_G$ . Das zeigt das Aussonderungsaxiom in  $M[G]$ .

Für das Ersetzungsaxiom sei  $\phi(x, y, z_1, \dots, z_n)$  eine Formel und  $a, b_1, \dots, b_n \in M[G]$ , so dass gilt:

$$M[G] \models \forall x \in a \exists! y (\phi(x, y, b_1, \dots, b_n))$$

Wähle  $\sigma, \tau_1, \dots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$  mit  $\sigma_G = a$  und  $(\tau_i)_G = b_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Wähle eine Menge  $S \subseteq M^{\mathbb{P}}$ ,  $S \in M$ , so dass folgendes gilt: Für alle  $(\pi, p) \in \sigma$  und alle  $q \leq p$  mit

$$q \Vdash \exists! y(\phi(\pi, y, \tau_1, \dots, \tau_n))$$

ist die Menge

$$\{r \leq q : \exists \rho \in S(r \Vdash \phi(\pi, \rho, \tau_1, \dots, \tau_n))\}$$

dicht unterhalb von  $q$ . Betrachte den Namen  $S \times \{1\}$ . Wir zeigen

$$M[G] \models \forall x \in a \exists y \in (S \times \{1\})_G(\phi(x, y, b_1, \dots, b_n)).$$

Sei  $x \in a$ . Dann existiert  $(\pi, p) \in \sigma$  mit  $\pi_G = x$  und  $p \in G$ . Außerdem gibt es  $q \in G$  mit  $q \leq p$  und

$$q \Vdash \exists! y(\phi(\pi, y, \tau_1, \dots, \tau_n)).$$

Nach Wahl von  $S$  gibt es  $\rho \in S$  und  $r \in G$  mit  $r \leq q$  und  $r \Vdash \phi(\pi, \rho, \tau_1, \dots, \tau_n)$ . Damit gilt

$$M[G] \models \phi(x, \rho_G, b_1, \dots, b_n),$$

also insbesondere

$$M[G] \models \exists y \in (S \times \{1\})_G(\phi(x, y, b_1, \dots, b_n)).$$

Für das Potenzmengenaxiom sei  $a \in M[G]$ . Wähle  $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$  mit  $\sigma_G = a$ . Sei  $A := \{\pi : \exists p \in \mathbb{P}((\pi, p) \in \sigma)\}$ . Für eine Funktion  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{P})$  sei  $\tau_f := \{(\pi, p) : p \in f(\pi)\}$ . Setze

$$\rho := \{(\tau_f, 1) : f \text{ ist eine Funktion von } A \text{ nach } \mathcal{P}(\mathbb{P})\}.$$

Die Definition von  $\rho$  ist dabei in  $M$  zu verstehen.

Wir zeigen

$$M[G] \models \forall x(x \subseteq a \rightarrow x \in \rho_G).$$

Sei  $x \in M[G]$  mit  $x \subseteq a$ . Wähle  $\tau \in M^{\mathbb{P}}$  mit  $\tau_G = x$ . Definiere  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{P})$  wie folgt: Für  $\pi \in A$  sei  $f(\pi) := \{p \in \mathbb{P} : p \Vdash \pi \in \tau\}$ . Beachte, dass  $f$  eine Funktion in  $M$  ist. Offenbar ist  $(\tau_f)_G \in \rho_G$ . Wir zeigen  $x = \tau_G = (\tau_f)_G$ .

Sei  $y \in x$ . Wegen  $x \subseteq \sigma_G$  existiert  $(\pi, p) \in \sigma$  mit  $p \in G$  und  $y = \pi_G$ . Wähle  $q \leq p$  mit  $q \in G$  und  $q \Vdash \pi \in \tau$ . Nach Definition von  $f$  gilt  $y = \pi_G \in (\tau_f)_G$ . Sei nun  $y \in (\tau_f)_G$ . Dann existiert  $(\pi, p) \in \tau_f$  mit  $y = \pi_G$  und  $p \in G$ . Nach Definition von  $f$  gilt  $p \Vdash \pi \in \tau$ , und damit gilt  $y = \pi_G \in \tau_G$ . Also ist  $\tau_G = (\tau_f)_G$ . Insgesamt ist  $\rho_G$  eine Obermenge von  $(\mathcal{P}(a))^{M[G]}$ .

Für das Auswahlaxiom sei  $a \in M[G]$ , zum Beispiel  $a = \sigma_G$  mit  $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ . Setze wieder  $A := \{\pi : \exists p \in \mathbb{P}((\pi, p) \in \sigma)\}$ . Da das Auswahlaxiom in  $M$  gilt, gibt es in  $M$  eine Wohlordnung  $\triangleleft$  auf  $A$ . Wegen  $M \subseteq M[G]$  ist  $(A, \triangleleft) \in M[G]$ . In  $M[G]$  kann man nun eine Wohlordnung  $\triangleleft'$  auf  $a$  wie folgt definieren:

Für  $x, y \in a$  sei  $x \triangleleft' y$  genau dann, wenn für das  $\triangleleft$ -kleinste  $\pi \in A$  mit  $\pi_G = x$  und das  $\triangleleft$ -kleinste  $\rho \in A$  mit  $\rho_G = y$  gilt:  $\pi \triangleleft \rho$ . Es ist klar, dass  $\triangleleft' \in M[G]$  eine Wohlordnung auf  $a$  ist.  $\square$

**Korollar 6.28.** *Ist ZFC konsistent, so auch ZFC+V $\neq$ L.*

*Beweis.* Sei  $M$  abzählbares transitives Modell von ZFC und  $\mathbb{P} \in M$  eine Halbordnung, in der unter jeder Bedingung zwei inkompatible Bedingungen existieren, zum Beispiel  $\mathbb{P} = \text{Fn}(\omega, 2)$ . Sei  $G$   $\mathbb{P}$ -generisch über  $M$ . Nach Satz 6.27 ist  $M[G]$  Modell von ZFC. Außerdem ist  $M[G]$  transitiv und hat dieselben Ordinalzahlen wie  $M$ . Wegen der Absolutheit der Definition von  $L$  gilt  $L^{M[G]} = L^M \subseteq M$ . Wegen  $G \notin M$  ist daher  $L^{M[G]} \neq M[G]$ , also  $M[G]$  Modell von ZFC+V $\neq$ L.  $\square$

7. CH IST UNABHÄNGIG VON ZFC

In diesem Abschnitt wird mit Hilfe von Forcing gezeigt, dass ZFC weder CH noch  $\neg$ CH impliziert. Dass CH mit ZFC konsistent ist, wurde bereits gezeigt, aber es ist lehrreich, auch noch ein Forcing-Argument dafür zu sehen.

**7.1. Erzwingen von CH.** Sei  $M$  ein abzählbares transitives Modell von ZFC. Wir definieren eine partielle Ordnung  $\mathbb{P} \in M$ , so dass für jeden  $\mathbb{P}$ -generischen Filter  $G$  über  $M$  gilt:  $M[G] \models \text{CH}$ .

**Definition 7.1.** In  $M$  sei

$$\mathbb{P} := \{f : A \rightarrow \mathcal{P}(\omega) : A \text{ ist abzählbare Teilmenge von } \aleph_1\}.$$

Die Ordnung auf  $\mathbb{P}$  sei  $\leq := \supseteq$ .

Sei  $G$   $\mathbb{P}$ -generischer Filter über  $M$ . Um zu zeigen, dass in  $M[G]$  die Kontinuums-hypothese gilt, stellen wir zunächst folgendes fest:

**Lemma 7.2.** Sei  $f_G := \bigcup G$ . Dann ist  $f_G$  eine surjektive Abbildung von  $(\aleph_1)^M$  nach  $(\mathcal{P}(\omega))^M$ .

*Beweis.* Dass  $f_G$  eine Funktion ist, liegt daran, dass je zwei Elemente von  $G$  eine gemeinsame Erweiterung in  $G$  haben. Zu je zwei Funktionen in  $G$  existiert also eine gemeinsame Fortsetzung in  $G$ .

Wie üblich seien  $\text{rng}$  das Bild einer Funktion und  $\text{dom}$  der Wertebereich. In  $M$  definieren wir folgende dichte Teilmengen von  $\mathbb{P}$ : Für jedes  $\alpha \in \aleph_1$  sei  $D_\alpha := \{p \in \mathbb{P} : \alpha \in \text{dom}(p)\}$ . Für jedes  $A \subseteq \omega$  sei  $D^A := \{p \in \mathbb{P} : A \in \text{rng}(p)\}$ . Wie man leicht sieht, sind alle  $D_\alpha$  und  $D^A$  dicht in  $\mathbb{P}$ . Da  $G$  generisch über  $M$  ist, schneidet  $G$  alle  $D_\alpha$ . Es folgt  $\text{dom}(f_G) = (\aleph_1)^M$ . Außerdem schneidet  $G$  alle  $D^A$ . Es folgt  $\text{rng}(f_G) = (\mathcal{P}(\omega))^M$ .  $\square$

Um CH in  $M[G]$  nachzurechnen müssen wir nur noch zeigen, dass  $(\aleph_1)^M = (\aleph_1)^{M[G]}$  und  $(\mathcal{P}(\omega))^M = (\mathcal{P}(\omega))^{M[G]}$  gelten. Zwei Dinge können dabei schief gehen. Zum Einen könnte es passieren, dass die erste überabzählbare Ordinalzahl von  $M$ , also  $(\aleph_1)^M$ , in  $M[G]$  plötzlich abzählbar ist. Außerdem könnte es passieren, dass es in  $M[G]$  neue Teilmengen von  $\omega$  gibt, also Teilmengen von  $\omega$ , die keine Elemente von  $M$  sind.

Wenn  $(\aleph_1)^M$  in  $M[G]$  abzählbar ist, dann gibt es in  $M[G]$  eine Bijektion zwischen  $\omega$  und  $(\aleph_1)^M$ , die es in  $M$  noch nicht gab. Gibt es in  $M[G]$  eine neue Teilmenge  $A$  von  $\omega$ , so gibt es auch eine neue Abbildung von  $\omega$  nach 2, nämlich die charakteristische Funktion von  $A$ . Die beiden genannten Probleme werden also durch folgendes Lemma ausgeschlossen.

**Lemma 7.3.** Sei  $f \in M[G]$  eine Abbildung von  $\omega$  in die Ordinalzahlen. Dann ist  $f \in M$ .

*Beweis.* Sei  $\dot{f} \in M^{\mathbb{P}}$  ein Name mit  $\dot{f}_G = f$  und  $p \in G$  mit

$$p \Vdash \dot{f} \text{ ist eine Funktion von } \omega \text{ nach Ord.}$$

In  $M$  sei

$$D := \{q \leq p : \exists g : \omega \rightarrow \text{Ord}(q \Vdash \dot{f} = \check{g})\}.$$

Wegen der Generizität von  $G$  genügt zu zeigen, dass  $D$  dicht unterhalb von  $p$  ist.

Zunächst stellen wir folgendes fest: Sei  $q \leq p$  und  $F$  irgendein  $\mathbb{P}$ -generischer Filter über  $M$  mit  $q \in F$ . Insbesondere ist  $p \in F$ . Wegen der Wahl von  $p$  ist  $\dot{f}_F$  eine Funktion von  $\omega$  in die Ordinalzahlen. Sei  $n \in \omega$ . Dann ist  $\dot{f}_F(n) = \alpha$  für irgendeine Ordinalzahl  $\alpha$  von  $M[F]$ . Da  $M$  und  $M[F]$  dieselben Ordinalzahlen haben, ist  $\alpha \in M$ . Daher existiert ein  $r \in F$  mit  $r \Vdash \dot{f}(\check{n}) = \check{\alpha}$ . (In Zukunft werden

wir diverse  $\checkmark$ 's weglassen, um die Lesbarkeit etwas zu erhöhen.) Wir können  $r \leq q$  wählen. Das zeigt, dass für alle  $n \in \omega$  die Menge derjenigen  $r \leq p$ , für die ein  $\alpha \in \text{Ord}^M$  mit  $r \Vdash \dot{f}(n) = \alpha$  existiert, dicht unterhalb von  $p$  ist.

Von nun an werden wir vollständig in  $M$  argumentieren. Das erspart einige  $M$ 's. Eine Halbordnung  $\mathbb{Q}$  heißt  $\sigma$ -abgeschlossen, wenn für jede fallende Folge  $(q_n)_{n \in \omega}$  von Bedingungen in  $\mathbb{Q}$  eine Bedingung  $q \in \mathbb{Q}$  existiert, so dass für alle  $n \in \omega$  gilt:  $q \leq q_n$ .

$\mathbb{P}$  ist  $\sigma$ -abgeschlossen. Sei nämlich  $(p_n)_{n \in \omega}$  eine fallende Folge in  $\mathbb{P}$ . Dann ist  $p := \bigcup_{n \in \omega} p_n$  eine partielle Funktion von  $\aleph_1$  nach  $\mathcal{P}(\omega)$  mit abzählbarem Definitionsbereich, also ein Element von  $\mathbb{P}$ . Offenbar ist  $p$  eine gemeinsame untere Schranke der  $p_n$ .

Wir zeigen nun, dass  $D$  dicht unterhalb von  $p$  ist. Sei  $q \leq p$ . Wähle  $q_0 \leq q$  und  $\alpha_0 \in \text{Ord}$  mit  $q_0 \Vdash \dot{f}(0) = \alpha_0$ . Das geht nach Bemerkung am Anfang dieses Beweises. Angenommen wir haben  $q_n$  bereits gewählt. Wie eben gibt es  $q_{n+1} \leq q_n$  und  $\alpha_{n+1} \in \text{Ord}$  mit  $q_{n+1} \Vdash \dot{f}(n+1) = \alpha_{n+1}$ . Wegen der  $\sigma$ -Abgeschlossenheit von  $\mathbb{P}$  existiert eine gemeinsame Erweiterung  $r$  aller  $q_n$ . Wir zeigen  $r \in D$ .

Sei  $g : \omega \rightarrow \text{Ord}; n \mapsto \alpha_n$ . Für alle  $n \in \omega$  ist  $r \leq q_n$ . Insbesondere gilt  $r \Vdash \dot{f}(n) = \alpha_n$  für alle  $n \in \omega$ . Da die natürlichen Zahlen in allen transitiven Modellen der Mengenlehre dieselben sind, gilt  $r \Vdash \dot{f} = \check{g}$ . Damit ist  $r \in D$ . Das zeigt, dass  $D$  unterhalb von  $p$  dicht ist.  $\square$

**Korollar 7.4.**  $M[G] \models CH$

*Beweis.* Nach Lemma 7.3 gilt  $(\mathcal{P}(\omega))^M = (\mathcal{P}(\omega))^{M[G]}$ , und  $(\aleph_1)^M$  ist überabzählbar in  $M[G]$ . Alle Ordinalzahlen unterhalb von  $(\aleph_1)^M$  sind abzählbar in  $M$ , also erst recht in  $M[G]$ . Damit ist  $(\aleph_1)^M = (\aleph_1)^{M[G]}$ . Nach Lemma 7.2 existiert in  $M[G]$  eine surjektive Abbildung von  $(\aleph_1)^{M[G]} = (\aleph_1)^M$  nach  $(\mathcal{P}(\omega))^{M[G]} = (\mathcal{P}(\omega))^M$ . Also gilt  $M[G] \models |\mathcal{P}(\omega)| \leq \aleph_1$ . Da die Überabzählbarkeit von  $\mathcal{P}(\omega)$  in ZFC beweisbar und  $M[G]$  ein Modell von ZFC ist, gilt  $M[G] \models CH$ .  $\square$

**Übung 7.5.** Sei  $\mathbb{P}$  eine Halbordnung. Betrachte folgendes Spiel auf  $\mathbb{P}$  zwischen zwei Spielern über  $\omega$  Runden:

Setze  $p_0 = q_0 = 1_{\mathbb{P}}$ . In der  $n$ -ten Runde wählt der erste Spieler eine Bedingung  $p_{n+1} \leq q_n$  und der zweite Spieler antwortet mit einer Bedingung  $q_{n+1} \leq p_{n+1}$ . Der zweite Spieler gewinnt das Spiel genau dann, wenn es eine Bedingung  $p \in \mathbb{P}$  gibt, so dass für alle  $n \in \omega$  gilt:  $p \leq p_n$ .

Angenommen, der zweite Spieler hat eine Gewinnstrategie für dieses Spiel. Zeige, dass es für jeden  $\mathbb{P}$ -generischen Filter  $G$  über dem Grundmodell  $M$  in  $M[G]$  keine neuen Abbildungen von  $\omega$  in die Ordinalzahlen gibt.

**Übung 7.6** (Schwer!). Sei  $\mathbb{P}$  eine Halbordnung. Angenommen, der erste Spieler hat eine Gewinnstrategie in dem oben beschriebenen Spiel.

Zeige: Es gibt einen  $\mathbb{P}$ -generischen Filter über dem Grundmodell  $M$ , so dass es in  $M[G]$  eine neue Abbildung von  $\omega$  in die Ordinalzahlen gibt.

**7.2. Erzwingen von  $\neg\text{CH}$ .** Sei  $M$  ein abzählbares transitives Modell von ZFC und  $\kappa \in \text{Card}^M$  mit  $M \models \text{cf}(\kappa) \geq \aleph_1$ . Wir definieren eine Halbordnung  $\mathbb{P} \in M$ , so dass für jeden  $\mathbb{P}$ -generischen Filter  $G$  über  $M$  gilt:  $\text{Card}^M = \text{Card}^{M[G]}$  und  $M[G] \models 2^{\aleph_0} = \kappa$ .

**Definition 7.7.** In  $M$  sei

$$\mathbb{P} := \text{Fn}(\kappa, 2) = \{f : f \text{ ist eine endliche Funktion} \\ \text{mit } \text{dom}(f) \subseteq \kappa \text{ und } \text{rng}(f) \subseteq 2\}.$$

$\mathbb{P}$  ist geordnet durch umgekehrte Inklusion.

Beachte, dass  $\text{Fn}(\kappa, 2)$  über transitiven Modellen der Mengenlehre absolut ist. Die Aussagen  $\text{cf}(\kappa) > \aleph_0$  und  $\kappa \in \text{Card}$  sind es jedoch nicht.

**Lemma 7.8.** Sei  $G$   $\mathbb{P}$ -generisch über  $M$ . Dann existiert in  $M[G]$  eine Familie  $(A_\alpha)_{\alpha < \kappa}$  paarweise verschiedener Teilmengen von  $\omega$ .

*Beweis.* Offenbar ist  $\text{Fn}(\kappa, 2)$  zu  $\text{Fn}(\kappa \times \omega, 2)$  isomorph. Daher können wir so tun, als wäre  $G$   $\text{Fn}(\kappa \times \omega, 2)$ -generisch. Wie man leicht nachprüft, ist  $f_G := \bigcup G$  eine Funktion von  $\kappa \times \omega$  nach 2. Für jedes  $\alpha < \kappa$  sei  $A_\alpha := \{n \in \omega : f_G(\alpha, n) = 1\}$ . Wir zeigen, dass die  $A_\alpha$  paarweise verschieden sind.

Seien  $\alpha, \beta < \kappa$  mit  $\alpha \neq \beta$ . Setze

$$D_{\alpha, \beta} := \{p \in \mathbb{P} : \exists n \in \omega ((\alpha, n), (\beta, n) \in \text{dom}(p) \wedge p(\alpha, n) \neq p(\beta, n))\}.$$

Da die Elemente von  $\mathbb{P}$  endliche Funktionen sind, ist  $D_{\alpha, \beta}$  dicht in  $\mathbb{P}$ . Wegen der Generizität von  $G$  existiert  $p \in D_{\alpha, \beta} \cap G$ . Sei  $n \in \omega$  mit  $(\alpha, n), (\beta, n) \in \text{dom}(p)$  und  $p(\alpha, n) \neq p(\beta, n)$ . Wegen  $p \subseteq f_G$  gilt

$$n \in A_\alpha \Leftrightarrow n \notin A_\beta.$$

Insbesondere ist  $A_\alpha \neq A_\beta$ . □

Dieses Lemma zeigt  $M[G] \models 2^{\aleph_0} \geq |\kappa|$ . Allerdings wissen wir nicht, ob  $\kappa$  in  $M[G]$  nicht plötzlich die Mächtigkeit  $\aleph_1$  hat, auch wenn es in  $M$  noch echt größer war. So etwas kann allerdings nicht passieren, wenn jede Kardinalzahl in  $M$  auch Kardinalzahl in  $M[G]$  ist. Beachte, dass jede Kardinalzahl in  $M[G]$  automatisch auch Kardinalzahl in  $M$  ist.

**Definition 7.9.** Eine Halbordnung  $\mathbb{Q} \in M$  erhält Kardinalzahlen, wenn nach Erzwingen mit  $\mathbb{Q}$  (Adjungieren eines  $\mathbb{Q}$ -generischen Filters über dem Grundmodell  $M$ ) alle Kardinalzahlen des Grundmodells auch noch Kardinalzahlen in der generischen Erweiterung sind.  $\mathbb{Q}$  erhält Kofinalitäten, wenn für alle  $\kappa \in \text{Card}^M$  und alle  $\mathbb{Q}$ -generischen Filter  $G$  über  $M$  gilt:  $(\text{cf}(\kappa))^M = (\text{cf}(\kappa))^{M[G]}$ .

$\mathbb{Q}$  ist erfüllt die abzählbare Antiketten-Bedingung (c.c.c., countable chain condition), wenn jede Antikette von  $\mathbb{Q}$  abzählbar ist.

**Lemma 7.10.** Erhält  $\mathbb{Q} \in M$  Kofinalitäten, so auch Kardinalzahlen.

*Beweis.* Sei  $G$   $\mathbb{Q}$ -generischer Filter über  $M$  und  $\kappa \in \text{Card}^M$ . Angenommen, alle  $\lambda < \kappa$  mit  $\lambda \in \text{Card}^M$  sind Kardinalzahlen in  $M[G]$ . Ist  $\kappa$  eine Limeskardinalzahl in  $M$ , so ist  $\kappa$  auch in  $M[G]$  Supremum einer Menge von Kardinalzahlen und damit selbst Kardinalzahl. Ist  $\kappa$  eine Nachfolgerkardinalzahl in  $M$ , so ist  $\kappa = (\text{cf}(\kappa))^M = (\text{cf}(\kappa))^{M[G]}$ . Also ist  $\kappa$  auch in  $M[G]$  Kardinalzahl. □

**Lemma 7.11.** Ist  $\mathbb{Q} \in M$  c.c.c. (in  $M$ ), so erhält  $\mathbb{Q}$  Kofinalitäten.

*Beweis.* Sei  $\kappa \in \text{Card}^M$  und  $G$   $\mathbb{Q}$ -generischer Filter über  $M$ . Wir können  $\text{cf}(\kappa) > \omega$  annehmen. Es ist klar, dass  $(\text{cf}(\kappa))^{M[G]} \leq (\text{cf}(\kappa))^M$  gilt. Angenommen  $\alpha := (\text{cf}(\kappa))^{M[G]} < (\text{cf}(\kappa))^M$ . Dann existiert eine kofinale Funktion  $f : \alpha \rightarrow \kappa$  in  $M[G]$ . Sei  $\dot{f} \in M^{\mathbb{P}}$  ein Name mit  $\dot{f}_G = f$ . Wähle  $p \in G$  mit  $p \Vdash \dot{f} : \alpha \rightarrow \kappa$ .

In  $M$  definieren wir eine Funktion  $F : \alpha \rightarrow \mathcal{P}(\kappa)$  wie folgt: Für  $\beta < \alpha$  sei

$$F(\beta) := \{\gamma < \kappa : \exists q \leq p(q \Vdash \dot{f}(\beta) = \gamma)\}.$$

Für alle  $\beta < \alpha$  gilt nun  $f(\beta) \in F(\beta)$ . Wegen  $f(\beta) < \kappa$  existieren nämlich  $\gamma < \kappa$  und  $q \leq p$  mit  $q \in G$  und  $q \Vdash \dot{f}(\beta) = \gamma$ .

Für alle  $\beta < \kappa$  gilt (in  $M$ )  $|F(\beta)| \leq \aleph_0$ . Wir argumentieren in  $M$ . Angenommen  $|F(\beta)| > \aleph_0$ . Dann existieren paarweise verschiedene  $\gamma_\nu \in F(\beta)$ ,  $\nu < \aleph_1$ , und  $q_\nu \leq p$ ,  $\nu < \aleph_1$ , mit  $q_\nu \Vdash \dot{f}(\beta) = \gamma_\nu$  für alle  $\nu < \aleph_1$ . Offenbar sind die  $q_\nu$  paarweise inkompatibel, bilden also eine Antikette. Das widerspricht aber der c.c.c. von  $\mathbb{Q}$ .

Definiere nun  $g : \alpha \rightarrow \kappa$  wie folgt: Für  $\beta < \alpha$  sei  $g(\beta) := \sup(F(\beta))$ . Wegen  $\omega < (\text{cf}(\kappa))^M$  ist  $g(\beta)$  in der Tat  $< \kappa$ . Nach Wahl von  $g$  gilt  $f(\beta) \leq g(\beta)$  für alle  $\beta < \alpha$ . Da  $f : \alpha \rightarrow \kappa$  kofinal ist, ist auch  $g$  kofinal. Es gilt aber  $g \in M$ . Das widerspricht  $\alpha < (\text{cf}(\kappa))^M$ .  $\square$

**Übung 7.12.** Zeige, dass eine Halbordnung  $\mathbb{P}$  genau dann c.c.c. ist, wenn für jeden  $\mathbb{P}$ -Namen  $\dot{\alpha}$  für eine Ordinalzahl eine abzählbare Menge  $A$  existiert, so dass

$$1_{\mathbb{P}} \Vdash \dot{\alpha} \in \check{A}.$$

Dabei heißt  $\dot{\alpha}$  *Name für eine Ordinalzahl*, wenn gilt

$$1_{\mathbb{P}} \Vdash \text{„}\dot{\alpha} \text{ ist Ordinalzahl“}.$$

Um zu zeigen, dass  $\mathbb{P}$  Kardinalzahlen erhält, müssen wir nur noch nachrechnen, dass  $\mathbb{P}$  die c.c.c. erfüllt. Dazu benötigt man folgendes Lemma.

**Lemma 7.13** ( $\Delta$ -System-Lemma). *Sei  $(a_i)_{i \in I}$  eine überabzählbare Familie endlicher Mengen. Dann existieren eine endliche Menge  $r$  und eine überabzählbare Familie  $(a_i)_{i \in J}$  mit  $J \subseteq I$ , so dass für je zwei verschiedene  $i, j \in J$  gilt:  $a_i \cap a_j = r$ . (Man sagt,  $(a_i)_{i \in J}$  ist ein  $\Delta$ -System mit Wurzel  $r$ .)*

*Beweis.* Wir können  $\bigcup_{i \in I} a_i \subseteq \omega_1$  annehmen. Außerdem können wir, nach Ausdünnen von  $I$ , annehmen, dass alle  $a_i$  dieselbe Mächtigkeit  $n$  haben. Wir beweisen nun das  $\Delta$ -System-Lemma durch Induktion über  $n$ .

Für  $n = 0$  ist die Behauptung trivial. Sei  $n = m + 1$  und das  $\Delta$ -System-Lemma bereits bewiesen für Familien  $m$ -elementiger Mengen. Für alle  $i \in I$  sei  $\alpha_i$  das größte Element von  $a_i$  und  $b_i := a_i \setminus \{\alpha_i\}$ . Nach Ausdünnen von  $I$  können wir annehmen, dass  $(b_i)_{i \in I}$  bereits ein  $\Delta$ -System mit Wurzel  $r$  ist. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall:  $|r| = m$ . In diesem Falle ist  $(b_i)_{i \in I}$  konstant. Subfall 1:  $|\{\alpha_i : i \in I\}| \leq \aleph_0$ . Dann existiert ein  $\alpha < \omega_1$ , so dass  $J := \{i \in I : \alpha_i = \alpha\}$  überabzählbar ist. Die Familie  $(a_i)_{i \in J}$  ist dann ein  $\Delta$ -System mit der Wurzel  $r \cup \{\alpha\}$ .

Subfall 2:  $|\{\alpha_i : i \in I\}| > \aleph_0$ . Dann existiert ein überabzählbares  $J \subseteq I$ , so dass die  $\alpha_i$ ,  $i \in J$ , paarweise verschieden sind. Offenbar ist  $(a_i)_{i \in J}$  ein  $\Delta$ -System mit der Wurzel  $r$ .

2. Fall:  $|r| < m$ . Sei  $\alpha := \max(r)$ . Für alle  $i \in I$  sei  $\beta_i := \min(a_i \setminus r)$ . Da  $(b_i)_{i \in I}$  ein  $\Delta$ -System mit Wurzel  $r$  ist und  $|r| < m$  gilt, gibt es nur abzählbar viele  $i \in I$  mit  $\beta_i \leq \alpha$ . Nach Ausdünnen von  $I$  können wir also  $\beta_i > \alpha$  für alle  $i \in I$  annehmen. Wähle nun eine Folge  $(i_\nu)_{\nu < \omega_1}$  in  $I$ , so dass für alle  $\nu < \omega_1$  gilt:  $\alpha_{i_\nu} < \beta_{i_{\nu+1}}$ . Das geht, weil für jedes  $\gamma < \omega_1$  nur abzählbar viele  $i \in I$  mit  $\beta_i \leq \gamma$  existieren. Setze  $J := \{i_\nu : \nu < \omega_1\}$ . Dann ist  $(a_i)_{i \in J}$  ein  $\Delta$ -System mit Wurzel  $r$ .  $\square$

**Lemma 7.14.**  $\text{Fn}(\kappa, 2)$  ist c.c.c.

*Beweis.* Seien  $(p_i)_{i \in I}$  eine überabzählbare Familie von paarweise inkompatiblen Elementen von  $\text{Fn}(\kappa, 2)$ . Nach dem  $\Delta$ -System Lemma existiert ein überabzählbares  $J \subseteq I$ , so dass  $(\text{dom}(p_i))_{i \in J}$  ein  $\Delta$ -System mit einer Wurzel  $r$  ist. Da es nur endlich viele Funktionen von  $r$  nach  $2$  gibt, können wir nach Ausdünnen von  $J$  annehmen, dass je zwei  $p_i, i \in J$ , auf  $r$  übereinstimmen. Damit sind aber je zwei  $p_i, i \in J$ , kompatibel. Ein Widerspruch zur Wahl der  $p_i$ .  $\square$

**Korollar 7.15.** *Sei  $G \text{ Fn}((\aleph_{27})^M, 2)$ -generisch über  $M$ . Dann gilt  $M[G] \models 2^{\aleph_0} \geq \aleph_{27}$ .*

*Beweis.* Nach Lemma 7.14, Lemma 7.10 und Lemma 7.11 erhält  $\text{Fn}((\aleph_{27})^M, 2)$  Kardinalzahlen. Also gilt  $\text{Card}^M = \text{Card}^{M[G]}$ . Damit ist  $(\aleph_{27})^M = (\aleph_{27})^{M[G]}$ . Nach Lemma 7.8 gilt  $M[G] \models 2^{\aleph_0} \geq \aleph_{27}$ .  $\square$

Wir geben noch eine obere Schranke für  $2^{\aleph_0}$  nach Erzwingen mit  $\text{Fn}(\kappa, 2)$  an.

**Definition 7.16.** Ein Name  $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$  heißt *netter Name für eine Teilmenge von  $\omega$* , wenn eine Familie  $(A_n)_{n \in \omega}$  von Antiketten in  $\mathbb{P}$  existiert mit

$$\sigma = \bigcup_{n \in \omega} (\{\check{n}\} \times A_n).$$

**Lemma 7.17.** *Sei  $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$  und  $p \in \mathbb{P}$ . Angenommen  $p \Vdash \sigma \subseteq \omega$ . Dann existiert ein netter Name  $\tau$  für eine Teilmenge von  $\omega$  mit  $p \Vdash \sigma = \tau$ .*

*Beweis.* Für jedes  $n \in \omega$  sei  $A_n$  eine maximale Antikette von Bedingungen unterhalb von  $p$ , die  $n \in \sigma$  erzwingen. Setze  $\tau := \bigcup_{n \in \omega} (\{\check{n}\} \times A_n)$ . Der Name  $\tau$  leistet das Gewünschte:

Sei  $F$  ein  $\mathbb{P}$ -generischer Filter über  $M$  mit  $p \in F$ . Angenommen  $\sigma_F \neq \tau_F$ .

1. Fall: Es gibt ein  $n \in \sigma_F \setminus \tau_F$ . Sei  $q \in F$  mit  $q \Vdash n \in \sigma$ . Wir können  $q \leq p$  annehmen. Wegen  $n \notin \tau_F$  existiert  $r \in F$  mit  $r \Vdash n \notin \tau$ . Wir können  $r \leq q$  annehmen. Nun ist  $r$  inkompatibel zu allen Elementen von  $A_n$ . Ein Widerspruch zur Wahl von  $A_n$ .

2. Fall: Es gibt ein  $n \in \tau_F \setminus \sigma_F$ . Dann existiert  $q \in A_n \cap F$ . Nach Wahl von  $A_n$  gilt  $q \Vdash n \in \sigma$  und damit  $n \in \sigma_F$ . Ein Widerspruch zur Wahl von  $n$ .  $\square$

**Korollar 7.18.** *Sei  $M$  ein Modell von  $ZFC+GCH$  und  $\kappa \in \text{Card}^M$  mit  $M \models \text{cf}(\kappa) > \aleph_0$ . Ist  $G \text{ Fn}(\kappa, 2)$ -generisch über  $M$ , so gilt  $M[G] \models 2^{\aleph_0} = \kappa$ . Außerdem ist  $\text{Card}^M = \text{Card}^{M[G]}$ .*

*Beweis.* Nach wie in Lemma 7.8 gilt  $M[G] \models 2^{\aleph_0} \geq \kappa$ . Nach Lemma 7.17 gibt es für jede Teilmenge von  $\omega$  in  $M[G]$  einen netten Namen in  $M$ . Wir argumentieren einen Moment in  $M$ . Da  $\text{Fn}(\kappa, 2)$  c.c.c. ist, gibt es in  $\text{Fn}(\kappa, 2)$  höchstens  $\kappa^{\aleph_0}$  Antiketten. Damit gibt es höchstens  $((\kappa)^{\aleph_0})^{\aleph_0} = \kappa^{\aleph_0}$  nette Namen für Teilmengen von  $\omega$ . Wegen  $GCH$  und  $\text{cf}(\kappa) > \aleph_0$  ist  $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$ .

In  $M$  existiert also eine Liste von  $\kappa$  Namen, so dass jede Teilmenge von  $\omega$  in  $M[G]$  einen Namen in dieser Liste hat. Damit ist  $(2^{\aleph_0})^{M[G]} \leq \kappa$ .  $\square$

## 8. DIE UNABHÄNGIGKEIT VON AC

Da generische Erweiterung von transitiven Modellen von ZFC wieder Modelle von ZFC sind, müssen wir uns etwas Neues einfallen lassen, um ein Modell von  $ZF+\neg AC$  zu konstruieren.

**8.1. Durch Ordinalzahlen definierbare Mengen.** Wir konstruieren ein *inneres Modell* der Mengenlehre, also eine Teilklasse von  $V$ , die gewisse Axiome der Mengenlehre erfüllt, in unserem Fall ZF. Dabei gehen wir etwas anders vor, als bei der Konstruktion von  $L$ . Während  $L$  mit Hilfe einer Rekursion über die Ordinalzahlen so definiert wurde, dass man, um  $L_{\alpha+1}$  zu definieren, nur auf  $L_\alpha$  zurückgreifen musste, werden wir nun mehr Informationen über das Universum in ein inneres Modell kodieren.

**Definition 8.1.** Eine Menge  $X$  ist *definierbar durch Ordinalzahlen*, wenn es eine Formel  $\phi(x, y_1, \dots, y_n)$  und Ordinalzahlen  $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n$  gibt, so dass gilt:

$$X = \{x : V_\alpha \models \phi(x, \beta_1, \dots, \beta_n)\}$$

$X$  ist durch Ordinalzahlen definierbar *über* einer Menge  $A$ , wenn es eine Formel  $\phi(x, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m)$ , Ordinalzahlen  $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n$  und  $c_1, \dots, c_m \in A \cup \{A\}$  gibt, so dass gilt:

$$X = \{x : V_\alpha \models \phi(x, \beta_1, \dots, \beta_n, c_1, \dots, c_m)\}$$

OD ist die Klasse der durch Ordinalzahlen definierbaren Mengen.  $OD(A)$  ist die Klasse der über  $A$  durch Ordinalzahlen definierbaren Mengen.  $X$  ist *erblich durch Ordinalzahlen definierbar (über  $A$ )*, wenn  $\text{trcl}(X \cup \{X\}) \subseteq OD$  ( $\text{trcl}(X \cup \{X\}) \subseteq OD(A)$ ) gilt.  $HOD$  ( $HOD(A)$ ) ist die Klasse der (über  $A$ ) erblich durch Ordinalzahlen definierbaren Mengen.

Diese Definition ist in  $V$  zu verstehen. Die definierende Formel  $\phi$  ist also eine Formel im Sinne von  $V$  und nicht in der Metasprache. (Ansonsten wäre es auch schwierig, zu einer definierbaren Klasse zu gelangen.) Man beachte, dass man alternativ anstelle von

$$X = \{x : V_\alpha \models \phi(x, \beta_1, \dots, \beta_n)\}$$

auch

$$V_\alpha \models \phi(X, \beta_1, \dots, \beta_n) \wedge \forall Y (\phi(Y, \beta_1, \dots, \beta_n) \rightarrow X = Y)$$

fordern kann. Das liefert eine äquivalente Definition der Klassen OD und HOD. Entsprechendes gilt für  $OD(A)$  und  $HOD(A)$ . In diesem Falle muss man nur noch die Parameter  $c_1, \dots, c_m$  ergänzen. Wir werden diese Bemerkung im nächsten Abschnitt stillschweigend benutzen.

Wir interessieren uns für die Klasse  $HOD(A)$  für eine Menge  $A$ .

**Lemma 8.2.** *Für jede Menge  $A$  ist  $HOD(A)$  eine transitive Klasse, die ZF erfüllt.*

*Beweis.* Es folgt unmittelbar aus der Definition, dass  $HOD(A)$  transitiv ist. Damit erfüllt  $HOD(A)$  das Fundierungs- und das Extensionalitätsaxiom. Offenbar enthält  $HOD(A)$  alle Ordinalzahlen. Insbesondere gelten in  $HOD(A)$  das Nullmengen- und das Unendlichkeitsaxiom. Man sieht leicht, dass  $HOD(A)$  abgeschlossen ist unter der Bildung von Paarmengen und unter der Operation  $\cup$ . Damit erfüllt  $HOD(A)$  das Paarmengen- und das Vereinigungsaxiom.

Für jedes  $\alpha \in \text{Ord}$  sei  $HOD_\alpha(A) := V_\alpha \cap HOD(A)$ . Es gilt  $HOD_\alpha(A) \in HOD(A)$ . Sei nämlich  $\phi(x, A)$  die Formel, die die Klasse  $HOD(A)$  definiert. Nach dem Reflexionsprinzip existiert eine Ordinalzahl  $\beta$  mit  $A \in V_\beta$ , so dass  $\phi(x, y)$  über  $V_\beta$  absolut ist. Es gilt also  $(HOD(A))^{V_\beta} = HOD(A) \cap V_\beta$ . Damit ist

$$HOD_\alpha(A) = \{x : \forall y \in \text{trcl}(x \cup \{x\})(V_\beta \models (y \in V_\alpha \wedge y \in HOD(A)))\}.$$



Um das Aussonderungssaxiom in  $\text{HOD}(A)$  nachzurechnen, wenden wir das Reflexionsprinzip in  $\text{HOD}(A)$  auf die Folge  $(\text{HOD}_\alpha(A))_{\alpha \in \text{Ord}}$  an. Sei  $X \in \text{HOD}(A)$  und  $\phi(x, y_1, \dots, y_n)$  eine Formel. Weiter seien  $b_1, \dots, b_n \in \text{HOD}(A)$ . Wir zeigen  $Y := \{x \in X : \phi(x, b_1, \dots, b_n)^{\text{HOD}(A)}\} \in \text{HOD}(A)$ .

Nach dem Reflexionsprinzip existiert ein  $\alpha \in \text{Ord}$  mit  $b_1, \dots, b_n, X \in \text{HOD}_\alpha(A)$ , so dass  $\phi$  über  $\text{HOD}_\alpha(A)$  absolut ist. Es gilt also

$$Y = \{x \in X : \phi(x, b_1, \dots, b_n)^{\text{HOD}_\alpha(A)}\}.$$

Wie oben gezeigt, ist  $\text{HOD}_\alpha(A) \in \text{HOD}(A)$ . Insbesondere ist  $\text{HOD}_\alpha(A)$  durch Ordinalzahlen definierbar über  $A$ . Damit ist auch

$$Y = \{x \in X : \text{HOD}_\alpha(A) \models \phi(x, b_1, \dots, b_n)\}$$

über  $A$  durch Ordinalzahlen definierbar. Also gilt  $Y \in \text{OD}(A)$ . Wegen  $X \in \text{HOD}(A)$  und  $Y \subseteq X$  folgt daraus  $Y \in \text{HOD}(A)$ .

Dass  $\text{HOD}(A)$  das Potenzmengen- und das Aussonderungssaxiom erfüllt, folgt auf dieselbe Weise wie schon bei  $L$  und  $\text{WF}$  aus der Tatsache, dass  $\text{HOD}(A)$  die Vereinigung über die aufsteigende Kette  $(\text{HOD}_\alpha(A))_{\alpha \in \text{Ord}}$  ist, wobei alle  $\text{HOD}_\alpha(A)$  Elemente von  $\text{HOD}(A)$  sind.  $\square$

Man kann zeigen, dass  $\text{HOD}$  das Auswahlaxiom erfüllt. Es kann jedoch sein, dass für eine geeignete Menge  $A$  das Auswahlaxiom in  $\text{HOD}(A)$  verletzt wird. Das kann jedoch nur passieren, wenn  $V \neq L$  ist, da wegen der Minimalität von  $L$  sonst  $\text{HOD}(A) = L$  für alle Mengen  $A$  gilt.

**8.2. Ein Modell von  $\neg\text{AC}$ .** Die Strategie, ein Modell von  $\neg\text{AC}$  zu konstruieren ist folgende: Wir starten mit einem abzählbaren, transitiven Modell  $M$  von ZFC. Dann adjungieren wir, für eine geeignete Halbordnung  $\mathbb{P}$ , einen  $\mathbb{P}$ -generischen Filter  $G$  über  $M$ . In  $M[G]$  definieren wir eine Menge  $A$ , so dass in  $(\text{HOD}(A))^{M[G]}$  das Auswahlaxiom verletzt ist. Das Argument, mit dem man zeigt, dass das Auswahlaxiom in  $(\text{HOD}(A))^{M[G]}$  nicht gilt, benutzt Automorphismen von  $\mathbb{P}$ .

**Definition 8.3.** Sei  $\mathbb{P} \in M$  eine Halbordnung und  $\pi$  ein Automorphismus. Rekursiv über den Rang von  $\mathbb{P}$ -Namen definieren wir  $\bar{\pi} : M^{\mathbb{P}} \rightarrow M^{\mathbb{P}}$ , so dass für alle  $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$  gilt:

$$\bar{\pi}(\sigma) := \{(\bar{\pi}(\tau), \pi(p)) : (\tau, p) \in \sigma\}$$

**Lemma 8.4.** Ist  $\mathbb{P} \in M$  eine Halbordnung und  $\pi \in M$  ein Automorphismus von  $\mathbb{P}$ , so gilt für alle  $p \in \mathbb{P}$ , alle Formeln  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  und alle  $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in M^{\mathbb{P}}$ :

$$p \Vdash \phi(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \Leftrightarrow \pi(p) \Vdash \phi(\bar{\pi}(\sigma_1), \dots, \bar{\pi}(\sigma_n))$$

*Beweis.* Der Beweis geht leicht durch indem man die einzelnen Rekursionsschritte in der Definition der Forcingrelation prüft. Alternativ kann man auch direkt die äußere Definition der Forcingrelation mit Hilfe von generischen Filtern über  $M$  betrachten. Wegen  $\pi \in M$  gehen generische Filter über  $M$  unter  $\pi$  in generische Filter über. Das zusammen mit der Tatsache, dass  $\bar{\pi}$  "richtig" definiert ist, liefert dann die Behauptung.  $\square$

**Satz 8.5.** Sei  $M$  abzählbares, transitives Modell von ZFC und  $\mathbb{P} := \text{Fn}(\omega, 2)$ .  $G$  sei  $\mathbb{P}$ -generisch über  $M$ . Dann existiert eine Menge  $A \in M[G]$ , so dass  $\text{AC}$  in  $N := (\text{HOD}(A))^{M[G]}$  verletzt ist.

*Beweis.* Wir tun so, als ob  $G$   $\text{Fn}(\omega \times \omega, 2)$ -generisch ist. Setze  $f_G := \bigcup G$ . Dann ist  $f_G$  eine Funktion von  $\omega \times \omega$  nach  $2$ . Für jedes  $n \in \omega$  sei  $a_n := \{m \in \omega : f_G(n, m) = 1\}$ . Wie im Beweis der relativen Konsistenz von  $\neg\text{CH}$  sieht man, dass die  $a_n$  paarweise verschieden sind. Setze  $A := \{a_n : n \in \omega\}$ . Wie man leicht sieht, ist  $\sigma_n := \{(\check{m}, \{((n, m), 1)\}) : m \in \omega\}$  ein Name für  $a_n$ . Genauer, für jeden generischen

Filter  $F$  erfüllt  $(\sigma_n)_F$  die Definition von  $a_n$ . Setze  $\tau := \{(\sigma_n, 1_{\text{Fn}(\omega \times \omega, 2)}) : n \in \omega\}$ . Dann ist  $\tau$  ein Name für  $A$ .

Beachte, dass  $A$  Element und Teilmenge von  $(\text{HOD}(A))^{M[G]}$  ist. Wir zeigen, dass sich  $A$  in  $(\text{HOD}(A))^{M[G]}$  nicht wohlordnen lässt. Wegen  $(\text{HOD}(A))^{M[G]} \models A \subseteq \mathcal{P}(\omega)$  folgt daraus, dass sich auch  $\mathcal{P}(\omega)$  in  $(\text{HOD}(A))^{M[G]}$  nicht wohlordnen lässt.

Angenommen, es gibt in  $(\text{HOD}(A))^{M[G]}$  eine Wohlordnung von  $A$ . Dann existiert in  $(\text{HOD}(A))^{M[G]}$  auch eine injektive Abbildung  $e$  von  $A$  in die Ordinalzahlen. Wir argumentieren jetzt in  $M[G]$ . Seien  $\phi(x, y_1, \dots, y_k, z_1, \dots, z_l, z)$  eine Formel,  $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \text{Ord}$  und  $c_1, \dots, c_l \in A$ , so dass  $e$  in  $V_\alpha$  durch die Formel  $\phi(x, \alpha_1, \dots, \alpha_k, c_1, \dots, c_l, A)$  definiert wird.

Mit den Parametern  $c_1, \dots, c_l \in A$  und  $A$  selbst sowie zusätzlichen Ordinalzahlen lässt sich also in  $V_\alpha$  die Injektion  $e : A \rightarrow \text{Ord}$  definieren. Daraus folgt, dass sich jedes  $a_n$  mit den Parametern  $c_1, \dots, c_l, A$  zusammen mit zusätzlichen Ordinalzahlen in  $V_\alpha$  definieren lässt. Man muss nur noch die Ordinalzahl  $e(a_n)$  angeben.

Für  $i \in \{1, \dots, l\}$  sei  $n_i \in \omega$ , so dass  $c_i = a_{n_i}$  gilt. Wähle  $n \in \omega \setminus \{n_1, \dots, n_l\}$ . Dann gibt es eine Formel  $\psi(x, y_1, \dots, y_{k+1}, z_1, \dots, z_l, z)$  und  $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_{k+1} \in \text{Ord}$ , so dass  $a_n$  die einzige Menge in  $V_\alpha$  mit

$$V_\alpha \models \psi(a_n, \alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}, c_1, \dots, c_l, A)$$

ist. Wir zeigen, dass diese Situation von keiner Bedingung in  $\mathbb{P}$  erzwungen werden kann. Ein Widerspruch.

Sei  $p \in \mathbb{P}$  mit

$$p \Vdash (V_\alpha \models \psi(\sigma_n, \alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}, \sigma_{n_1}, \dots, \sigma_{n_l}, \tau)).$$

Wähle  $m \in \omega \setminus \{n_1, \dots, n_l, n\}$ , so dass für alle  $i \in \omega$  gilt:  $(m, i) \notin \text{dom}(p)$ . Sei  $g : \omega \times \omega \rightarrow \omega \times \omega$  die Bijektion, die alle Paare  $(n, i) \in \omega \times \omega$  mit  $(m, i)$  vertauscht und alle anderen Elemente von  $\omega \times \omega$  fest lässt. Die Abbildung  $g$  induziert einen Automorphismus  $\pi$  von  $\mathbb{P}$ .

Dieser Automorphismus hat folgende Eigenschaften:

- (1)  $\bar{\pi}(\tau) = \tau$
- (2)  $\bar{\pi}(\sigma_n) = \sigma_m$
- (3)  $\forall i \in \omega \setminus \{n, m\} (\bar{\pi}(\sigma_i) = \sigma_i)$
- (4)  $\pi(p) \not\leq p$

Einer näheren Erklärung bedarf höchstens (4). Da  $\{m\} \times \omega$  von  $\text{dom}(p)$  disjunkt ist, ist  $\text{dom}(p) \cap \text{dom}(\pi(p)) \subseteq (\omega \setminus \{n, m\}) \times \omega$ . Die Menge  $(\omega \setminus \{n, m\}) \times \omega$  wird aber von  $g$  punktweise fixiert. Damit ist  $p \upharpoonright (\omega \setminus \{n, m\}) \times \omega = \pi(p) \upharpoonright (\omega \setminus \{n, m\}) \times \omega$ . Also sind  $p$  und  $\pi(p)$  kompatibel. Sei  $q$  eine gemeinsame Erweiterung von  $p$  und  $\pi(p)$ . Dann gilt

$$q \Vdash (V_\alpha \models \psi(\sigma_m, \alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}, \sigma_{n_1}, \dots, \sigma_{n_l}, \tau)).$$

Wegen  $1_{\mathbb{P}} \Vdash \sigma_n \neq \sigma_m$  folgt daraus, dass  $q$  erzwingt, dass es zwei verschiedene Mengen  $x$  mit

$$V_\alpha \models \psi(x, \alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}, \sigma_{n_1}, \dots, \sigma_{n_l}, \tau)$$

gibt. Insbesondere kann  $p$  nicht erzwingen, dass es nur eine solche Menge gibt.  $\square$

**Korollar 8.6.** *Mit ZFC ist auch ZFC+¬AC konsistent.*

Wir beenden diesen Abschnitt mit einem technischen Lemma, das sich oft als nützlich erweist. Im Beweis von Satz 8.5 haben wir explizit Namen für die  $a_n$  konstruiert, die für jeden generischen Filter Mengen lieferten, die die Definition der  $a_n$  erfüllen. Das folgende Lemma zeigt, dass so etwas allgemein möglich ist.

**Lemma 8.7.** (*Existential Completeness Lemma bzw. Maximality Principle*) Sei  $\mathbb{P}$  eine Halbordnung in einem abzählbaren, transitiven Modell  $M$  von ZFC und  $\phi(x, y_1, \dots, y_n)$  eine Formel. Weiter seien  $\tau_1, \dots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$  und  $p \in \mathbb{P}$  mit

$$p \Vdash \exists x \phi(x, \tau_1, \dots, \tau_n).$$

Dann existiert  $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$  mit

$$p \Vdash \phi(\sigma, \tau_1, \dots, \tau_n).$$

Zum Beweis dieses Lemmas benutzen wir die folgende Übung.

**Übung 8.8.** Sei  $\mathbb{P}$  eine Halbordnung und  $p \in \mathbb{P}$ . Weiter sei  $A$  eine Antikette von Elementen unterhalb von  $p$ . Für jedes  $q \in A$  sei  $\sigma_q$  ein  $\mathbb{P}$ -Name. Dann existiert ein  $\mathbb{P}$ -Name  $\sigma$ , so dass für alle  $q \in A$  gilt: Ist  $G$  ein  $\mathbb{P}$ -generischer Filter mit  $q \in G$ , so gilt  $\sigma_G = \sigma_q$ .

*Beweis von Lemma 8.7.* Sei  $q \leq p$  und  $G$  ein  $\mathbb{P}$ -generischer Filter über dem Grundmodell  $M$ , der  $q$  enthält. Wegen  $p \Vdash \exists x \phi(x, \tau_1, \dots, \tau_n)$  und  $p \in G$  gilt

$$M[G] \models \exists x \phi(x, (\tau_1)_G, \dots, (\tau_n)_G).$$

Sei  $a \in M[G]$  eine Menge mit

$$M[G] \models \phi(a, (\tau_1)_G, \dots, (\tau_n)_G)$$

und sei  $\tau$  ein Name mit  $\tau_G = a$ . Dann existiert eine Bedingung  $r \in G$  mit

$$r \Vdash \phi(\tau, \tau_1, \dots, \tau_n).$$

O.B.d.A. können wir dabei  $r \leq q$  annehmen. Dieses Argument zeigt, dass die Menge

$$D := \{r \leq q : \text{Es gibt einen Namen } \tau \text{ mit } r \Vdash \phi(\tau, \tau_1, \dots, \tau_n)\}$$

dicht unterhalb von  $p$  ist.

Wähle eine maximale Antikette  $A \subseteq D$ . Für jedes  $r \in A$  sei  $\sigma_r$  ein Name mit

$$r \Vdash \phi(\sigma_r, \tau_1, \dots, \tau_n).$$

Sei  $\sigma$  eine Name wie in Übung 8.8 für  $A$  und die  $\sigma_r$ ,  $r \in A$ . Es ist eine leichte Übung, zu zeigen, dass  $\sigma$  das Gewünschte leistet.  $\square$

**Übung 8.9.** Man führe den Beweis von Lemma 8.7 zuende, indem man

$$p \Vdash \phi(\sigma, \tau_1, \dots, \tau_n)$$

nachrechnet.

## 9. MARTINS AXIOM

Für Modelle der Mengenlehre, in denen CH falsch ist, drängen sich gewisse Fragen auf.

1. Sei  $\kappa < 2^{\aleph_0}$  eine Kardinalzahl. Gilt  $2^\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ ?
2. Wieviele Nullmengen (bezüglich der Lebesgueschen Maßes auf  $\mathbb{R}$ ) braucht man, um  $\mathbb{R}$  zu überdecken?
3. Sei  $X$  ein topologischer Raum.  $A \subseteq X$  heißt *nirgends dicht*, wenn das Innere des Abschlusses von  $A$  leer ist. Wieviele nirgends dichte Teilmengen von  $\mathbb{R}$  werden benötigt, um ganz  $\mathbb{R}$  zu überdecken?
4. Eine Familie  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$  heißt *fast disjunkt*, falls für alle  $A, B \in \mathcal{A}$  mit  $A \neq B$  gilt:  $|A \cap B| < \aleph_0$ . Das Zornsche Lemma liefert die Existenz maximal fast disjunkter Familien von Teilmengen von  $\omega$ . Hat jede unendliche, maximal fast disjunkte Familie die Mächtigkeit  $2^{\aleph_0}$ ?

Alle diese Fragen haben gemeinsam, dass die Antwort unter CH klar ist. Ist  $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ , so gilt für alle Kardinalzahlen  $\kappa < 2^{\aleph_0}$ :  $\kappa \leq \aleph_0$ . Damit ist  $2^\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ .

Es ist klar, dass die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen wieder eine Nullmenge ist. Damit ist  $\mathbb{R}$  nicht Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen. Unter CH ist  $|\mathbb{R}| = \aleph_1$ . Da jede einelementige Teilmenge von  $\mathbb{R}$  Nullmenge ist, folgt daraus, dass  $\mathbb{R}$  die Vereinigung von  $\aleph_1$  Nullmengen ist.

Der Bairesche Satz besagt, dass  $\mathbb{R}$  nicht abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen ist. Wie im Falle der Nullmengen ist  $\mathbb{R}$  unter CH Vereinigung von  $\aleph_1$  nirgends dichten Mengen.

Mit einem Diagonalargument sieht man leicht, dass keine abzählbar unendliche Familie von Teilmengen von  $\omega$  maximal fast disjunkt ist. Daraus folgt sofort, dass unter CH alle unendlichen, maximal fast disjunkten Familien von Teilmengen von  $\omega$  die Mächtigkeit  $\aleph_1$  haben.

Martins Axiom beantwortet auch all diese Fragen, und zwar ohne auf CH zurückzugreifen. Die eigentliche Motivation für Martins Axiom war jedoch eine andere. Eine lineare Ordnung  $(L, \leq)$  ist *c.c.c.*, falls es in  $L$  keine überabzählbare Familie von nichtleeren, paarweise disjunkten offenen Intervallen gibt.  $(L, \leq)$  ist *separabel*, wenn  $L$  eine abzählbare dichte Teilmenge hat.  $L$  ist *zusammenhängend*, wenn  $L$  nicht die Vereinigung zweier disjunkter, nichtleerer offener Teilmengen ist.

Es ist relativ leicht zu sehen, dass jede zusammenhängende, separable lineare Ordnung ohne Endpunkte zu  $\mathbb{R}$  isomorph ist. *Suslins Hypothese* (SH) ist die Aussage, dass jede zusammenhängende lineare Ordnung ohne Endpunkte, die c.c.c. ist, zu  $\mathbb{R}$  isomorph ist. CH reicht nicht aus, um SH zu entscheiden. In L ist SH falsch. Martins Axiom wurde erfunden, als man ein Modell der Mengenlehre konstruieren wollte, in dem SH wahr ist.

### 9.1. Martins Axiom und seine Anwendungen.

**Definition 9.1.** Sei  $\kappa$  eine Kardinalzahl.  $MA_\kappa$  ist die Aussage “für jede c.c.c. Halbordnung  $\mathbb{P}$  und jede Familie  $\mathcal{D}$  von  $\kappa$  dichten Teilmengen von  $\mathbb{P}$  existiert ein  $\mathcal{D}$ -generischer Filter  $G \subseteq \mathbb{P}$ ”. *Martins Axiom* (MA) ist die Aussage “für alle  $\kappa < 2^{\aleph_0}$  gilt  $MA_\kappa$ ”.

Nach dem Satz von Rasiowa und Sikorski gilt  $MA_{\aleph_0}$ . Damit folgt MA aus CH. Als Axiom interessant ist daher meistens nur  $MA + \neg CH$ . Man sieht leicht, dass  $MA_{2^{\aleph_0}}$  falsch ist. Damit umfasst MA alle relevanten Instanzen von  $MA_\kappa$ .

Die einfacheren Anwendungen von Martins Axiom sind die Antworten auf die Fragen 2. und 3.

**Satz 9.2.** *Martins Axiom impliziert, dass  $\mathbb{R}$  nicht die Vereinigung von weniger als  $2^{\aleph_0}$  Nullmengen und auch nicht die Vereinigung von weniger  $2^{\aleph_0}$  nirgends dichten Mengen ist.*

*Beweis.* Um zu zeigen, dass  $\mathbb{R}$  nicht die Vereinigung von weniger als  $2^{\aleph_0}$  Nullmengen ist, genügt es, selbiges für  $[0, 1]$  zu zeigen. Sei  $A$  eine Familie von Nullmengen in  $[0, 1]$  mit  $|A| < 2^{\aleph_0}$ . Betrachte die Halbordnung  $\mathbb{M}$  der messbaren Teilmengen von  $[0, 1]$ , deren Maß echt größer als 0 ist. Für  $a \in \mathbb{M}$  sei  $\mu(a)$  das Maß von  $a$ .

$\mathbb{M}$  ist c.c.c.: Sei nämlich  $(b_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$  eine Antikette in  $\mathbb{M}$ . Für  $a, b \in \mathbb{M}$  gilt  $a \perp b$  genau dann, wenn  $a \cap b$  eine Nullmenge ist. Ist  $a \perp b$ , so stimmt  $b \setminus a$  bis auf eine Nullmenge mit  $b$  überein und ist disjunkt zu  $a$ . Da abzählbare Vereinigungen von Nullmengen wieder Nullmengen sind, lassen sich die  $b_\alpha$  induktiv so um Nullmengen abändern, dass sie paarweise disjunkt werden. Wir können also annehmen, dass die  $b_\alpha$  paarweise disjunkt sind.

Für jedes  $n \in \omega$  sei  $B_n := \{\alpha < \omega_1 : \mu(b_\alpha) > \frac{1}{2^n}\}$ . Wegen  $\sum_{\alpha \in B_n} \mu(b_\alpha) = \mu(\bigcup_{\alpha \in B_n} b_\alpha) \leq 1$  ist jedes  $B_n$  endlich. Damit ist  $\bigcup_{n \in \omega} B_n$  abzählbar. Es gilt aber  $\bigcup_{n \in \omega} B_n = \omega_1$ . Ein Widerspruch.

Sei nun  $\mathbb{P}$  die Halbordnung der abgeschlossenen Elemente von  $\mathbb{M}$ . Wie man (hoffentlich) in der Analysis gelernt hat, ist  $\mathbb{P}$  dicht in  $\mathbb{M}$ . Mit  $\mathbb{M}$  ist auch  $\mathbb{P}$  c.c.c. Für jedes  $a \in A$  sei  $D_a := \{b \in \mathbb{P} : a \cap b = \emptyset\}$ . Wie man leicht sieht, ist jedes  $D_a$  dicht. Martins Axiom impliziert, dass ein  $\{D_a : a \in A\}$ -generischer Filter  $G \subseteq \mathbb{P}$  existiert.

Da  $G$  unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen und  $[0, 1]$  kompakt ist, existiert  $x \in \bigcap G$ . Wegen der Generalität von  $G$  ist  $x \notin \bigcup A$ . Wegen  $x \in [0, 1]$  zeigt das, dass  $[0, 1]$  nicht die Vereinigung über  $A$  ist.

Das Argument für nirgends dichte Mengen geht im wesentlichen genauso und benutzt die Halbordnung der Abschlüsse von nichtleeren offenen Teilmengen von  $\mathbb{R}$ .  $\square$

Um zu zeigen, dass  $\text{MA} + \neg\text{CH}$  Suslins Hypothese impliziert, benutzen wir eine halbordnungstheoretische Folgerung von Martins Axiom. Eine Halbordnung  $\mathbb{P}$  hat die *Knaster-Eigenschaft*, wenn jede überabzählbare Teilmenge von  $\mathbb{P}$  eine überabzählbare Teilmenge von paarweise kompatiblen Elementen hat. Offenbar hat jede Halbordnung mit der Knaster-Eigenschaft die c.c.c. Unter MA gilt auch die Umkehrung.

**Lemma 9.3.** *Unter  $\text{MA}_{\aleph_1}$  hat jede c.c.c. Halbordnung die Knaster-Eigenschaft.*

*Beweis.* Sei  $\mathbb{P}$  eine c.c.c. Halbordnung und  $(p_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$  eine Folge von Bedingungen in  $\mathbb{P}$ . Für alle  $\alpha < \omega_1$  sei

$$A_\alpha := \text{reg}(\{p_\beta : \alpha \leq \beta < \omega_1\}).$$

$(A_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$  ist eine monoton fallende Folge von regulär offenen Teilmengen von  $\mathbb{P}$ . Wegen der c.c.c. von  $\mathbb{P}$  existiert ein  $\alpha < \omega_1$ , ab dem diese Folge konstant wird. Für dieses  $\alpha$  betrachte die Halbordnung  $\mathbb{Q} := A_\alpha$ .

Auch  $\mathbb{Q}$  ist c.c.c. Für jedes  $\beta < \omega_1$  sei

$$D_\beta := \{q \in \mathbb{Q} : \exists \gamma < \omega_1 (\gamma \geq \beta \wedge q \leq p_\gamma)\}.$$

Wegen der Wahl von  $\mathbb{Q}$  ist jedes  $D_\beta$  dicht in  $\mathbb{Q}$ . Sei nun  $G \subseteq \mathbb{Q}$  ein  $\{D_\beta : \beta < \omega_1\}$ -generischer Filter. Dann sind die Elemente von  $G$  paarweise kompatibel, und für jedes  $\beta < \omega_1$  existiert ein  $\gamma < \omega_1$  mit  $\gamma \geq \beta$  und  $p_\gamma \in G$ . Das zeigt die Knaster-Eigenschaft von  $\mathbb{P}$ .  $\square$

**Übung 9.4.** Es sei  $L$  eine zusammenhängende, separable lineare Ordnung und  $\mathbb{P}$  die Menge der nichtleeren, offenen Intervalle von  $L$ , geordnet durch Inklusion. Zeige, dass  $\mathbb{P}$  die Knaster-Eigenschaft hat.

Die Knaster-Eigenschaft verhält sich etwas besser als die c.c.c., was Produkte von Halbordnungen angeht.

**Definition 9.5.**  $\mathbb{P}$  und  $\mathbb{Q}$  seien Halbordnungen. Das *Produkt* von  $\mathbb{P}$  und  $\mathbb{Q}$  ist  $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$  komponentenweise geordnet.

**Lemma 9.6.** *Haben  $\mathbb{P}$  und  $\mathbb{Q}$  die Knaster-Eigenschaft, so auch  $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ . Insbesondere ist  $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$  dann c.c.c.*

*Beweis.* Sei  $(p_\alpha, q_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$  eine Folge in  $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ . Wähle eine überabzählbare Menge  $S \subseteq \omega_1$ , so dass die  $p_\alpha$ ,  $\alpha \in S$ , paarweise kompatibel sind. Wähle eine überabzählbare Menge  $T \subseteq S$ , so dass die  $q_\alpha$ ,  $\alpha \in T$ , paarweise kompatibel sind. Wie man leicht sieht, sind auch die  $(p_\alpha, q_\alpha)$ ,  $\alpha \in T$ , paarweise kompatibel in  $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ .  $\square$

Aus Lemma 9.3 und Lemma 9.6 folgt sofort

**Korollar 9.7.** *Unter  $\text{MA}_{\aleph_1}$  sind Produkte von c.c.c. Halbordnungen wieder c.c.c.*

**Satz 9.8.**  $\text{MA}_{\aleph_1}$  impliziert SH.

*Beweis.* Sei  $L$  eine zusammenhängende lineare Ordnung ohne Endpunkte, die c.c.c. ist. Wir zeigen, dass  $L$  separabel ist. Betrachte die Halbordnung  $\mathbb{P}$  der nichtleeren offenen Intervalle von  $L$ . Mit  $L$  ist auch  $\mathbb{P}$  c.c.c.

Angenommen,  $L$  ist nicht separabel. Dann existieren  $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha \in L$ ,  $\alpha < \omega_1$ , mit

- (i)  $a_\alpha < b_\alpha < c_\alpha$  und
- (ii)  $(a_\alpha, c_\alpha) \cap \{b_\beta : \beta < \alpha\} = \emptyset$ .

Für alle  $\alpha < \omega_1$  sei  $p_\alpha := (a_\alpha, b_\alpha)$  und  $q_\alpha := (b_\alpha, c_\alpha)$ . Für alle  $\alpha, \beta < \omega_1$  mit  $\alpha < \beta$  gilt dann  $b_\alpha \notin (a_\beta, c_\beta)$ . Ist  $b_\alpha \leq a_\beta$ , so ist  $p_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha)$  disjunkt von  $p_\beta = (a_\beta, b_\beta)$ . Ist  $b_\alpha \geq c_\beta$ , so ist  $q_\alpha = (b_\alpha, c_\alpha)$  disjunkt von  $q_\beta = (b_\beta, c_\beta)$ . Insgesamt ist  $(p_\alpha, q_\alpha)$  inkompatibel zu  $(p_\beta, q_\beta)$  in  $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ . Also ist  $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$  nicht c.c.c. Das widerspricht aber Korollar 9.7.  $\square$

**Übung 9.9.** Sei  $L$  eine zusammenhängende lineare Ordnung ohne Endpunkte. Wie oben sei  $\mathbb{P}$  die Halbordnung der nichtleeren offenen Intervalle von  $L$ . Zeige: Hat  $\mathbb{P}$  die Knaster-Eigenschaft, so ist  $L$  separabel.

Um die Konsistenz von  $\text{MA} + \neg\text{CH}$  zu zeigen, benötigen wir noch eine Charakterisierung von  $\text{MA}_\kappa$ .

**Lemma 9.10.** *Sei  $\kappa$  eine unendliche Kardinalzahl. Dann gilt  $\text{MA}_\kappa$  genau dann, wenn  $\text{MA}_\kappa$  eingeschränkt auf Halbordnungen der Mächtigkeit  $\leq \kappa$  gilt.*

*Beweis.* Sei  $(\mathbb{P}, \leq)$  eine c.c.c. Halbordnung und  $(D_\alpha)_{\alpha < \kappa}$  eine Familie von dichten Teilmengen von  $\mathbb{P}$ . Betrachte die Struktur  $(\mathbb{P}, \leq, D_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ . Diese Struktur ist eine Struktur in einer Sprache der Mächtigkeit  $\kappa$ . Mit Hilfe von Skolem-Funktionen sieht man, dass eine Unterhalbordnung  $\mathbb{Q}$  von  $\mathbb{P}$  existiert, so dass gilt:

- (i)  $|\mathbb{Q}| \leq \kappa$
- (ii)  $\forall p, q \in \mathbb{Q} (p \perp_{\mathbb{Q}} q \leftrightarrow p \perp_{\mathbb{P}} q)$
- (iii)  $\forall \alpha < \kappa (D_\alpha \cap \mathbb{Q}$  ist dicht in  $\mathbb{Q})$

(Man kann  $\mathbb{Q}$  einfach nach dem Satz von Löwenheim-Skolem als elementare Unterstruktur von  $(\mathbb{P}, \leq, D_\alpha)_{\alpha < \kappa}$  mit Mächtigkeit  $\leq \kappa$  wählen.) Wegen (ii) ist mit  $\mathbb{P}$  auch  $\mathbb{Q}$  c.c.c. Nach  $\text{MA}_\kappa$  für  $\mathbb{Q}$  existiert ein  $(D_\alpha \cap \mathbb{Q})_{\alpha < \kappa}$ -generischer Filter  $G \subseteq \mathbb{Q}$ . Der von  $G$  in  $\mathbb{P}$  erzeugte Filter ist offenbar  $(D_\alpha)_{\alpha < \kappa}$  generisch. Das zeigt  $\text{MA}_\kappa$  für  $\mathbb{P}$ .  $\square$

**9.2. Iteriertes Forcing.** Wir werden folgende Strategie anwenden, um ein Modell von  $\text{MA}+\neg\text{CH}$  zu konstruieren: Wie immer starten wir mit einem abzählbaren, transitiven Modell  $M$  der Mengenlehre. Wir setzen voraus, dass  $M$   $\text{CH}$  erfüllt.

Wir konstruieren eine aufsteigende Kette  $(M_\alpha)_{\alpha < (\aleph_2)^M}$  von generische Erweiterungen von  $M$ , so dass  $M_{\alpha+1}$  jeweils von der Form  $M_\alpha[G_\alpha]$  ist, wobei  $G_\alpha$  für eine gewisse Halbordnung  $\mathbb{P}_\alpha \in M_\alpha$  generisch über  $M_\alpha$  ist. Schließlich erhalten wir eine generische Erweiterung  $N$  von  $M$ , die das kleinste transitive Modell von  $\text{ZFC}$  ist, das  $M$  umfasst und die Folge  $(G_\alpha)_{\alpha < (\aleph_2)^M}$  enthält.

Alle  $M_\alpha$  werden Modelle von  $\text{CH}$  sein. In  $N$  wird  $2^{\aleph_0} = \aleph_2$  gelten. Die Kardinalzahlen von  $M$  sind genau die Kardinalzahlen von  $N$ . Die  $\mathbb{P}_\alpha$  werden so gewählt sein, dass für jede c.c.c. Halbordnung  $\mathbb{P} \in N$  mit  $N \models |\mathbb{P}| < 2^{\aleph_0}$  und jede Familie  $\mathcal{D} \in N$  von dichten Mengen in  $\mathbb{P}$  mit  $N \models |\mathcal{D}| < 2^{\aleph_0}$  ein  $\alpha < (\aleph_2)^M$  existiert, so dass folgendes gilt:

- (i)  $\mathbb{P} \in M_\alpha$
- (ii)  $M_\alpha \models \mathbb{P}_\alpha \cong \mathbb{P}$
- (iii)  $\mathcal{D} \subseteq M_\alpha$ .

Da  $G_\alpha$   $\mathbb{P}_\alpha$ -generisch über  $M_\alpha$  ist und  $\mathbb{P}_\alpha$  zu  $\mathbb{P}$  isomorph (in  $M_\alpha$ ), existiert in  $M_{\alpha+1}$ , und damit auch in  $N$ , ein  $\mathcal{D}$ -generischer Filter. Das zeigt, dass in  $N$  Martins Axiom eingeschränkt auf Halbordnungen der Mächtigkeit  $< 2^{\aleph_0}$  gilt. Nach Lemma 9.10 erfüllt  $N$  damit  $\text{MA}$ .

Die wesentliche technische Schwierigkeit in diesem Beweis ist, dass es unklar ist, wie man die Struktur  $N$  oder die  $M_\alpha$  für Limeszahlen  $\alpha$  konstruiert. Die Vereinigung der  $M_\alpha$  muss kein Modell der Mengenlehre sein. (Es gibt in der Modelltheorie zwar den Satz über elementare Ketten, aber die Kette der  $M_\alpha$  ist nicht elementar.) Die Lösung dieses Problems ist, dass man direkt eine Halbordnung in  $M$  konstruiert, die die verschiedenen  $G_\alpha$  adjungiert. Das nennt man iteriertes Forcing.

Wir betrachten zunächst die Zweischritt-Iteration. Sei  $\mathbb{P} \in M$  eine Halbordnung und  $G$   $\mathbb{P}$ -generisch über  $M$ . Weiter sei  $\mathbb{Q} \in M[G]$  eine Halbordnung und  $F$   $\mathbb{Q}$ -generisch über  $M[G]$ . Man erhält ein Modell  $M[G][F]$  der Mengenlehre (beachte, dass auch  $M[G]$  ein abzählbares, transitives Modell von  $\text{ZFC}$  ist). Wir versuchen,  $M[G][F]$  als einfache generische Erweiterung aufzufassen.

Wähle einen Namen  $\dot{\mathbb{Q}}$  mit  $\dot{\mathbb{Q}}_G = \mathbb{Q}$ . Dann existiert  $p \in G$  mit

$$p \Vdash \text{“}\dot{\mathbb{Q}} \text{ ist eine Halbordnung”}.$$

Nach Lemma 8.7 können wir sogar

$$1_{\mathbb{P}} \Vdash \text{“}\dot{\mathbb{Q}} \text{ ist eine Halbordnung”}$$

verlangen, denn offenbar gilt

$$1_{\mathbb{P}} \Vdash \exists x (x \text{ ist Halbordnung} \wedge (p \in \Gamma \rightarrow x = \dot{\mathbb{Q}})),$$

wobei  $\Gamma$  der Standardname für den  $\mathbb{P}$ -generischen Filter ist. Da wir angenommen haben, dass alle Halbordnungen ein maximales Element haben, können wir außerdem, wieder nach Lemma 8.7, annehmen, dass es einen Namen  $1_{\dot{\mathbb{Q}}}$  mit

$$1_{\mathbb{P}} \Vdash \text{“}1_{\dot{\mathbb{Q}}} \text{ ist das maximale Element von } \dot{\mathbb{Q}}\text{”}$$

und  $(1_{\dot{\mathbb{Q}}}, 1_{\mathbb{P}}) \in \dot{\mathbb{Q}}$ . Wir sagen, dass  $\dot{\mathbb{Q}}$  ein *Name für eine Halbordnung* ist. Beachte dabei, dass mit der üblichen Schlampigkeit die Halbordnung  $(\mathbb{Q}, \leq)$  mit der Menge  $\mathbb{Q}$  identifiziert wird.  $\dot{\mathbb{Q}}$  ist also streng genommen ein Name für ein Paar, nämlich eine Menge zusammen mit einer Relation. Wir werden  $\dot{\mathbb{Q}}$  aber auch als Namen für die unterliegende Menge benutzen (welches in Wirklichkeit ein anderer Name ist als der für ganze Halbordnung). Mit  $\leq$  bezeichnen wir einen Namen für die Ordnung

auf  $\dot{\mathbb{Q}}$ . Der Name  $\leq$  existiert wieder nach Lemma 8.7, ist aber, wie auch  $1_{\dot{\mathbb{Q}}}$ , nicht eindeutig bestimmt. Wir wählen irgendeinen.

**Definition 9.11.** Sei  $\mathbb{P} \in M$  eine Halbordnung und  $\dot{\mathbb{Q}} \in M^{\mathbb{P}}$  ein Name für eine Halbordnung. Setze

$$\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}} := \{(p, \dot{q}) : p \in \mathbb{P} \wedge \exists r \in \mathbb{P}((\dot{q}, r) \in \dot{\mathbb{Q}}) \wedge p \Vdash \dot{q} \in \dot{\mathbb{Q}}\}.$$

Für  $(p_0, \dot{q}_0), (p_1, \dot{q}_1) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$  sei  $(p_0, \dot{q}_0) \leq (p_1, \dot{q}_1)$  genau dann, wenn  $p_0 \leq p_1$  und  $p_0 \Vdash \dot{q}_0 \leq \dot{q}_1$ .

Wir zeigen, dass sich  $M[G][F]$  als  $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ -generische Erweiterung von  $M$  auffassen lässt.

**Definition 9.12.** Seien  $\mathbb{P}_0$  und  $\mathbb{P}_1$  Halbordnungen mit  $\mathbb{P}_0 \subseteq \mathbb{P}_1$ .  $\mathbb{P}_0$  ist *vollständig in  $\mathbb{P}_1$  eingebettet*, falls gilt:

- (i)  $\forall p, q \in \mathbb{P}_0 (p \perp_{\mathbb{P}_0} q \leftrightarrow p \perp_{\mathbb{P}_1} q)$
- (ii)  $\forall p \in \mathbb{P}_1 \exists q \in \mathbb{P}_0 \forall r \in \mathbb{P}_0 (r \leq q \rightarrow r \not\leq p)$

Beachte, dass sich mit (i) ein Index an  $\perp$  in (ii) erübrigt. Eine Bedingung  $q$  wie in (ii) heißt *Projektion von  $p$  auf  $\mathbb{P}_0$* .

**Übung 9.13.** Seien  $\mathbb{P}$  und  $\mathbb{Q}$  Halbordnungen. Wir identifizieren  $\mathbb{P}$  mit der Menge  $\mathbb{P} \times \{1_{\mathbb{Q}}\} \subseteq \mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ . Zeige, dass  $\mathbb{P}$  vollständig in  $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$  eingebettet ist.

**Lemma 9.14.** Seien  $\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1 \in M$  Halbordnungen und  $\mathbb{P}_0$  vollständig eingebettet in  $\mathbb{P}_1$ . Ist  $G$   $\mathbb{P}_1$ -generisch über  $M$ , so ist  $G \cap \mathbb{P}_0$   $\mathbb{P}_0$ -generisch über  $M$  und es gilt  $M[G \cap \mathbb{P}_0] \subseteq M[G]$ .

*Beweis.*  $M[G \cap \mathbb{P}_0] \subseteq M[G]$  ist klar, falls  $G \cap \mathbb{P}_0$   $\mathbb{P}_0$ -generisch über  $M$  ist. Wir zeigen, dass  $G \cap \mathbb{P}_0$  alle dichten Teilmengen von  $\mathbb{P}_0$  schneidet, die Elemente von  $M$  sind.

Sei  $D \in M$  eine dichte Teilmenge von  $\mathbb{P}_0$ . Betrachte  $D' := \{p \in \mathbb{P}_1 : \exists q \in D (p \leq q)\}$ . Dann ist  $D'$  dicht in  $\mathbb{P}_1$ . Sei nämlich  $p \in \mathbb{P}_1$ . Da  $\mathbb{P}_0$  vollständig in  $\mathbb{P}_1$  eingebettet ist, existiert eine Projektion  $q$  von  $p$  auf  $\mathbb{P}_0$ . Da  $D$  dicht in  $\mathbb{P}_0$  ist, existiert  $r \in D$  mit  $r \leq q$ . Nach Wahl von  $q$  ist  $r$  kompatibel mit  $p$ . Sei  $s \in \mathbb{P}_1$  mit  $s \leq r, p$ . Es gilt  $s \in D'$ . Das zeigt die Dichtheit von  $D'$  in  $\mathbb{P}_1$ . Wegen der Generizität von  $G$  schneidet  $G$  die Menge  $D'$ . Da  $G$  ein Filter ist, schneidet  $G$  auch  $D$ .

Es ist noch nicht klar, dass  $G \cap \mathbb{P}_0$  überhaupt ein Filter ist. Offenbar ist mit einer Bedingung  $q \in \mathbb{P}_0$  auch jede größere Bedingung in  $\mathbb{P}_0$  ein Element von  $G \cap \mathbb{P}_0$ . Seien  $p, q \in G \cap \mathbb{P}_0$ . Betrachte die Menge

$$D := \{r \in \mathbb{P}_0 : r \leq p, q \vee r \perp p \vee r \perp q\}.$$

$D$  ist dicht in  $\mathbb{P}_0$ . Sei nämlich  $s \in \mathbb{P}_0$  mit  $s \not\leq p$ . Dann existiert  $t \in \mathbb{P}_0$  mit  $t \leq s, p$ . Nun ist entweder  $t \perp q$  oder es gibt  $r \leq t$  mit  $r \leq p, q$ . In jedem Falle existiert  $r \in D$  mit  $r \leq s$ .

Wegen der Dichtheit von  $D$  existiert  $r \in D \cap G$ . Die Fälle  $r \perp p$  und  $r \perp q$  kommen nicht in Frage, da je zwei Elemente von  $G$  kompatibel sind. Also ist  $r \in G \cap \mathbb{P}_0$  eine gemeinsame Erweiterung von  $p$  und  $q$ . Damit ist  $G \cap \mathbb{P}_0$  in der Tat ein Filter.  $\square$

**Lemma 9.15.** Seien  $\mathbb{P}$  und  $\dot{\mathbb{Q}}$  wie in Definition 9.11. Identifiziere  $\mathbb{P}$  mit  $\{(p, 1_{\dot{\mathbb{Q}}}) : p \in \mathbb{P}\} \subseteq \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ . Dann ist  $\mathbb{P}$  vollständig eingebettet in  $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ .

*Beweis.* Seien  $p_0, p_1 \in \mathbb{P}$  kompatibel in  $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ . Dann existiert  $(p, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$  mit  $(p, \dot{q}) \leq (p_0, 1_{\dot{\mathbb{Q}}}), (p_1, 1_{\dot{\mathbb{Q}}})$ . Offenbar ist  $p$  gemeinsame Erweiterung von  $p_0$  und  $p_1$  in  $\mathbb{P}$ .

Für  $(p, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$  ist  $p$  eine Projektion von  $(p, \dot{q})$  auf  $\mathbb{P}$ .  $\square$



Dass sich  $M[G][F]$  als  $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ -generische Erweiterung auffassen lässt, besagt folgendes Lemma.

**Lemma 9.16.** *Seien  $\mathbb{P}$  und  $\dot{\mathbb{Q}}$  wie in Definition 9.11. Ist  $H$   $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ -generisch über  $M$ , so ist*

$$H_1 := \{\dot{q}_{H \cap \mathbb{P}} : \exists p \in \mathbb{P}((p, \dot{q}) \in H)\}$$

$\dot{\mathbb{Q}}_{H \cap \mathbb{P}}$ -generisch über  $M[H \cap \mathbb{P}]$  und es gilt  $M[H] = M[H \cap \mathbb{P}][H_1]$ . Ist umgekehrt  $G$   $\mathbb{P}$ -generisch über  $M$  und  $F$   $\dot{\mathbb{Q}}_G$ -generisch über  $M[G]$ , so ist

$$H := \{(p, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}} : p \in G \wedge \dot{q}_G \in F\}$$

$\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ -generisch über  $M$  und es gilt  $M[G][F] = M[H]$ .

*Beweis.* Sei  $H$   $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ -generisch über  $M$ . Da  $\mathbb{P}$  vollständig in  $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$  eingebettet ist, ist  $H_0 := H \cap \mathbb{P}$   $\mathbb{P}$ -generisch über  $M$ . Setze

$$H_1 := \{\dot{q}_{H_0} : \exists p \in \mathbb{P}((p, \dot{q}) \in H)\}.$$

Wir zeigen zunächst, dass  $H_1$  überhaupt ein Filter ist.

Sei  $q \in H_1$  und  $s \in \dot{\mathbb{Q}}_{H_0}$  mit  $q \leq s$ . Wähle  $(p, \dot{q}) \in H$  und  $\dot{s}$  mit  $\dot{q}_{H_0} = q$ ,  $(p, \dot{s}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$  und  $\dot{s}_{H_0} = s$ . Wegen  $q \leq s$  existiert  $t \in H_0$  mit  $t \Vdash \dot{q} \leq \dot{s}$ . Dabei können wir  $t \leq p$  wählen. Sei  $\dot{u}$  so gewählt, dass  $(t, \dot{u}) \in H$  gilt. Wir können annehmen, dass  $(t, \dot{u}) \leq (p, \dot{q})$  ist. Es gilt dann  $(t, \dot{u}) \leq (t, \dot{s})$ . Insbesondere ist  $(t, \dot{s}) \in H$ , also  $s \in H_1$ .

Seien nun  $q, s \in H_1$ . Wähle  $(p, \dot{q}), (r, \dot{s}) \in H$  mit  $\dot{q}_{H_0} = q$  und  $\dot{s}_{H_0} = s$ . Sei  $(t, \dot{u}) \in H$  eine gemeinsame Erweiterung von  $(p, \dot{q})$  und  $(r, \dot{s})$ . Dann ist  $t \in H_0$ ,  $\dot{u}_{H_0} \in H_1$  und es gilt  $t \Vdash \dot{u} \leq \dot{q}, \dot{s}$ . Damit ist  $\dot{u}_{H_0}$  eine gemeinsame Erweiterung von  $q$  und  $s$  in  $H_1$ . Das zeigt, dass  $H_1$  ein Filter ist.

Sei  $D \in M[H_0]$  eine dichte Teilmenge in  $\dot{\mathbb{Q}}_{H_0}$ . Wähle einen Namen  $\dot{D}$  für  $D$  und  $p \in H_0$  mit

$$p \Vdash \text{“}\dot{D} \text{ ist dicht in } \dot{\mathbb{Q}}\text{”}.$$

Betrachte die Menge

$$D' := \{(r, \dot{s}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}} : r \Vdash \dot{s} \in \dot{D}\}.$$

Wie man leicht nachrechnet, ist  $D'$  dicht unter  $(p, 1_{\dot{\mathbb{Q}}})$ . Damit existiert  $(r, \dot{s}) \in D' \cap H$ . Offenbar ist  $\dot{s}_{H_0} \in D \cap H_1$ . Die Gleichung  $M[H_0][H_1] = M[H]$  ist klar.

Sei nun  $G$   $\mathbb{P}$ -generisch über  $M$  und  $F$   $\dot{\mathbb{Q}}_G$ -generisch über  $M[G]$ . Setze

$$H := \{(p, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}} : p \in G \wedge \dot{q}_G \in F\}.$$

Wie man leicht nachrechnet, ist  $H$  ein Filter. Sei nun  $D \in M$  eine dichte Teilmenge von  $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ .

Setze  $D_1 := \{\dot{q}_G : \exists p \in G((p, \dot{q}) \in D)\}$ . Wir zeigen, dass  $D_1$  dicht in  $\dot{\mathbb{Q}}_G$  ist. Sei  $q \in \dot{\mathbb{Q}}_G$ . Wähle  $(p, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$  mit  $p \in G$  und  $\dot{q}_G = q$ . Wie man leicht sieht, ist die Menge

$$D_0 := \{r \in \mathbb{P} : \exists \dot{s}((r, \dot{s}) \leq (p, \dot{q}) \wedge (r, \dot{s}) \in D)\}$$

dicht unterhalb von  $p$ . Also existiert  $(r, \dot{s}) \in D$  mit  $(r, \dot{s}) \leq (p, \dot{q})$  und  $r \in G$ . Es ist  $\dot{s}_G \in D_1$  und  $\dot{s}_G \leq q = \dot{q}_G$ . Das zeigt die Dichtheit von  $D_1$ .

Wegen der Generizität von  $F$  existiert  $q \in D_1 \cap F$ . Wähle  $(p, \dot{q}) \in D$  mit  $p \in G$  und  $\dot{q}_G = q$ . Dann ist  $(p, \dot{q}) \in D \cap H$ . Es folgt, dass  $H$   $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ -generisch über  $M$  ist. Die Gleichung  $M[H] = M[G][F]$  ist wieder klar.  $\square$

Übrigens lässt sich für jede Halbordnung  $\mathbb{P}_1$  und jede vollständig eingebettete Unterhalbordnung  $\mathbb{P}_0$  die Halbordnung  $\mathbb{P}_1$  als Zweischnitt-Iteration der Form  $\mathbb{P}_0 * \dot{\mathbb{Q}}$  auffassen.

**Übung 9.17.** Sei  $\mathbb{P}$  eine Halbordnung und  $\dot{\mathbb{Q}}$  ein  $\mathbb{P}$ -Name mit

$$1_{\mathbb{P}} \Vdash \dot{\mathbb{Q}} = \text{Fn}(\omega, 2).$$

Zeige, dass  $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$  eine dichte Teilmenge hat, die zu  $\mathbb{P} \times \text{Fn}(\omega, 2)$  isomorph ist.

Als nächstes zeigen wir, dass die c.c.c. unter Iteration erhalten bleibt.

**Lemma 9.18.** Sei  $\mathbb{P} \in M$  eine Halbordnung und  $\dot{\mathbb{Q}} \in M$  ein  $\mathbb{P}$ -Name für eine Halbordnung. Angenommen  $\mathbb{P}$  ist c.c.c. (in  $M$ ) und es gilt  $1_{\mathbb{P}} \Vdash \dot{\mathbb{Q}}$  ist c.c.c. Dann ist  $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$  c.c.c. (in  $M$ ).

*Beweis.* Wir argumentieren zunächst in  $M$ . Sei  $(p_\alpha, \dot{q}_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$  eine Antikette in  $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ . Setze  $\sigma := \{(\check{\alpha}, p_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ . Der Name  $\sigma$  ist ein  $\mathbb{P}$ -Name für eine Teilmenge von  $\omega_1$ . Da  $\mathbb{P}$  c.c.c. ist, erhält  $\mathbb{P}$  Kardinalzahlen. Die Kardinalzahl  $\omega_1$  des Grundmodells ist also gleich dem  $\omega_1$  jeder  $\mathbb{P}$ -generischen Erweiterung.

Sei nun  $G$   $\mathbb{P}$ -generisch über  $M$  und  $\alpha, \beta \in \sigma_G$ . Angenommen,  $(\dot{q}_\alpha)_G$  ist kompatibel zu  $(\dot{q}_\beta)_G$ . Dann existiert ein Name  $\rho$  für eine Bedingung in  $\dot{\mathbb{Q}}_G$  mit  $\rho_G \leq (\dot{q}_\alpha)_G, (\dot{q}_\beta)_G$ . Wir können annehmen, dass ein  $r \in \mathbb{P}$  mit  $(r, \rho) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$  existiert. Es gibt  $p \in G$  mit

$$p \Vdash \rho \in \dot{\mathbb{Q}} \wedge \rho \leq \dot{q}_\alpha, \dot{q}_\beta.$$

Wegen  $\alpha, \beta \in \sigma_G$  gilt  $p_\alpha, p_\beta \in G$ . Also können wir  $p \leq p_\alpha, p_\beta$  annehmen. Damit ist  $(p, \rho) \in \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$  eine gemeinsame Erweiterung von  $(p_\alpha, \dot{q}_\alpha)$  und  $(p_\beta, \dot{q}_\beta)$ . Das zeigt  $\alpha = \beta$ . Es folgt, dass  $\sigma_G$  abzählbar ist. Insbesondere ist  $\text{sup}(\sigma_G) < \omega_1$ .

Wir argumentieren wieder in  $M$ . Sei  $\dot{\beta}$  ein  $\mathbb{P}$ -Name für das Supremum von  $\sigma$ . Da  $\mathbb{P}$  c.c.c. ist, gibt es in  $M$  eine abzählbare Menge  $A \subseteq \omega_1$  mit  $1_{\mathbb{P}} \Vdash \dot{\beta} \in \check{A}$ . Setze  $\gamma := \text{sup}(A)$ . Dann gilt  $1_{\mathbb{P}} \Vdash \dot{\beta} \leq \check{\gamma}$ . Wegen der Definition von  $\dot{\beta}$  bedeutet das für alle  $\delta < \omega_1$  mit  $\gamma < \delta$ :

$$1_{\mathbb{P}} \Vdash \check{p}_\delta \notin \Gamma,$$

wobei  $\Gamma$  wieder der Standardname für den  $\mathbb{P}$ -generischen Filter ist. Das ist aber absurd. Es folgt, dass  $(p_\alpha, \dot{q}_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$  keine Antikette ist.  $\square$

**9.3. Lange Iterationen.** Wir beschreiben eine Möglichkeit, Forcing-Iterationen unendlicher Länge zu konstruieren. Wir betrachten zunächst endliche Iterationen.

Seien  $\mathbb{P}$  eine Halbordnung und  $\dot{\mathbb{Q}}_1, \dots, \dot{\mathbb{Q}}_n$  so, dass jedes  $\dot{\mathbb{Q}}_i$  ein  $(\dots (\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}_1) \dots * \dot{\mathbb{Q}}_{i-1})$ -Name für eine Halbordnung ist. Dann ist  $(\dots (\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}_1) \dots * \dot{\mathbb{Q}}_n)$  eine Halbordnung, deren Elemente die Form  $(\dots (p, \dot{q}_1) \dots, \dot{q}_n)$  haben. Wir identifizieren  $(\dots (p, \dot{q}_1) \dots, \dot{q}_n)$  mit  $(p, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ . Wir können  $\mathbb{P}$  auch als einen  $\mathbb{P}_0$ -Namen  $\dot{\mathbb{Q}}_0$  für eine Halbordnung auffassen, wobei  $\mathbb{P}_0$  die triviale Halbordnung  $\{\emptyset\}$  ist. In diesem Falle wird aus  $(p, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$  die Folge  $(\dot{q}_0, \dots, \dot{q}_n)$ , wobei  $\dot{q}_0$  der kanonische  $\mathbb{P}_0$ -Name für  $p$  ist. Das vereinfacht die Notation etwas.

Diese Darstellung einer Iteration von endlich vielen Halbordnungen verallgemeinern wir, um unendlich viele Halbordnungen zu iterieren.

**Definition 9.19.** Sei  $\delta \in M$  eine Ordinalzahl.  $((\mathbb{P}_\alpha)_{\alpha \leq \delta}, (\dot{\mathbb{Q}}_\alpha)_{\alpha < \delta}) \in M$  heißt *Iteration mit endlichem Träger (finite support iteration) der Länge  $\delta$* , falls in  $M$  folgendes gilt:

- (i) Für alle  $\alpha \leq \delta$  ist  $\mathbb{P}_\alpha$  eine Halbordnung, wobei die Elemente von  $\mathbb{P}_\alpha$  Folgen der Länge  $\alpha$  sind. Insbesondere gilt  $\mathbb{P}_0 = \{\emptyset\}$ .
- (ii) Für alle  $\alpha, \beta \leq \delta$  mit  $\alpha < \beta$  und alle  $p \in \mathbb{P}_\beta$  ist  $p \upharpoonright \alpha \in \mathbb{P}_\alpha$ .
- (iii) Für alle  $\alpha < \delta$  ist  $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$  ein  $\mathbb{P}_\alpha$ -Name für eine Halbordnung.
- (iv) Für alle  $\alpha < \delta$  ist  $\mathbb{P}_{\alpha+1} = \mathbb{P}_\alpha * \dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ . Hierbei können wir, da die Elemente von  $\mathbb{P}_\alpha$  Folgen der Länge  $\alpha$  sind, die Elemente von  $\mathbb{P}_\alpha * \dot{\mathbb{Q}}_\alpha$  in natürlicher Weise als Folgen der Länge  $\alpha + 1$  auffassen.

(v) Für alle  $\alpha \leq \delta$  und jede Folge  $p$  der Länge  $\alpha$  sei

$$\text{supt}(p) := \{\beta < \alpha : p(\beta) \neq 1_{\dot{Q}_\beta}\}$$

der Träger von  $p$ . Für jede Limesordinalzahl  $\alpha \leq \delta$  und jede Folge  $p$  der Länge  $\alpha$  ist  $p$  genau dann Element von  $P_\alpha$ , wenn  $p \upharpoonright \beta \in \mathbb{P}_\beta$  für alle  $\beta < \alpha$  gilt und zusätzlich  $\text{supt}(p)$  endlich ist.

(vi) Für alle  $\alpha \leq \delta$  und alle  $p, q \in \mathbb{P}_\alpha$  ist  $p \leq q$  genau dann, wenn für alle  $\beta < \alpha$  gilt:  $p \upharpoonright \beta \Vdash p(\beta) \leq q(\beta)$ .

Für alle  $\alpha \leq \delta$  sei  $1_{\mathbb{P}_\alpha}$  die Folge  $p$  der Länge  $\alpha$  mit  $p(\beta) = 1_{\dot{Q}_\beta}$  für alle  $\beta < \alpha$ .

Für alle  $\alpha, \beta \leq \delta$  mit  $\alpha < \beta$  und alle  $p \in \mathbb{P}_\alpha$  identifizieren wir  $p$  mit der Folge  $p \cup (1_{\mathbb{P}_\beta} \upharpoonright [\alpha, \beta)) \in \mathbb{P}_\beta$ . Wie man leicht nachrechnet, ist  $\mathbb{P}_\alpha$  damit eine vollständig eingebettete Unterhalbordnung von  $\mathbb{P}_\beta$ .

Das nächste Lemma zeigt, dass die Iteration mit endlichen Träger sich gut verhält in Bezug auf c.c.c. Halbordnungen.

**Lemma 9.20.** *Sei  $((\mathbb{P}_\alpha)_{\alpha \leq \delta}, (\dot{Q}_\alpha)_{\alpha < \delta})$  eine Iteration mit endlichen Träger, so dass für alle  $\alpha \leq \delta$  gilt:*

$$1_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash \text{“}\dot{Q}_\alpha \text{ ist c.c.c.} \text{”}$$

*Dann ist  $\mathbb{P}_\alpha$  c.c.c. für alle  $\alpha \leq \delta$ .*

*Beweis.* Wir beweisen das Lemma durch Induktion über  $\alpha \leq \delta$ . Der Induktionsanfang ist trivial. Die Nachfolgerschritte ergeben sich aus Lemma 9.18. Sei nun  $\alpha \leq \delta$  eine Limesordinalzahl. Angenommen, für alle  $\beta < \alpha$  ist  $\mathbb{P}_\beta$  c.c.c. Sei  $(p_\nu)_{\nu < \omega_1}$  eine Folge von Bedingungen in  $\mathbb{P}_\alpha$ . Wir zeigen, dass diese Folge keine Antikette ist.

Betrachte die Folge  $(\text{supt}(p_\nu))_{\nu < \omega_1}$ . Wegen des  $\Delta$ -System Lemmas können wir annehmen, dass  $(\text{supt}(p_\nu))_{\nu < \omega_1}$  bereits ein  $\Delta$ -System mit Wurzel  $R$  bildet. Sei  $\beta := \max(R) + 1$ . Wir können annehmen, dass die  $p_\nu$  paarweise verschieden sind. Da  $\mathbb{P}_\beta$  c.c.c. ist, existieren  $p, q \in \{p_\nu : \nu < \omega_1\}$  mit  $p \neq q$  und  $p \upharpoonright \beta \not\leq q \upharpoonright \beta$ . Sei  $r \in \mathbb{P}_\beta$  eine gemeinsame Erweiterung von  $p \upharpoonright \beta$  und  $q \upharpoonright \beta$ . Definiere  $s \in \mathbb{P}_\alpha$  wie folgt:

Setze  $s \upharpoonright \beta := r$ . Für alle  $\gamma \in [\beta, \alpha)$  sei  $s(\gamma) := p(\gamma)$ , falls  $\gamma \in \text{supt}(p)$ , und sonst  $s(\gamma) := q(\gamma)$ . Da die Träger von  $p$  und  $q$  oberhalb von  $\beta$  disjunkt sind, ist  $s$  eine gemeinsame Erweiterung von  $p$  und  $q$  in  $\mathbb{P}_\alpha$ .  $\square$

#### 9.4. Die Konsistenz von $\text{MA} + \neg\text{CH}$ .

**Satz 9.21.** *Mit ZFC ist auch  $\text{ZFC} + \text{MA} + \neg\text{CH}$  konsistent.*

*Beweis.* Sei  $M$  ein abzählbares, transitives Modell von  $\text{ZFC} + \text{GCH}$ . Wir konstruieren eine c.c.c. Halbordnung  $\mathbb{P} \in M$ , so dass für jeden  $\mathbb{P}$ -generischen Filter  $G$  über  $M$  gilt:

$$M[G] \models \text{MA} \wedge 2^{\aleph_0} = \aleph_2$$

Wir stellen zunächst folgendes fest: Sei  $N$  ein Modell der Mengenlehre mit  $N \models 2^{\aleph_0} = \aleph_2$ . Um  $\text{MA}$  in  $N$  nachzuweisen, genügt es nach Lemma 9.10 Halbordnungen der Mächtigkeit  $\leq \aleph_1$  zu betrachten. Natürlich genügt es dabei, je eine Halbordnung jedes Isomorphietyps von Halbordnungen der Mächtigkeit  $\leq \aleph_1$  zu betrachten. Insbesondere kann man sich auf Halbordnungen mit der unterliegenden Menge  $\omega_1$  oder einer Teilmenge davon beschränken. Aus technischen Gründen werden wir uns sogar auf Halbordnungen beschränken, die genau die unterliegende Menge  $\omega_1$  haben. Das geht wie folgt: Anstelle einer abzählbaren Halbordnung  $\mathbb{Q}$  betrachten wir die forcing-theoretisch äquivalente Halbordnung, die entsteht, wenn man das größte Element von  $\mathbb{Q}$  durch eine Kette vom Ordnungstyp  $\omega_1 + 1$  ersetzt.

Wir konstruieren nun in  $M$  eine Iteration  $((\mathbb{P}_\alpha)_{\alpha \leq \omega_2}, (\dot{\mathbb{Q}}_\alpha)_{\alpha < \omega_2})$  mit endlichem Träger, so dass für alle  $\alpha < \omega_2$  gilt:  $1_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash \text{„}\dot{\mathbb{Q}}_\alpha \text{ ist c.c.c.“}$ . Wir werden die  $\mathbb{P}_\alpha$  so wählen, dass für  $\alpha < \omega_2$  gilt:  $|\mathbb{P}_\alpha| \leq \aleph_1$ . Wir setzen dann  $\mathbb{P} := \mathbb{P}_{\omega_2}$  und zeigen

$$1_{\mathbb{P}} \Vdash \text{MA} \wedge 2^{\aleph_0} = \aleph_2$$

Nach Lemma 9.20 ist  $\mathbb{P}$  c.c.c. Wir müssen also, wenn wir zum Beispiel  $\aleph_1$  schreiben, nicht dazu sagen, ob wir  $\aleph_1$  in  $M$  oder in einer  $\mathbb{P}$ -generischen Erweiterung von  $M$  meinen.

Angenommen, wir haben  $\mathbb{P}_\alpha$  bereits konstruiert. Wir sagen, dass  $\dot{\mathbb{Q}}$  ein *guter*  $\mathbb{P}_\alpha$ -Name für eine c.c.c. Halbordnung auf  $\omega_1$  ist, falls  $\dot{\mathbb{Q}}$  ein  $\mathbb{P}_\alpha$ -Name für eine c.c.c. Halbordnung ist und außerdem gilt:

- (i) Der Name für die unterliegende Menge von  $\dot{\mathbb{Q}}$  ist  $\check{\omega}_1$ .
- (ii)  $1_{\dot{\mathbb{Q}}} = \check{0}$
- (iii) Der Name  $\dot{\leq}$  für die Ordnung auf  $\dot{\mathbb{Q}}$  ist ein netter Name für eine Teilmenge von  $\omega_1 \times \omega_1$ , d.h.,  $\dot{\leq}$  ist von der Form  $\bigcup_{\beta, \gamma < \omega_1} (\{(\beta, \gamma)\} \times A_{\beta, \gamma})$ , wobei die  $A_{\beta, \gamma}$  Antiketten in  $\mathbb{P}_\alpha$  sind.

Wie im Falle der netten Namen für Teilmengen von  $\omega$  sieht man, dass jede in einer  $\mathbb{P}_\alpha$ -generischen Erweiterung von  $M$  auftretende c.c.c. Halbordnung auf  $\omega_1$ , deren größtes Element die Ordinalzahl 0 ist, einen guten  $\mathbb{P}_\alpha$ -Namen hat. Wegen der c.c.c. von  $\mathbb{P}_\alpha$  zusammen mit GCH und  $|\mathbb{P}_\alpha| \leq \aleph_1$  gibt es nur  $(\aleph_1)^{\aleph_0} \aleph_1 = \aleph_2$  gute  $\mathbb{P}_\alpha$ -Namen für Halbordnungen auf  $\omega_1$ .

Beachte, dass wir für  $\alpha < \beta \leq \omega_2$  jeden  $\mathbb{P}_\alpha$ -Namen mittels der vollständigen Einbettung von  $\mathbb{P}_\alpha$  in  $\mathbb{P}_\beta$  als  $\mathbb{P}_\beta$ -Namen auffassen können. Mit Hilfe von geschickter Buchhaltung können wir die  $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$  so wählen, dass folgendes gilt: Für alle  $\alpha < \omega_2$  und alle guten  $\mathbb{P}_\alpha$ -Namen  $\dot{\mathbb{Q}}$  für eine c.c.c. Halbordnung auf  $\omega_1$  gibt es  $\aleph_2$ -viele  $\beta < \omega_2$  mit  $\alpha \leq \beta$  und

$$(1_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \text{„}\dot{\mathbb{Q}} \text{ ist c.c.c.“}) \rightarrow \dot{\mathbb{Q}} = \dot{\mathbb{Q}}_\beta.$$

Wie man leicht sieht, haben alle  $\mathbb{P}_\alpha$ ,  $0 < \alpha < \omega_2$ , die Mächtigkeit  $\aleph_1$ .  $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\omega_2}$  hat die Mächtigkeit  $\aleph_2$ . Da  $\mathbb{P}$  c.c.c. ist, gibt es höchstens  $\aleph_2$  nette  $\mathbb{P}$ -Namen für Teilmengen von  $\omega$ . Andererseits sind  $\aleph_2$ -viele der  $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$  Namen für eine feste, zu  $\text{Fn}(\omega, 2)$  äquivalente Halbordnung auf  $\omega_1$ . Die von diesen  $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$  adjungierten Teilmengen von  $\omega$  sind paarweise verschieden, wie man mit einem einfachen Dichtheitsargument nachweisen kann. Insgesamt gilt also  $1_{\mathbb{P}} \Vdash 2^{\aleph_0} = \aleph_2$ .

Sei nun  $G$  ein  $\mathbb{P}$ -generischer Filter über  $M$  und  $\mathbb{Q} \in M[G]$  eine c.c.c. Halbordnung auf  $\omega_1$  mit  $1_{\mathbb{Q}} = 0$ . Weiter sei  $(D_\beta)_{\beta < \omega_1}$  eine Familie von dichten Teilmengen von

$\mathbb{Q}$ . Wähle einen guten  $\mathbb{P}$ -Namen  $\dot{\mathbb{Q}}$  für eine c.c.c. Halbordnung auf  $\omega_1$  mit  $\dot{\mathbb{Q}}_G = \mathbb{Q}$ . Für jedes  $\beta < \omega_1$  sei  $\dot{D}_\beta$  ein netter  $\mathbb{P}$ -Name für eine Teilmenge von  $\omega_1$  (d.h., ein Name der Form  $\bigcup_{\gamma < \omega_1} (\dot{\gamma} \times A_\gamma)$ , wobei jedes  $A_\gamma$  eine Antikette in  $\mathbb{P}$  ist), so dass gilt:  $(\dot{D}_\beta)_G = D_\beta$ .

Für einen  $\mathbb{P}$ -Namen  $\rho$  sei  $\text{supt}(\rho)$  die Vereinigung der Träger aller Bedingungen, die in  $\rho$  vorkommen. Da  $\mathbb{P}$  c.c.c. ist und wegen der speziellen Form der Namen  $\dot{\mathbb{Q}}$  und  $\dot{D}_\beta$ , sind  $\text{supt}(\dot{\mathbb{Q}})$  und  $\text{supt}(\dot{D}_\beta)$ ,  $\beta < \omega_1$ , Mengen der Mächtigkeit  $\leq \aleph_1$ . Sei  $\gamma < \omega_2$  eine gemeinsame obere Schranke dieser Mengen. Dann sind  $\dot{\mathbb{Q}}$  und  $\dot{D}_\beta$ ,  $\beta < \omega_1$ , in Wirklichkeit schon  $\mathbb{P}_\gamma$ -Namen. Für jedes  $\alpha < \omega_2$  sei  $G_\alpha := G \cap \mathbb{P}_\alpha$ . Dann gilt  $\mathbb{Q} = \dot{\mathbb{Q}}_G = \dot{\mathbb{Q}}_{G_\gamma} \in M[G_\gamma]$ . Beachte, dass  $\mathbb{Q}$  auch in  $M[G_\gamma]$  c.c.c. ist, da  $M[G]$  und  $M[G_\gamma]$  dieselben Kardinalzahlen haben. Umgekehrt muss entsprechendes nicht gelten: Es kann in  $M[G_\gamma]$  c.c.c. Halbordnungen geben, die in  $M[G]$  nicht mehr c.c.c. sind.

Wegen der Wahl der  $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$  können wir, nach eventueller Vergrößerung von  $\gamma$ , annehmen, dass  $\dot{\mathbb{Q}} = \dot{\mathbb{Q}}_\gamma$  gilt. Nach Konstruktion der  $\mathbb{P}_\alpha$  entsteht  $M[G_{\gamma+1}]$  aus  $M[G_\gamma]$  durch Adjunktion eines  $(\dot{\mathbb{Q}}_\gamma)_{G_\gamma}$ -generischen Filters  $F$ . Offenbar gilt  $F \in M[G]$ . Da  $F$  über  $M[G_\gamma]$  generisch ist und wegen  $D_\beta = (\dot{D}_\beta)_{G_\gamma} \in M[G_\gamma]$  für alle  $\beta < \omega_1$ , schneidet  $F$  alle  $D_\beta$ ,  $\beta < \omega_1$ . Insbesondere gibt es in  $M[G]$  einen  $(D_\beta)_{\beta < \omega_1}$ -generischen Filter  $F \subseteq \mathbb{Q}$ . Das zeigt MA in  $M[G]$ .  $\square$

II. MATHEMATISCHES INSTITUT, FREIE UNIVERSITÄT BERLIN, ARNIMALLEE 3, 14195 BERLIN,  
GERMANY  
*E-mail address:* [geschke@math.fu-berlin.de](mailto:geschke@math.fu-berlin.de)