

EINFÜHRUNG IN DIE LOGIK UND MODELLTHEORIE

STEFAN GESCHKE

INHALTSVERZEICHNIS

1. Aussagenlogik	2
1.1. Alphabete und Wörter	2
1.2. Formeln und eindeutige Lesbarkeit	2
1.3. Wahrheitswerte von Formeln	6
1.4. Boolesche Funktionen und disjunktive Normalform	8
1.5. Die semantische Folgerungsrelation	9
1.6. Anwendungen des Kompaktheitssatzes	11
2. Prädikatenlogik	14
2.1. Vokabulare und Strukturen	14
2.2. Terme und ihre Werte in Strukturen	14
2.3. Prädikatenlogische Formeln und ihre Gültigkeit in Strukturen	16
2.4. Beispiele erststufiger Theorien	17
2.5. Substitution und gebundene Umbenennung	21
2.6. Formales Ableiten in der Prädikatenlogik	22
3. Der Vollständigkeitssatz der Prädikatenlogik	28
3.1. Widerspruchsfreie Theorien	28
3.2. Etwas über Kardinalzahlen	32
3.3. Beweis des Vollständigkeitssatzes	34
3.4. Eine Anwendung des Vollständigkeitssatzes	36
4. Etwas Modelltheorie	38
4.1. Der Kompaktheitssatz und seine Anwendungen	38
4.2. Elementare Submodelle	40
4.3. Kategorizität und Vollständigkeit	43
5. Die Unvollständigkeitssätze	44
5.1. Das Halteproblem	44
5.2. Unentscheidbarkeit der Arithmetik	46
5.3. Der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz	50
5.4. Der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz	54

Dieses Skript basiert teilweise auf dem handschriftlichen Skript zur Vorlesung „Einführung in die Mathematische Logik und Modelltheorie“ gehalten im Sommersemester 2003 von Sabine Koppelberg.

1. AUSSAGENLOGIK

Die Aussagenlogik befasst sich mit der Frage, wann gewisse Verknüpfungen (mittels „und“, „oder“ etc.) von Aussagen wahr sind. Dabei interessiert man sich nicht für den Inhalt der zugrundeliegenden Aussagen, sondern nur dafür, ob diese wahr oder falsch sind.

1.1. Alphabete und Wörter. Ein *Alphabet* (die Zeichen- bzw. Symbolmenge) ist zunächst eine beliebige Menge Z . Dabei ist $Z = \emptyset$ erlaubt. Auch endliche, unendliche und überabzählbare Alphabete sind erlaubt. In vielen Fällen werden wir abzählbar unendliche Alphabete betrachten.

Es sei

$$Z^* := \{(z_1, \dots, z_n) : n \in \mathbb{N}, z_1, \dots, z_n \in Z\}$$

die Menge aller endlichen Folgen über Z . Dabei ist $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Die Elemente von Z^* heißen *Wörter* über Z . Anstelle von (z_1, \dots, z_n) schreiben wir $z_1 \dots z_n$. Die natürliche Zahl $\text{le}(w)$ ist die *Länge* des Wortes $w = z_1 \dots z_n$. Man beachte, dass Z^* auch die Folge der Länge 0 enthält. Diese Folge ist das *leere Wort* und wird mit λ bezeichnet.

Zwei Wörter $v = s_1 \dots s_m$ und $w = t_1 \dots t_n$ sind genau dann gleich, wenn $m = \text{le}(v) = n = \text{le}(w)$ ist und für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt: $s_i = t_i$.

Auf Z^* definieren wir die zweistellige Operation \frown der *Verkettung*: für $v = s_1 \dots s_m$ und $w = t_1 \dots t_n$ sei

$$v \frown w := s_1 \dots s_m t_1 \dots t_n.$$

Anstelle von $v \frown w$ schreiben wir üblicherweise kurz vw . Die Operation

$$\smile : Z^* \times Z^* \rightarrow Z^*$$

ist assoziativ; λ ist das neutrale Element bzgl. \smile .

Jedes Zeichen $z \in Z$ identifizieren wir im Allgemeinen mit dem Wort (z) der Länge 1. Damit ist $Z \subseteq Z^*$.

Beispiel 1.1. Sei $Z := \{(\cdot), \wedge, \vee, p, q, r\}$. Dann sind folgende Wörter über Z paarweise verschieden:

$$p \wedge (q \wedge r), \quad (p \wedge q) \wedge r, \quad p \wedge q \wedge r, \quad (p \wedge q) \vee r, \quad p \wedge q \vee r, \quad)pp\vee)r$$

Man beachte, dass es Wörter über Z gibt, die uns sinnvoll erscheinen, Wörter, die uns unsinnig erscheinen, und Wörter, die missverständlich aussehen. Darauf gehen wir im nächsten Abschnitt ein.

1.2. Formeln und eindeutige Lesbarkeit. Wir definieren aussagenlogische Formeln als spezielle Zeichenreihen, die für Verknüpfungen von Aussagen stehen. In diesem Abschnitt geht es nur um die grammatisch-formalen (syntaktischen) Eigenschaften von Formeln, nicht um ihre inhaltliche Bedeutung (Semantik).

Definition 1.2. Es sei P eine unendliche Menge, die Menge der *Aussagenvariablen*, und $J := \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ die Menge der *Junktoren*, d.h., der aussagenlogischen Verknüpfungen. Wir nehmen dabei an, dass P und J disjunkt sind. Das *Alphabet der Aussagenlogik* ist $Z := P \cup J$.

Definition 1.3. Die Menge Fml der (aussagenlogischen) *Formeln* (über P und J) ist die kleinste Menge $M \subseteq Z^*$ mit

- (1) $P \subseteq M$
- (2) $\alpha \in M \Rightarrow \neg\alpha \in M$
- (3) $j \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}, \alpha, \beta \in M \Rightarrow j\alpha\beta \in M$

Genauer:

$$\text{Fml} := \bigcap \{M \subseteq Z^* : M \text{ erfüllt (1)-(3)}\}$$

Die Elemente von P heißen *atomare* Formeln.

Die hier gewählte Definition der Formeln ist vielleicht etwas überraschend. Die übliche Schreibweise für $j\alpha\beta$ ist $(\alpha j\beta)$ bzw. $\alpha j\beta$. Unsere Schreibweise ist die sogenannte *Polnische Notation* (PN, auch *Präfix-Schreibweise*), die gegenüber der üblichen Schreibweise (der *Infixschreibweise*) technische Vorteile hat und ohne Klammern auskommt. Es gibt auch noch die *umgekehrte Polnische Notation* (UPN, auch *Postfix-Schreibweise*), in der man $\alpha\beta j$ anstelle von $j\alpha\beta$ schreibt.

In diesem Abschnitt benutzen wir die UPN, weil sich gewisse Sätze so leichter beweisen lassen. Später benutzen wir dann die übliche (und für menschliche Wesen leichter lesbare) Infix-Schreibweise.

Beispiel 1.4. Wir schreiben ein paar Formeln in Infix-Schreibweise, PN und UPN auf:

Infix-Schreibweise	PN	UPN
$\neg p \vee q$	$\vee \neg pq$	$p \neg q \vee$
$(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$	$\rightarrow \wedge pq \vee rs$	$pq \wedge rs \vee \rightarrow$
$((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow \delta$	$\rightarrow \rightarrow \rightarrow \alpha\beta\gamma\delta$	$\alpha\beta \rightarrow \gamma \rightarrow \delta \rightarrow$

Die Menge der aussagenlogischen Formeln in Infix-Schreibweise kann man wie folgt definieren:

Zunächst sei $K := \{(\, , \,)\}$ die Menge der Klammern. P und J seien wie in Definition 1.3. Setze $Z_{\text{Infix}} := P \cup J \cup K$. Die Menge $\text{Fml}_{\text{Infix}}$ der aussagenlogischen Formeln in Infix-Schreibweise sei die kleinste Menge $M \subseteq Z_{\text{Infix}}^*$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) $P \subseteq M$
- (2) $\alpha \in M \Rightarrow \neg\alpha \in M$
- (3) $\alpha, \beta \in M$ und $j \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\} \Rightarrow (\alpha j \beta) \in M$

Als nächstes beschreiben wir einen Algorithmus, mit dem für ein Wort $w \in Z^*$ schnell erkannt, ob w ein Element von Fml ist.

Definition 1.5. Wir definieren eine *Gewichtsfunktion* $g : Z \rightarrow \mathbb{Z}$ (\mathbb{Z} die Menge der ganzen Zahlen) durch

$$g(z) := \begin{cases} -1, & \text{falls } z \in P \\ 0, & \text{falls } z = \neg \\ 1, & \text{falls } z \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\} \end{cases}$$

Für $w = z_1 \dots z_n \in Z^*$ definieren wir die *Quersumme* von w als

$$\text{qs}(w) := \sum_{i=1}^n g(z_i) = g(z_1) + \dots + g(z_n).$$

Mit Hilfe dieser Definitionen können wir leicht das *Quersummenkriterium* für Formeln formulieren.

Satz 1.6. Sei $w = z_1 \dots z_n \in Z^*$. Dann gilt $w \in \text{Fml}$ genau dann, wenn $\text{qs}(w) = -1$ ist und für jedes echte Anfangsstück $v = z_1 \dots z_m$, $m < n$, von w gilt: $\text{qs}(v) \geq 0$.

Beweis. Für $v, w \in Z^*$ schreiben wir $v \sqsubset w$, falls v ein echtes Anfangsstück von w ist. Setze

$$M := \{w \in Z^* : \text{qs}(w) = -1 \text{ und } \text{qs}(v) \geq 0 \text{ für alle } v \sqsubset w\}.$$

Wir zeigen $M = \text{Fml}$.

Für $\text{Fml} \subseteq M$ genügt es nach Definition von Fml zu zeigen, dass M die Eigenschaften (1)–(3) aus Definition 1.3 hat.

$P \subseteq M$ ist klar. Sei $\alpha \in M$. Wegen $g(\neg) = 0$ gilt dann auch $\neg\alpha \in M$. Seien nun $\alpha, \beta \in M$ und $j \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Wegen $\alpha, \beta \in M$ gilt

$$\text{qs}(j\alpha\beta) = 1 + \text{qs}(\alpha) + \text{qs}(\beta) = 1 - 1 - 1 = -1.$$

Sei nun $v \sqsubset j\alpha\beta$. Ist $v = \lambda$, so gilt $\text{qs}(v) = 0$. Ist $v = j$, so gilt $\text{qs}(v) = 1$. Ist $v = ju$ für ein $u \in Z^*$ mit $u \sqsubset \alpha$ oder $u = \alpha$, so gilt $\text{qs}(v) = 1 + \text{qs}(u) \geq 0$, da $\text{qs}(u) \geq -1$ wegen $\alpha \in M$. Sonst ist $v = j\alpha u$ für ein $u \sqsubset \beta$. Es gilt dann

$$\text{qs}(v) = 1 + \text{qs}(\alpha) + \text{qs}(u) = 1 - 1 + \text{qs}(u) = \text{qs}(u) \geq 0$$

wegen $\alpha, \beta \in M$.

Das zeigt $\text{Fml} \subseteq M$. Als nächstes zeigen wir $M \subseteq \text{Fml}$.

Für jedes $w = z_1 \dots z_n \in M$ zeigen wir $w \in \text{Fml}$, und zwar durch vollständige Induktion über n . Im Falle $n = 1$ ist $\text{qs}(w) = g(z_1) = -1$ wegen $w \in M$. Also gilt $z_1 \in P$ und damit $w = z_1 \in \text{Fml}$.

Sei $n > 1$. Wegen $w \in M$ ist $g(z_1) \geq 0$, also $z_1 \in J$. Sei $j = z_1$. Dann existiert $v \in Z^*$ mit $juv = w$.

Angenommen $j = \neg$. Aus $g(\neg) = 0$ und $w = \neg v \in M$ folgt $v \in M$. Nach Induktionsannahme gilt $v \in \text{Fml}$. Damit gilt auch $w \in \text{Fml}$.

Angenommen $j \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Dann ist $g(j) = 1$. Wegen $w \in M$, $g(j) = 1$ und $g(z) \in \{-1, 0, 1\}$ gibt es Wörter $u, v \in Z^*$ mit $w = juv$, $\text{qs}(ju) = 0$ und $\text{qs}(jv) \geq 1$

für alle $r \sqsubset u$. (Wähle $r \sqsubset u$ kürzest möglich mit $\text{qs}(ju) = 0$.) Es gilt $u \in M$. Wegen $w \in M$ gilt außerdem $v \in M$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $u, v \in \text{Fml}$. Damit ist auch $w = jv \in \text{Fml}$. \square

Mit Hilfe dieses Satzes können wir nun leicht die eindeutige Lesbarkeit von Formeln nachweisen.

Satz 1.7. *Sei $\alpha \in \text{Fml}$. Dann hat α genau eine der folgenden Formen:*

- (1) $\alpha = p \in P$ (mit eindeutig bestimmtem $p \in P$)
- (2) $\alpha = \neg\beta$ (mit eindeutig bestimmtem $\beta \in \text{Fml}$)
- (3) $\alpha = j\beta\gamma$ (mit eindeutig bestimmtem $j \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ und eindeutig bestimmten $\beta, \gamma \in \text{Fml}$)

Beweis. Man sieht leicht, dass α eine der angegebenen Formen hat. Nichttrivial ist nur Eindeutigkeit in (3). Sei $\alpha = j\beta\gamma = j\beta'\gamma'$ mit $\beta, \gamma, \beta', \gamma' \in \text{Fml}$. Angenommen $\beta \neq \beta'$. Dann ist β echtes Anfangsstück von β' oder umgekehrt. Nach Satz 1.6 ist aber kein echtes Anfangsstück einer Formel wieder eine Formel. Ein Widerspruch. Also ist $\beta = \beta'$ und damit auch $\gamma = \gamma'$. \square

Im Beweis von Satz 1.6 haben wir implizit ein Beweisverfahren angewandt, das auf der gewöhnlichen vollständigen Induktion basiert und welches man *Induktion über den Formelaufbau* nennt. Dieses Verfahren wird in folgendem abstrakten Lemma beschrieben.

Lemma 1.8. *Sei E eine Eigenschaft von Wörtern (aus Z^*) und es gelte*

- (1) *alle $p \in P$ haben die Eigenschaft E ;*
- (2) *hat w die Eigenschaft E , so auch $\neg w$;*
- (3) *haben v und w die Eigenschaft E und ist $j \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, so hat auch jvw die Eigenschaft E .*

Dann haben alle Elemente von Fml die Eigenschaft E .

Beweis. Wir identifizieren E mit der Menge der $w \in Z^*$, die die Eigenschaft E haben. Es ist also $\text{Fml} \subseteq E$ zu zeigen. Aber aus (1)–(3) folgt sofort, dass $M := E$ die Aussagen (1)–(3) aus Definition 1.3 erfüllt. Nach der Definition von Fml ist damit $\text{Fml} \subseteq E$. \square

Wegen Satz 1.7 lassen sich auch Funktionen auf Fml induktiv über den Formelaufbau definieren. Ein wichtiges Beispiel ist die Menge der Teilformeln einer Formel.

Definition 1.9. Für jedes $\alpha \in \text{Fml}$ definieren wir die Menge $\text{tf}(\alpha)$ der *Teilformeln* von α wie folgt:

$$\text{tf}(\alpha) = \begin{cases} \{\alpha\}, & \text{falls } \alpha \in P \\ \{\alpha\} \cup \text{tf}(\beta), & \text{falls } \alpha = \neg\beta \\ \{\alpha\} \cup \text{tf}(\beta) \cup \text{tf}(\gamma), & \text{falls } \alpha = j\beta\gamma \text{ mit } j \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\} \text{ und } \beta, \gamma \in \text{Fml} \end{cases}$$

Für $\alpha \in \text{Fml}_{\text{Infix}}$ definiert man die Teilformeln analog:

$$\text{tf}_{\text{Infix}}(\alpha) := \begin{cases} \{\alpha\}, & \text{falls } \alpha \in P \\ \{\alpha\} \cup \text{tf}_{\text{Infix}}(\beta), & \text{falls } \alpha = \neg\beta \\ \{\alpha\} \cup \text{tf}_{\text{Infix}}(\beta) \cup \text{tf}_{\text{Infix}}(\gamma), & \text{falls } \alpha = (\beta j \gamma) \\ & \text{mit } j \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\} \text{ und } \beta, \gamma \in \text{Fml} \end{cases}$$

Man beachte, dass man für diese Definition einen Satz über die eindeutige Lesbarkeit von Infix-Formeln von Infix-Formeln braucht (Übung).

1.3. Wahrheitswerte von Formeln. Dieser Abschnitt ist der *Semantik* von aussagenlogischen Formeln gewidmet, d.h., der Frage, unter welchen Umständen eine Formel wahr bzw. falsch wird. Wir schreiben alle Formeln in Infix-Schreibweise, wobei wir äußere Klammern weglassen, und identifizieren Fml und $\text{Fml}_{\text{Infix}}$ mit Hilfe der naheliegenden Bijektion.

Definition 1.10. $2 = \{0, 1\}$ ist die Menge der *Wahrheitswerte*, wobei 1 für „wahr“ und 0 für „falsch“ steht. Jede Abbildung von $v : P \rightarrow 2$ heißt *Belegung* von P .

Definition 1.11. Wir setzen eine gegebene Belegung $v : P \rightarrow 2$ zu einer Abbildung $\bar{v} : \text{Fml} \rightarrow 2$ fort. Die Definition von \bar{v} erfolgt rekursiv über den Formelaufbau. Für jedes $p \in P$ sei $\bar{v}(p) = v(p)$. Die weiteren Rekursionsschritte entnimmt man folgender Tabelle:

$\bar{v}(\alpha)$	$\bar{v}(\beta)$	$\bar{v}(\neg\alpha)$	$\bar{v}(\alpha \wedge \beta)$	$\bar{v}(\alpha \vee \beta)$	$\bar{v}(\alpha \rightarrow \beta)$	$\bar{v}(\alpha \leftrightarrow \beta)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

$\bar{v}(\alpha)$ ist der *Wahrheitswert* von α unter v . In Zukunft werden wir nicht mehr zwischen v und \bar{v} unterscheiden.

Es ist intuitiv klar, dass der Wahrheitwert einer Formel unter einer Belegung nur von der Belegung der in der Formel tatsächlich vorkommenden Aussagenvariablen abhängt.

Definition 1.12. Für $\alpha \in \text{Fml}$ sei $\text{var}(\alpha)$ die Menge der in α vorkommenden Aussagenvariablen. Genauer, für $\alpha = z_1 \dots z_n$ sei

$$\text{var}(\alpha) := \{z_i : 1 \leq i \leq n\} \cap P.$$

Lemma 1.13 (Koinzidenztheorem). *Sei α Formel. Seien $v, v' : P \rightarrow 2$ Belegungen mit $v \upharpoonright \text{var}(\alpha) = v' \upharpoonright \text{var}(\alpha)$. Dann ist $v(\alpha) = v'(\alpha)$.*

Beweis. Durch Induktion über den Formelaufbau. □

Definition 1.14. Eine Formel α heißt *allgemeingültig* (*Tautologie*), falls für jede Belegung v der Aussagenvariablen $v(\alpha) = 1$ gilt. Ist α Tautologie, so schreibt man $\models \alpha$.

Die Formel α heißt *erfüllbar*, falls es eine Belegung $v : P \rightarrow 2$ mit $v(\alpha) = 1$ gibt. Die Formel α heißt *Kontradiktion*, wenn α nicht erfüllbar ist.

Bemerkung 1.15. Das Koinzidenztheorem (Lemma 1.13) liefert einen Algorithmus, um für gegebenes α zu entscheiden, ob α erfüllbar ist.

Man ermittle zunächst die endliche Menge $\text{var}(\alpha)$. Sei etwa $\text{var}(\alpha) = \{p_1, \dots, p_n\}$. Es gibt dann genau 2^n Abbildungen $v_0 : \{p_1, \dots, p_n\} \rightarrow 2$. Für jedes v_0 berechne man rekursiv $v_0(\alpha)$. Die Formel α ist genau dann erfüllbar, wenn ein v_0 die Formel wahr macht.

Üblicherweise nennt man Tabellen, in denen man Belegungen der Variablen und die entsprechenden Wahrheitswerte von Formeln einträgt, wie zum Beispiel die in Definition 1.11, *Wahrheitstabellen*. Deshalb heißt der eben beschriebene Algorithmus auch das *Wahrheitstafelverfahren*.

Man beachte, dass das Wahrheitstafelverfahren langsam ist, da man für eine Formel α mit n Variablen 2^n Belegungen v_0 ausprobieren muss. Allerdings lässt sich für gegebenes v_0 schnell der Wahrheitswert von α unter v_0 ausrechnen.

SAT (für *satisfiability*) ist das Problem, für eine gegebene aussagenlogische Formel zu bestimmen, ob die Formel erfüllbar ist oder nicht. Nach dem oben Gesagten

ist SAT ein typischer Vertreter der Komplexitätsklasse NP. Es läßt sich sogar zeigen, dass SAT NP-vollständig ist, d.h., grob gesagt, mindestens so schwer wie jedes andere Problem in NP. (Für Näheres zum Thema Komplexitätstheorie siehe [Christos Papadimitriou, Computational Complexity, Addison-Wesley (1994)].)

Beispiel 1.16. Betrachte die Formel

$$\alpha = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q).$$

Offenbar ist $\text{var}(\alpha) = \{p, q\}$. Wir stellen die entsprechende Wahrheitstafel auf. Dabei schreiben wir in die erste Zeile die Variablen und die Formel. Darunter stehen in den ersten beiden Spalten die jeweiligen Belegungen der Variablen. In den weiteren Spalten stehen jeweils unter den Variablen die Belegungen und unter den Junktoren die Wahrheitswerte, die man erhält, wenn man den Wahrheitswert der Formel bis zu dem jeweiligen Junktur ausrechnet.

p	q	$(p \wedge q)$	\vee	$(\neg p \wedge \neg q)$	α
1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	0

Die Spalte, in der die Wahrheitswerte von α stehen, ist die unter dem \vee . Wir sehen, dass α erfüllbar ist, aber keine Tautologie.

Beispiel 1.17. Für jede Formel α ist $\alpha \vee \neg \alpha$ Tautologie und $\alpha \wedge \neg \alpha$ Kontradiktion. Das berechnet man wie im Beispiel 1.16, wobei man so tut als sei α eine Aussagenvariable, da nur der Wahrheitswert von α interessiert und nicht der genauere Aufbau von α .

Dass $\alpha \vee \neg \alpha$ Tautologie ist, ist der *Satz vom ausgeschlossenen Dritten (tertium non datur)*.

Beispiel 1.18. Wir sammeln noch einige Beispiele für Tautologien. Wieder kann man mit Hilfe des Wahrheitstafelverfahrens leicht nachrechnen, dass es sich tatsächlich um Tautologien handelt. Es seien $\alpha, \beta, \gamma \in \text{Fml}$.

$$\begin{aligned} &\alpha \rightarrow \alpha, \quad \alpha \leftrightarrow \alpha, \\ &(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha, \quad (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta, \quad \alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta), \quad \beta \rightarrow (\alpha \vee \beta), \\ &(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \beta, \\ &((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma) \text{ (Kettenschluss)}, \\ &((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \leftrightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)), \\ &(\alpha \wedge \neg \alpha) \rightarrow \beta \text{ (ex falso quodlibet, aus Falschem folgt Beliebiges)}, \\ &\alpha \rightarrow (\beta \vee \neg \beta) \end{aligned}$$

Definition und Bemerkung 1.19. a) Zwei Formeln α und β heißen (semantisch) äquivalent, falls $\alpha \leftrightarrow \beta$ Tautologie ist. Das ist genau dann der Fall, wenn für jede Belegung $v : P \rightarrow 2$ gilt: $v(\alpha) = v(\beta)$. Wir schreiben dann $\alpha \approx \beta$. Die Relation \approx ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge Fml.

b) Für beliebige $\alpha, \beta, \gamma \in \text{Fml}$ gilt

$$\begin{aligned} &\alpha \approx \alpha \wedge \alpha \approx \alpha \vee \alpha, \quad \neg \neg \alpha \approx \alpha, \\ &\alpha \wedge \beta \approx \beta \wedge \alpha, \quad \alpha \vee \beta \approx \beta \vee \alpha, \\ &(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \approx \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma), \quad (\alpha \vee \beta) \vee \gamma \approx \alpha \vee (\beta \vee \gamma), \\ &\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \approx (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma), \quad \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \approx (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma), \\ &\neg(\alpha \wedge \beta) \approx \neg \alpha \vee \neg \beta, \quad \neg(\alpha \vee \beta) \approx \neg \alpha \wedge \neg \beta, \\ &\alpha \rightarrow \beta \approx \neg \beta \rightarrow \neg \alpha, \quad \neg(\alpha \rightarrow \beta) \approx \alpha \wedge \neg \beta \end{aligned}$$

c) Solange uns nur semantische Aspekte interessieren, erlauben wir uns vereinfachende Schreibweisen wie zum Beispiel $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ an Stelle von $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$ und $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$.

1.4. Boolesche Funktionen und disjunktive Normalform.

Definition 1.20. Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Abbildung $f : 2^n \rightarrow 2$ heißt *n-stellige Boolesche Funktion*. Wir werden den Begriff „Boolesche Funktion“ auch in einem etwas allgemeineren Kontext benutzen:

Sei P_0 eine endliche Teilmenge der Menge P der Aussagenvariablen. Dann ist

$$2^{P_0} := \{v : P_0 \rightarrow 2\}$$

die Menge der Belegungen auf P_0 . Wir nennen eine Abbildung $f : 2^{P_0} \rightarrow 2$ *Boolesche Funktion* über P_0 .

Für eine Formel α mit $\text{var}(\alpha) \subseteq P_0$ und $v \in 2^{P_0}$ sei

$$f_\alpha(v) = v(\alpha).$$

Offenbar ist f_α Boolesche Funktion über P_0 . Man beachte, dass f_α von der Wahl von P_0 abhängt. Insofern sollte man für f_α eigentlich $f_\alpha^{P_0}$ schreiben. Die Menge P_0 wird sich aber immer aus dem Zusammenhang ergeben.

Bemerkung 1.21. Offenbar sind zwei Formeln α und β genau dann äquivalent, wenn für $P_0 = \text{var}(\alpha) \cup \text{var}(\beta)$ gilt: $f_\alpha = f_\beta$.

Im nächsten Satz werden wir sehen, dass sich jede Boolesche Funktion in der Form f_α schreiben lässt. Dazu brauchen wir folgende Definition.

Definition 1.22. Eine Formel α heißt *in disjunktiver Normalform* (DNF), falls Formeln α_i existieren mit

$$\alpha = \alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_n,$$

so dass für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ Formeln $\beta_{ij} \in P \cup \{\neg p : p \in P\}$ existieren mit

$$\alpha_i = \beta_{i1} \wedge \cdots \wedge \beta_{ik_i}.$$

Satz 1.23 (Satz über die disjunktive Normalform). *Sei $P_0 \subseteq P$ endlich und f Boolesche Funktion über P_0 . Dann existiert eine Formel α in DNF mit $\text{var}(\alpha) \subseteq P_0$ und $f = f_\alpha$.*

Insbesondere existiert zu jeder Formel β eine Formel α in DNF mit $\alpha \approx \beta$ und $\text{var}(\alpha) = \text{var}(\beta)$.

Beweis. Sei $P_0 = \{p_1, \dots, p_r\}$ und

$$\{v \in 2^{P_0} : f(v) = 1\} = \{v_1, \dots, v_n\}.$$

Für $p \in P$ setze $p^1 := p$ und $p^0 := \neg p$. Für $v \in 2^{P_0}$ sei

$$\alpha_v := p_1^{v(p_1)} \wedge \cdots \wedge p_r^{v(p_r)}.$$

Für $i \in \{1, \dots, n\}$ sei $\alpha_i := \alpha_{v_i}$. Dann leistet

$$\alpha := \alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_n$$

das Gewünschte. □

Definition und Bemerkung 1.24. a) Natürlich lassen sich neben den Junktoren in J , auf die wir uns geeinigt haben, auch noch weitere (ein- oder zweistellige) Junktoren betrachten. Es sollte klar sein, wie mit neuen Junktoren sinnvolle Formeln gebildet werden.

Die Bedeutung neuer Junktoren wird über Wahrheitstabellen definiert. Wie im Falle der Junktoren in J lässt sich für jede Belegung $v : P \rightarrow 2$ der Wahrheitswert einer Formel, die die neuen Junktoren benutzt, unter der Belegung v definieren.

b) Zwei beliebige Beispiele für weitere zweistellige Junktoren sind $|$ (*Sheffer-Strich*) und \uparrow (*Peirce-Pfeil*). Diese beiden Junktoren werden durch folgende Wahrheitstafel definiert:

α	β	$\alpha \beta$	$\alpha \uparrow \beta$
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	1

c) Eine Menge J' von ein- und zweistelligen Junktoren heißt *aussagenlogische Basis*, falls jede Boolesche Funktion über einer endlichen Menge $P_0 \subseteq P$ von einer Formel, die nur die Junktoren in J' benutzt, repräsentiert wird.

Beispiel 1.25. a) Nach Satz 1.23 ist $\{\neg, \vee, \wedge\}$ eine aussagenlogische Basis. Sogar die Menge $\{\neg, \wedge\}$ ist eine aussagenlogische Basis, und zwar wegen

$$\alpha \vee \beta \approx \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta).$$

Auch $\{\neg, \vee\}$ und $\{\neg, \rightarrow\}$ sind aussagenlogische Basen.

b) Die Mengen $\{| \}$ und $\{\uparrow\}$ sind jeweils aussagenlogische Basen, denn

$$\neg\alpha \approx \alpha | \alpha \approx \alpha \uparrow \alpha,$$

$$\alpha \wedge \beta \approx (\neg\alpha | \neg\beta) \approx \neg(\alpha \uparrow \beta)$$

und $\{\neg, \wedge\}$ ist aussagenlogische Basis.

c) Die Menge $\{\wedge, \vee\}$ ist keine aussagenlogische Basis. Ist nämlich α eine Formel, in der nur die Junktoren \wedge und \vee vorkommen, so gilt für die Belegung $v : P \rightarrow 2$, die konstant den Wert 1 hat, $v(\alpha) = 1$. Für jedes $p \in P$ ist aber $v(\neg p) = 0$.

1.5. Die semantische Folgerungsrelation.

Definition 1.26. Sei $\Phi \subseteq \text{Fml}$ und $\alpha \in \text{Fml}$. Dann *folgt* α (semantisch) aus Φ , falls jede Belegung, die alle Formeln in Φ wahr macht, auch α wahr macht. Wir schreiben in diesem Falle $\Phi \models \alpha$.

Im Falle $\Phi = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ schreiben wir auch

$$\beta_1, \dots, \beta_n \models \alpha.$$

Man beachte, dass $\beta \models \alpha$ genau dann gilt, wenn $\beta \rightarrow \alpha$ Tautologie ist.

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 1.27 (Kompaktheitssatz der Aussagenlogik). *Sei $\Phi \subseteq \text{Fml}$. Dann folgt $\alpha \in \text{Fml}$ genau dann aus Φ , wenn α bereits aus einer endlichen Teilmenge Φ_0 von Φ folgt.*

Für den Beweis des Kompaktheitssatzes nehmen wir an, dass die Menge P abzählbar ist. Der Satz gilt zwar auch für überabzählbares P , der Beweis ist dann aber etwas verwickelter, wenn man nicht auf den Satz von Tychonov aus der Topologie zurückgreifen will. Ausserdem folgt der Kompaktheitssatz der Aussagenlogik aus dem Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik, den wir später in voller Allgemeinheit beweisen werden.

Definition 1.28. Sei $\Phi \subseteq \text{Fml}$. Φ heißt *erfüllbar*, falls eine Belegung existiert, die alle Formeln in Φ wahr macht.

Lemma 1.29. *Sei $\Phi \subseteq \text{Fml}$ und $\alpha \in \text{Fml}$. Dann gilt $\Phi \not\models \alpha$ genau dann, wenn $\Phi \cup \{\neg\alpha\}$ erfüllbar ist.*

Beweis. Gelte $\Phi \not\models \alpha$. Dann existiert eine Belegung $v : P \rightarrow 2$, die alle Formeln in Φ wahr macht, aber nicht α . Es ist also $v(\neg\alpha) = 1$. Damit macht v alle Formeln in $\Phi \cup \{\neg\alpha\}$ wahr.

Sei umgekehrt $\Phi \cup \{\neg\alpha\}$ erfüllbar. Wähle eine Belegung $v : P \rightarrow 2$, die alle Formeln in Φ und $\neg\alpha$ wahr macht. Insbesondere gilt $v(\alpha) = 0$. Damit gilt $\Phi \not\models \alpha$. \square

Lemma 1.30. $\Phi \subseteq \text{Fml}$ ist genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist.

Beweis. Ist Φ erfüllbar, so ist offenbar auch jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar.

Wir müssen also nur zeigen, dass Φ erfüllbar ist, wenn jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist. Das ist trivial, wenn Φ endlich ist. Wir nehmen also an, dass Φ unendlich ist. Da wir angenommen haben, dass P abzählbar ist, ist Fml und damit auch Φ abzählbar. Sei also $\Phi = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$P_n := \text{var}(\alpha_0 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) = \text{var}(\alpha_0) \cup \cdots \cup \text{var}(\alpha_n).$$

Wir können annehmen, dass jede Aussagenvariable in P in mindestens einem Element von Φ vorkommt, dass also

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n = P$$

gilt.

Für jede Formel α sei $[\alpha]$ die Menge der Belegungen $v : P \rightarrow 2$, die α wahr machen. Da jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist, gilt

$$[\alpha_0 \wedge \cdots \wedge \alpha_n] \neq \emptyset$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $([\alpha_0 \wedge \cdots \wedge \alpha_n])_{n \in \mathbb{N}}$ eine fallende Folge nichtleerer Mengen. Für den Beweis des Lemmas müssen wir

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [\alpha_0 \wedge \cdots \wedge \alpha_n] \neq \emptyset$$

zeigen.

(Wer topologisch bewandert ist, der sieht, dass es sich bei $([\alpha_0 \wedge \cdots \wedge \alpha_n])_{n \in \mathbb{N}}$ um eine Folge nichtleerer, abgeschlossener Mengen in dem kompakten Raum 2^P handelt, wobei 2^P mit der von der diskreten Topologie auf 2 induzierten Produkttopologie ausgestattet ist. Wegen der Kompaktheit von 2^P (folgt aus dem Satz von Tychonov) ist der Schnitt der $[\alpha_0 \wedge \cdots \wedge \alpha_n]$ nicht leer. Dieses Argument geht übrigens für beliebig große Variablenmengen durch.)

Dazu wählen wir eine Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

- (1) $v_n : \text{var}(P_n) \rightarrow 2$;
- (2) $v_n \subseteq v_{n+1}$ (v_{n+1} ist Fortsetzung von v_n);
- (3) jede Fortsetzung von v_n auf ganz P liegt in $[\alpha_0 \wedge \cdots \wedge \alpha_n]$, d.h., v_n macht $\alpha_0 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$ wahr.

Wir machen uns zunächst klar, warum es genügt, eine solche Folge zu konstruieren. Setze $v := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} v_n$. Da die v_n einander fortsetzen, ist v wohldefiniert. Wegen $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n = P$ ist v auf ganz P definiert. Nach Lemma 1.13 macht v alle Formeln in Φ wahr.

Um in der Konstruktion der v_n nicht steckenzubleiben, sorgen wir dafür, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgendes gilt:

- (*) Es gibt unendlich viele $m \in \mathbb{N}$, für die v_n eine Fortsetzung in $[\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m]$ hat.

Wir setzen $v_{-1} := \emptyset$. Angenommen v_{n-1} ist bereits konstruiert und erfüllt (*). Es gibt nur endlich viele Fortsetzungen von v_{n-1} auf P_n , da P_n endlich ist. Da (*) für v_{n-1} gilt, existiert mindestens eine Fortsetzung v_n von v_{n-1} , die (*) erfüllt.

Es ist klar, dass die so konstruierte Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ das Gewünschte leistet. \square

Beweis von Satz 1.27. Angenommen, α folgt aus einer endlichen Teilmenge Φ_0 von Φ . Sei v eine Belegung, die alle Formeln in Φ wahr macht. Wegen $\Phi_0 \subseteq \Phi$ macht v auch alle Formeln in Φ_0 wahr. Da α aus Φ_0 folgt, gilt $v(\alpha) = 1$. Das zeigt, dass α aus Φ folgt.

Angenommen, α folgt aus Φ . Nach Lemma 1.29 ist das genau dann der Fall, wenn $\Phi \cup \{\neg\alpha\}$ nicht erfüllbar ist. Nach Lemma 1.30 existiert eine endliche Menge $\Phi_0 \subseteq \Phi$, so dass $\Phi_0 \cup \{\neg\alpha\}$ nicht erfüllbar ist. Eine weitere Anwendung von Lemma 1.29 zeigt, dass α aus Φ_0 folgt. \square

1.6. Anwendungen des Kompaktheitssatzes. In diesem Abschnitt diskutieren wir zwei kombinatorische Anwendungen des Kompaktheitssatzes. Beide Anwendungen sprechen über Graphen.

Definition 1.31. Ein *Graph* ist ein Paar (V, E) , wobei V eine beliebige Menge ist und E eine Menge von zweielementigen Teilmengen von V . V ist die Menge der *Ecken* und E ist die Menge der *Kanten* des Graphen. Ein Graph heißt *planar*, wenn er sich ohne Überkreuzungen in die Ebene zeichnen läßt. Eine Menge $C \subseteq V$ heißt *Clique*, wenn je zwei Ecken in C durch eine Kante in E verbunden sind. Eine Menge U heißt *unabhängig*, wenn keine zwei Ecken in U durch eine Kante in E verbunden sind.

Wir zitieren den (bisher nur mit Computerhilfe bewiesenen) *Vierfarbensatz*:

Satz 1.32. *Für jeden endlichen planaren Graphen $G = (V, E)$ existiert eine Abbildung $c : V \rightarrow 4 = \{0, 1, 2, 3\}$, so dass für alle $\{x, y\} \in E$ gilt: $c(x) \neq c(y)$.*

Eine Abbildung c , wie sie der Vierfarbensatz garantiert, heißt aus naheliegenden Gründen *Vierfärbung*. Mit Hilfe des Kompaktheitssatzes folgern wir aus dem Vierfarbensatz für endliche Graphen:

Korollar 1.33. *Sei $G = (V, E)$ ein (eventuell unendlicher) planarer Graph. Dann existiert eine Abbildung $c : V \rightarrow 4 = \{0, 1, 2, 3\}$ mit $c(x) \neq c(y)$ für alle $\{x, y\} \in E$.*

Beweis. Wir definieren eine Formelmenge Φ , so dass jede Belegung, die Φ wahr macht eine Abbildung c mit den gewünschten Eigenschaften codiert.

Für jede Ecke x von G gönnen wir uns vier Aussagenvariablen $p_x^0 \dots p_x^3$. Es sei also $P := \{p_x^i : x \in V, i < 4\}$. Weiter sei für alle $x \in V$ die Formel α_x so gewählt, dass α_x dann, und nur dann, wahr ist, wenn genau eine der Variablen p_x^0, \dots, p_x^3 wahr ist.

Für jede Kante $e = \{x, y\} \in E$ sei β_e eine Formel, die genau dann wahr ist, wenn für alle $i < 4$ die Variablen p_x^i und p_y^i nicht beide gleichzeitig wahr sind. Setze

$$\Phi := \{\alpha_x : x \in V\} \cup \{\beta_e : e \in E\}.$$

Ist nun v eine Belegung, die alle Formeln in Φ wahr macht, so definieren wir $c : V \rightarrow 4$ wie folgt: für jedes $x \in V$ sei $c(x)$ die eindeutig bestimmte Zahl $i < 4$ für die $v(p_x^i) = 1$ ist. Aus der Definition von Φ folgt unmittelbar, dass c eine Vierfärbung von G ist.

Es bleibt zu zeigen, dass Φ erfüllbar ist. Nach Lemma 1.30 genügt es zu zeigen, dass jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist. Sei also $\Phi_0 \subseteq \Phi$ endlich.

Dann existiert eine endliche Menge $V_0 \subseteq V$, so dass für alle $x \in V$ mit $\alpha_x \in \Phi_0$ und für alle $e = \{y, z\} \in E$ mit $\beta_e \in \Phi_0$ gilt: $x, y, z \in V_0$.

Nach dem Vierfarbensatz für endliche Graphen existiert eine Vierfärbung c_0 des Graphen $(V_0, E \cap \mathcal{P}(V_0))$. Nun wählen wir eine Belegung v , die für alle $x \in V_0$ genau ein p_x^i , $i < 4$, wahr macht, nämlich $p_x^{c_0(x)}$. Es ist klar, dass diese Belegung alle Formeln in Φ_0 wahr macht. \square

Als Nächstes werden wir den Kompaktheitssatz nutzen, um aus dem unendlichen Satz von Ramsey den endlichen Satz von Ramsey zu folgern.

Satz 1.34 (Satz von Ramsey, unendliche Version). *Sei $G = (V, E)$ ein unendlicher Graph. (Sei also V unendlich.) Dann hat G eine unendliche Clique oder eine unendliche unabhängige Teilmenge.*

Beweis. Wir können annehmen, dass V abzählbar unendlich ist. Damit können wir sogar $V = \mathbb{N}$ annehmen.

Für den Beweis des Satzes definieren wir zunächst eine fallende Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unendlicher Teilmengen von \mathbb{N} und eine streng monoton wachsende Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen.

Setze $a_0 := 0$ und A_0 . Seien a_n und A_n bereits gewählt. Eine der beiden Mengen

$$B_0 := \{b \in A_n : a_n < b, \{a_n, b\} \in E\}$$

und

$$B_1 := \{b \in A_n : a_n < b, \{a_n, b\} \notin E\}$$

ist unendlich. Wähle $i \in \{0, 1\}$, so dass B_i unendlich ist. Setze $A_{n+1} := B_i$ und $a_{n+1} := \min A_{n+1}$.

Nach Konstruktion gilt nun für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\{a_m : m > n\} \subseteq A_{n+1}.$$

Insbesondere gilt nach Wahl der A_n für alle $n \in \mathbb{N}$ genau eine der folgenden Aussagen:

- (i) $\{a_n, a_m\} \in E$ für alle $m > n$;
- (ii) $\{a_n, a_m\} \notin E$ für alle $m > n$.

Damit existiert eine unendliche Menge $T \subseteq \mathbb{N}$, so dass ENTWEDER für alle $n \in T$ die Aussage (i) auf n zutrifft ODER für alle $n \in T$ die Aussage (ii) auf n zutrifft.

Im ersten Fall ist $\{a_n : n \in T\}$ eine unendliche Clique in G , im zweiten Fall ist $\{a_n : n \in T\}$ eine unendliche unabhängige Familie in G . \square

Der endliche Satz von Ramsey hat eine etwas weniger schöne Formulierung als der unendliche.

Korollar 1.35 (Satz von Ramsey, endliche Version). *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass jeder Graph $G = (V, E)$ mit $|V| \geq m$ eine Clique oder eine unabhängige Familie der Mächtigkeit n enthält.*

Beweis. Angenommen, der endliche Satz von Ramsey ist falsch. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass es für jedes $m \in \mathbb{N}$ einen Graphen $G_m = (V_m, E_m)$ der Mächtigkeit m gibt, der keine Clique oder unabhängige Teilmenge der Mächtigkeit n enthält.

Wir schreiben eine Menge Φ von aussagenlogischen Formeln auf, so dass sich aus einer Belegung $v : P \rightarrow \{0, 1\}$, die jede Formel in Φ wahr macht, ein unendlicher Graph G konstruieren lässt, der keine Clique oder unabhängige Teilmenge der Mächtigkeit n hat.

Die Menge V der Ecken von G wird einfach \mathbb{N} sein. Wir müssen also nur festlegen, welche natürlichen Zahlen in G durch Kanten verbunden sind. Dazu genehmigen wir uns für jede zweielementige Menge $\{a, b\} \in \mathbb{N}$ eine Aussagenvariable $p_{\{a, b\}}$. Sei also $P = \{p_{\{a, b\}} : a, b \in \mathbb{N}, a \neq b\}$. Eine zweielementige Menge $\{a, b\} \subseteq \mathbb{N}$ wird später eine Kante in G sein, wenn $p_{\{a, b\}}$ wahr ist.

Sei $\mathcal{P}_n(\mathbb{N})$ die Menge der n -elementigen Teilmengen von \mathbb{N} . Für jedes $A \in \mathcal{P}_n(\mathbb{N})$ sei

$$\alpha_A := \bigvee \{p_{\{a, b\}} : a, b \in A, a \neq b\}$$

und

$$\beta_A := \bigvee \{\neg p_{\{a, b\}} : a, b \in A, a \neq b\}.$$

Setze

$$\Phi := \{\alpha_A : A \in \mathcal{P}_n(\mathbb{N})\} \cup \{\beta_A : A \in \mathcal{P}_n(\mathbb{N})\}.$$

Angenommen es gibt eine Belegung $v : P \rightarrow 2$, die alle Formeln in Φ wahr macht. Für $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a \neq b$ sei $\{a, b\}$ genau dann eine Kante in E , wenn (wie angekündigt) $v(p_{\{a,b\}}) = 1$ gilt.

Wir zeigen, dass $G = (\mathbb{N}, E)$ keine Clique oder unabhängige Teilmenge der Mächtigkeit n hat. Sei nämlich $A \in \mathcal{P}_n(\mathbb{N})$. Wegen $\alpha_A \in \Phi$ und nach Wahl von v gilt $v(\alpha_A) = 1$. Damit existieren $a, b \in A$ mit $a \neq b$ und $v(p_{\{a,b\}}) = 1$, also mit $\{a, b\} \in E$. Das zeigt, dass A keine unabhängige Menge ist. Analog sieht man mit Hilfe von β_A , dass A keine Clique ist.

Damit ist G ein Gegenbeispiel zum unendlichen Satz von Ramsey, ein Widerspruch.

Es bleibt zu zeigen, dass Φ erfüllbar ist. Nach Lemma 1.30 genügt es zu zeigen, dass jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist. Sei also $\Phi_0 \subseteq \Phi$ endlich.

Wähle eine endliche Teilmenge T von \mathbb{N} , so dass für jede Variable $p_{\{a,b\}}$, die in einer Formel in Φ_0 auftritt, gilt: $a, b \in T$.

Sei $m := |T|$. Nach unserer Annahme existiert ein Graph $G_m = (V_m, E_m)$ der Mächtigkeit m , so dass G_m keine Clique oder unabhängige Teilmenge der Mächtigkeit n enthält. Wir können $V_m = T$ annehmen.

Für alle $a, b \in T$ mit $a \neq b$ sei nun $v(p_{\{a,b\}}) := 1$ genau dann, wenn $\{a, b\} \in E_m$ gilt. Wie man leicht nachrechnet, macht die so definierte Belegung v jede Formel in Φ_0 wahr.

□

2. PRÄDIKATENLOGIK

2.1. Vokabulare und Strukturen. Die Prädikatenlogik erlaubt es, über beliebige mathematische Strukturen zu sprechen. Das nächste Beispiel zeigt, welche Form von Aussagen dabei möglich sein sollten.

Beispiel 2.1. Betrachte die folgende Aussage α über angeordnete Körper:

$$\forall a \forall b \forall c (\exists x (a \cdot x \cdot x + b \cdot x + c < 0) \wedge \exists x (a \cdot x \cdot x + b \cdot x + c > 0) \\ \rightarrow \exists x (a \cdot x \cdot x + b \cdot x + c = 0))$$

Die Aussage α besagt, dass jedes quadratische Polynom, das sowohl positive als auch negative Werte annimmt, eine Nullstelle hat. Die Struktur $(\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$ erfüllt α , $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <, 0, 1)$ nicht.

Folgende sprachliche Bestandteile kommen in der Formel vor: die Quantoren \forall und \exists , die Variablen a, b, c, x für Elemente von \mathbb{R} bzw. \mathbb{Q} , die Konstante 0, die Funktionen \cdot und $+$, aussagenlogische Junktoren, die Relationen $=$ und $<$, sowie, zur besseren bzw. eindeutigen Lesbarkeit, Klammern. Den Ausdruck $a \cdot x \cdot x + b \cdot x + c$ nennen wir einen Term.

In diesem Abschnitt klären wir zunächst den Begriff Struktur. \mathbb{R} kann auf verschiedene Weise als Struktur aufgefasst werden:

$(\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$ ist der angeordnete Körper der reellen Zahlen. $(\mathbb{R}, +, 0)$ ist die additive Gruppe der reellen Zahlen. $(\mathbb{R}, <)$ ist die lineare Ordnung der reellen Zahlen.

Diese verschiedenen Strukturen unterscheiden sich bereits durch ihre Vokabulare.

Definition 2.2. Ein *Vokabular* ist ein Quadrupel (C, F, R, s) , wobei C, F und R paarweise disjunkte Mengen sind und $s : F \cup R \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die *Stellenzahlfunktion* ist. Die Elemente von C heißen *Konstantensymbole*, die von F *Funktionssymbole* und die von R *Relationssymbole*. Für jedes $z \in F \cup R$ ist $s(z)$ die *Stelligkeit* von z .

Definition 2.3. Sei $\tau = (C, F, R, s)$ ein Vokabular. Eine τ -Struktur ist ein Paar

$$\mathcal{A} = (A, (z^{\mathcal{A}})_{z \in C \cup F \cup R}),$$

so dass gilt:

- (1) A ist nichtleere Menge (die *Trägermenge* von \mathcal{A});
- (2) für alle $c \in C$ ist $c^{\mathcal{A}} \in A$;
- (3) für alle $f \in F$ und $n = s(f)$ ist $f^{\mathcal{A}} : A^n \rightarrow A$ Funktion;
- (4) für alle $r \in R$ und $n = s(r)$ ist $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$.

Für $z \in C \cup F \cup R$ heißt $z^{\mathcal{A}}$ die *Interpretation* von z in A . Als Kurzschreibweise für \mathcal{A} verwenden wir auch $(A, z^{\mathcal{A}})_{z \in C \cup F \cup R}$. Später, wenn keine Gefahr mehr besteht, dass wir Symbole und deren Interpretationen verwechseln, werden wir anstelle von $z^{\mathcal{A}}$ einfach z schreiben. Das ist in der Mathematik allgemein üblich, und wir haben es oben auch schon getan. Ausserdem schreiben wir anstelle von $\tau = (C, F, R, s)$ einfach $\tau = C \cup F \cup R$ und stellen uns die Stellenzahlfunktion als implizit gegeben vor.

2.2. Terme und ihre Werte in Strukturen. Terme sind die einfachsten zusammengesetzten Bestandteile prädikatenlogischer Formeln. Oben haben wir bereits den Term $a \cdot x \cdot x + b \cdot x + c$ gesehen. Aussagenlogische Formeln sind ebenfalls Terme (über dem entsprechenden Vokabular der aussagenlogischen Junktoren).

Definition 2.4. Sei $\tau = C \cup F \cup R$ ein Vokabular. Zusätzlich sei X eine, üblicherweise abzählbar unendliche, Menge von (Individuen-) *Variablen*. Tm, die Menge der *Terme* über τ , sei die kleinste Menge $M \subseteq (C \cup F \cup X)^*$ mit

- (1) $C \subseteq M$;

- (2) $X \subseteq M$;
 (3) ist $f \in F$ ein n -stelliges Funktionssymbol und sind $t_1, \dots, t_n \in M$, so ist $ft_1 \dots t_n \in M$.

Genauer:

$$\text{Tm} := \bigcap \{M \subseteq (C \cup F \cup X)^* : M \text{ erfüllt (1)–(3)}\}.$$

Man beachte, dass wir die Terme wieder in Polnischer Notation schreiben. Wegen der besseren Lesbarkeit schreiben wir für $ft_1 \dots t_n$ oft $f(t_1, \dots, t_n)$.

Für zweistellige Funktionssymbole wie zum Beispiel $+$ und \cdot schreibt man oft $(t_1 + t_2)$ oder $(t_1 \cdot t_2)$ anstelle von $+t_1t_2$ bzw. $\cdot t_1t_2$. Bei dieser Infixschreibweise lassen wir äußere Klammern wieder weg.

Mit Hilfe eines einfachen Quersummenkriteriums kann man folgenden Satz über die eindeutige Lesbarkeit von Termen zeigen.

Satz 2.5. *Für $t \in \text{Tm}$ ist entweder*

- (1) $t = x \in X$ (mit eindeutig bestimmtem $x \in X$) oder
- (2) $t = c \in C$ (mit eindeutig bestimmtem $c \in C$) oder
- (3) $t = ft_1 \dots t_n$ (mit eindeutig bestimmten n -stelligem $f \in F$ und) mit eindeutig bestimmten $t_1, \dots, t_n \in \text{Tm}$.

Definition 2.6. Sei t ein Term über $C \cup F \cup R$, zum Beispiel $t = z_1 \dots z_n$ (t geschrieben als Wort in $(C \cup F \cup X)^*$). Die Menge der in t vorkommenden Variablen sei $\text{var}(t) := \{z_1, \dots, z_n\} \cap X$.

Ist $\text{var}(t) \subseteq \{x_1, \dots, x_m\} \subseteq X$, so schreiben wir für t auch gerne $t(x_1, \dots, x_m)$, um anzudeuten, dass die in t vorkommenden Variablen unter den Variablen x_1, \dots, x_m sind. Dabei muss nicht jedes x_i wirklich in t vorkommen.

Definition 2.7. Sei τ Vokabular, $t = t(x_1, \dots, x_n)$ Term über τ und $\mathcal{A} = (A, \dots)$ eine τ -Struktur. Außerdem seien $a_1, \dots, a_n \in A$. Wir definieren dann $t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n]$, den Wert von t unter der Belegung von x_i mit a_i induktiv über den Aufbau von t . (Dabei hängt $t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n]$ nur von der Belegung der x_i ab, die in t tatsächlich vorkommen.) Diese induktive Definition funktioniert wegen Satz 2.5.

- (1) Für $t = c \in C$ sei $t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n] := c^{\mathcal{A}}$.
- (2) Für $t = x \in X$ gibt es ein i mit $x = x_i$. Setze $t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n] := a_i$.
- (3) Für $t = ft_1 \dots t_m$ mit m -stelligem $f \in F$ setze

$$t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n] := f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n], \dots, t_m^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n]).$$

Man beachte, dass diese Definition vollkommen analog zur Definition des Wahrheitswerts einer aussagenlogischen Formel unter einer Belegung ist.

Man kann Terme in andere Terme einsetzen. Fixiere dazu ein Vokabular τ . Im folgenden sind alle Terme Terme über τ .

Definition 2.8. Sei $t = t(x_1, \dots, x_n)$ ein Term. Weiter seien t_1, \dots, t_n Terme. Dann sei $t(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n)$ (oder kürzer $t(t_1, \dots, t_n)$) der Term, der aus t durch simultanes Ersetzen von x_i durch t_i (für $1 \leq i \leq n$) entsteht.

Lemma 2.9. *Seien t und t_i wie in Definition 2.8.*

a) *Gilt $\text{var}(t_i) \subseteq \{y_1, \dots, y_m\}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, so gilt auch $\text{var}(t(t_1, \dots, t_n)) \subseteq \{y_1, \dots, y_m\}$.*

b) *Sei $\mathcal{A} = (A, \dots)$ eine τ -Struktur und $\bar{a} = (a_1, \dots, a_m) \in A^m$. Dann ist*

$$t(t_1, \dots, t_n)^{\mathcal{A}}[\bar{a}] = t^{\mathcal{A}}[t_1^{\mathcal{A}}[\bar{a}], \dots, t_n^{\mathcal{A}}[\bar{a}]].$$

Beweis. Induktion über den Termaufbau. □

2.3. Prädikatenlogische Formeln und ihre Gültigkeit in Strukturen. Wir arbeiten über dem Alphabet

$$Z = C \cup F \cup R \cup X \cup \{\equiv, (,), \neg, \vee, \exists\},$$

wobei τ ein festes, aber beliebiges Vokabular ist und X eine unendliche Menge von Variablen.

Definition und Bemerkung 2.10. *Atomare Formeln* über Z sind genau die Wörter über Z , die die Form

- a) $t \equiv t'$ (t und t' Terme über τ) oder
- b) $rt_1 \dots t_n$ ($r \in R$ n -stelliges Relationssymbol und t_1, \dots, t_n Terme über τ)

haben.

Atomare Formeln sind eindeutig lesbar, wie man mit den üblichen Methoden zeigt. Wir unterscheiden das Gleichheitszeichen \equiv der formalen Sprache von dem Gleichheitszeichen $=$ der Metasprache (mit der wir über die formale Sprache reden).

Definition und Bemerkung 2.11. Wir definieren die Menge Fml neu. Die Menge $\text{Fml} = \text{Fml}_\tau$ der (*prädikatenlogischen*) *Formeln* über τ ist die kleinste Menge $M \subseteq Z^*$ mit

- (1) jede atomare Formel ist in M ;
- (2) mit α ist auch $\neg\alpha$ in M ;
- (3) mit α und β ist auch $(\alpha \vee \beta)$ in M ;
- (4) für $\alpha \in M$ und $x \in X$ ist $\exists x\alpha \in M$.

Wieder sieht man mit den üblichen Methoden, dass die Formeln eindeutig lesbar sind.

Definition und Bemerkung 2.12. Wir erlauben offiziell nur die aussagenlogischen Junktoren \neg und \vee , da das verschiedene Definitionen und Beweise verkürzt. Da $\{\neg, \vee\}$ aber eine aussagenlogische Basis ist, können wir jeden anderen Junktor durch \neg und \vee ausdrücken. Konkret definieren wir folgende Abkürzungen:

Für $\alpha, \beta \in \text{Fml}$ und $x \in X$ sei

- $(\alpha \wedge \beta)$ (metasprachliche) Abkürzung für $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$,
- $(\alpha \rightarrow \beta)$ Abkürzung für $(\neg\alpha \vee \beta)$,
- $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ Abkürzung für $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$ und
- $\forall x\alpha$ Abkürzung für $\neg\exists x\neg\alpha$.

Außenklammern wie in $(\alpha \rightarrow \beta)$ werden meist weggelassen.

Definition 2.13. a) Sei $\alpha \in \text{Fml}$, etwa $\alpha = z_1 \dots z_n$ mit $z_1, \dots, z_n \in Z$. Wir definieren die Menge der in α vorkommenden Variablen als

$$\text{var}(\alpha) := \{z_1, \dots, z_n\} \cap X.$$

b) Durch Induktion über den Formelaufbau definieren wir die Menge $\text{frvar}(\alpha)$ der in α *frei* vorkommenden Variablen.

Ist α atomar, so sei $\text{frvar}(\alpha) := \text{var}(\alpha)$. Für $\alpha = \neg\beta$ sei $\text{frvar}(\alpha) := \text{frvar}(\beta)$. Für $\alpha = \beta \vee \gamma$ sei $\text{frvar}(\alpha) := \text{frvar}(\beta) \cup \text{frvar}(\gamma)$. Für $\alpha = \exists x\beta$ sei $\text{frvar}(\alpha) := \text{frvar}(\beta) \setminus \{x\}$.

c) Wir schreiben $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ anstelle von α , um $\text{frvar}(\alpha) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ anzudeuten. Die x_i seien dabei jeweils paarweise verschieden. Eine Formel α ist eine *Aussage*, falls $\text{frvar}(\alpha)$ leer ist.

Beispiel 2.14. a) Sei $\tau := \{+, \cdot\}$. Betrachte die Formeln

$$\alpha := \exists x(x \cdot x \equiv y) \quad \text{und} \quad \beta := \exists y(y + y \equiv x).$$

In α ist die Variable y frei, d.h., sie ist nicht durch einen Quantor gebunden. In $\alpha \vee \beta$ kommen sowohl x als auch y an mindestens einer Stelle frei vor.

b) Sei $\tau := \{<\}$,

$$\alpha := \exists z(x < z \wedge z < y)$$

und

$$\beta := \forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y)).$$

Dann gilt $\text{var}(\alpha) = \text{var}(\beta) = \{x, y, z\}$, $\text{frvar}(\alpha) = \{x, y\}$ und $\text{frvar}(\beta) = \emptyset$. Damit ist β Aussage, α jedoch nicht.

Als nächstes definieren wir die Gültigkeit einer Formel in einer Struktur.

Definition 2.15. Sei $\mathcal{A} = (A, \dots)$ eine τ -Struktur, $a_1, \dots, a_n \in A$ und $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ eine Formel über τ . Induktiv über den Formelaufbau definieren wir, wann die Relation

$$\mathcal{A} \models \alpha[a_1, \dots, a_n]$$

gilt. $\mathcal{A} \models \alpha[a_1, \dots, a_n]$ liest man als „ (a_1, \dots, a_n) erfüllt α in \mathcal{A} “, „in \mathcal{A} gilt α für (a_1, \dots, a_n) “ oder auch „ \mathcal{A} glaubt $\alpha[a_1, \dots, a_n]$ “.

- (1) Sei α atomar. Ist α von der Form $t_1 \equiv t_2$ für zwei Terme $t_1(x_1, \dots, x_n)$ und $t_2(x_1, \dots, x_n)$, so setzt man

$$\mathcal{A} \models \alpha[a_1, \dots, a_n] :\Leftrightarrow t_1^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n] = t_2^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n].$$

Ist α von der Form $rt_1 \dots t_m$ für ein m -stelliges Relationssymbol r und Terme t_1, \dots, t_m , so setzt man

$$\mathcal{A} \models \alpha[a_1, \dots, a_n] :\Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n], \dots, t_m^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n]) \in r^{\mathcal{A}}.$$

- (2) Sei α von der Form $\beta \vee \gamma$. Dann setzt man

$$\mathcal{A} \models \alpha[a_1, \dots, a_n] :\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \beta[a_1, \dots, a_n] \text{ oder } \mathcal{A} \models \gamma[a_1, \dots, a_n].$$

- (3) Sei α von der Form $\neg\beta$. Dann setzt man

$$\mathcal{A} \models \alpha[a_1, \dots, a_n] :\Leftrightarrow \mathcal{A} \not\models \beta[a_1, \dots, a_n].$$

- (4) Sei α schließlich von der Form $\exists x \beta$ mit $\beta = \beta(x, x_1, \dots, x_n)$. Dann setzt man

$$\mathcal{A} \models \alpha[a_1, \dots, a_n]$$

genau dann, wenn es ein $a \in A$ gibt, für das gilt:

$$\mathcal{A} \models \beta[a, a_1, \dots, a_n]$$

Ist α eine Aussage, so hängt die Gültigkeit von $\mathcal{A} \models \alpha[a_1, \dots, a_n]$ nicht von a_1, \dots, a_n ab. Wir schreiben in diesem Fall einfach $\mathcal{A} \models \alpha$.

Die Formeln in Fml_τ nennt man auch *erststufige* Formeln, da nur über Elemente der Trägermengen von Strukturen quantifiziert wird. Es gibt auch *zweitstufige* Formeln, in denen zum Beispiel auch über Teilmengen der Trägermengen quantifiziert werden kann. Zweitstufige Formeln sind viel ausdrucksstärker als erststufige, aber die erststufige Logik hat weit bessere strukturelle Eigenschaften als die zweitstufige.

2.4. Beispiele erststufiger Theorien.

Definition 2.16. Sei τ ein Vokabular. Eine *Theorie* (über τ) ist eine Menge von Aussagen (über τ). Sei T eine Theorie. Die *Modellklasse* $\text{Mod}(T)$ von T ist die Klasse der τ -Strukturen \mathcal{A} , die alle Aussagen $\alpha \in T$ erfüllen. Eine Klasse K von τ -Strukturen ist *axiomatisierbar*, wenn es eine Theorie T mit $\text{Mod}(T) = K$ gibt.

Sei \mathcal{A} eine τ -Struktur. Die Theorie $\text{Th}(\mathcal{A})$ von \mathcal{A} ist die Menge aller Aussagen, die \mathcal{A} erfüllt.

In den folgenden Beispielen sind führende Allquantoren bei Aussagen weggelassen.

Beispiel 2.17. a) Es gibt zwei sinnvolle Vokabulare für Gruppen, nämlich $\tau_1 := \{\cdot, e, {}^{-1}\}$ und $\tau_2 := \{\cdot\}$. Im Falle von τ_1 axiomatisiert die Menge $\{\varphi_1, \dots, \varphi_3\}$ von Axiomen die Klasse aller Gruppen wobei

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= x \cdot (y \cdot z) \equiv (x \cdot y) \cdot z; \\ \varphi_3 &= x \cdot e \equiv x \wedge e \cdot x \equiv x; \\ \varphi_2 &= x \cdot x^{-1} \equiv e \wedge x^{-1} \cdot x \equiv e.\end{aligned}$$

Über dem Vokabular τ_2 lässt sich die Klasse aller Gruppen axiomatisieren durch $\{\varphi_1, \varphi'_2, \varphi'_3\}$, wobei

$$\begin{aligned}\varphi'_2 &= \exists x \forall y (x \cdot y \equiv y \wedge y \cdot x \equiv y); \\ \varphi'_3 &= \forall y (x \cdot y \equiv y \wedge y \cdot x \equiv y) \rightarrow \forall y \exists z (y \cdot z \equiv x \wedge z \cdot y \equiv x).\end{aligned}$$

b) Um über abelsche Gruppen zu sprechen, eignen sich die beiden Vokabulare τ_1 und τ_2 , wobei man im abelschen Falle für \cdot , e und ${}^{-1}$ oft $+$, 0 und $-$ schreibt ($-$ ist dabei als einstelliges Funktionsymbol gemeint, nicht als zweistelliges).

Zu den Axiomen für Gruppen kommt für die abelschen Gruppen noch das Axiom

$$\varphi_4 = x \cdot y \equiv y \cdot x$$

hinzu.

c) Torsionsfreie abelsche Gruppen sind abelsche Gruppen, in denen jedes von 0 verschiedene Element unendliche Ordnung hat (d.h., kein Vielfaches des Elements ist 0), wie zum Beispiel $(\mathbb{Z}, +, 0, -)$, und $(\mathbb{R}, +, 0, -)$. Torsionsfreie abelsche Gruppen axiomatisiert man mit den Axiomen für abelsche Gruppen (der Einfachheit halber über τ_1) zusammen mit den Axiomen ψ^n für alle $n > 0$, wobei

$$\varphi_5^n = \neg x \equiv 0 \rightarrow \neg nx \equiv 0$$

Dabei ist nx die Abkürzung für die Summe $x + \dots + x$ mit n Summanden.

Beispiel 2.18. a) Das Vokabular $\{+, \cdot, -, {}^{-1}, 0, 1\}$ eignet sich, um über Körper zu sprechen. Die Körperaxiome sind hoffentlich bekannt. Die einzige Subtilität ist die folgende: Die Funktion ${}^{-1}$ ist auf 0 nicht definiert. Man behilft sich wie folgt: In einer gegebenen Struktur definiert man 0^{-1} irgendwie, zum Beispiel $0^{-1} = 0$, und verspricht, die Funktion ${}^{-1}$ niemals auf 0 anzuwenden.

b) Um algebraische abgeschlossene Körper (wie zum Beispiel $(\mathbb{C}, +, \cdot, -, {}^{-1}, 0, 1)$) zu axiomatisieren benutzt man die Körperaxiome aus a) zusammen mit den Axiomen χ_n für jedes $n > 1$, wobei

$$\chi_n = \exists x (x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \equiv 0)$$

Dabei ist x^k die Abkürzung für das Produkt $x \cdot \dots \cdot x$ mit k Faktoren. Ein Ausdruck der Form ax ist Abkürzung für $a \cdot x$.

Beispiel 2.19. Sei K ein fester Körper und 1 das neutrale Element der multiplikativen Gruppe von K . Ein geeignetes Vokabular für die Klasse der K -Vektorräume ist $\{+, 0, -\} \cup \{m_k : k \in K\}$. Dabei sind die m_k einstellige Funktionssymbole, die für die Multiplikation mit dem jeweiligen Körperelement k stehen. Die Axiome für die Klasse der Vektorräume sind zunächst die Axiome für abelsche Gruppen (geschrieben mit dem Vokabular $\{+, 0, -\}$) zusammen mit $\varphi_5^{k,l}$, $\varphi_6^{k,l}$, φ_7^k und φ_8 für alle $k, l \in K$, wobei

$$\begin{aligned}\varphi_5^{k,l} &= m_{k \cdot l}(x) \equiv m_k(m_l(x)), \\ \varphi_6^{k,l} &= m_{k+l}(x) \equiv m_k(x) + m_l(x), \\ \varphi_7^k &= m_k(x + y) \equiv m_k(x) + m_k(y), \\ \varphi_8 &= m_1(x) \equiv x.\end{aligned}$$

Beispiel 2.20. Ein in der Modelltheorie populäres Beispiel ist die Theorie der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte. Das Vokabular für lineare Ordnungen ist $\{<\}$. Die Axiome lauten

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z, \\ \alpha_2 &= \neg x < x, \\ \alpha_3 &= x < y \vee x \equiv y \vee y < x, \\ \alpha_4 &= x < y \rightarrow \exists z(x < z \wedge z < y), \\ \alpha_5 &= \exists y y < x, \\ \alpha_6 &= \exists y x < y.\end{aligned}$$

Ein Beispiel einer dichten linearen Ordnung ohne Endpunkte ist $(\mathbb{Q}, <)$.

Die bisher vorgestellten Theorien axiomatisieren wohlbekannte Klassen von Strukturen. Meistens interessiert man sich für mehrere oder gar alle Strukturen in einer solchen Klassen. Die beiden folgenden Theorien dienen eher dazu, eine Struktur zu beschreiben, nämlich die natürlichen Zahlen und die Klasse aller Mengen (die streng genommen gar keine Struktur ist, weil der Individuenbereich eben eine echte Klasse und keine Menge ist).

Beispiel 2.21. Das Vokabular der (erststufigen) *Peano-Arithmetik* ist $\{0, '\}$. Die angestrebte Interpretation von $'$ ist die Nachfolgerabbildung, die jeder natürlichen Zahl n ihren Nachfolger $n + 1$ zuordnet. Das ersten beiden Axiome der Peano-Arithmetik sind

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \neg x \equiv y \rightarrow \neg x' \equiv y' \text{ und} \\ \beta_2 &= \neg 0 \equiv x' .\end{aligned}$$

Dazu kommen noch die Axiome β_3^φ , die wie folgt definiert werden: Für jede Formel $\varphi(x, x_1, \dots, x_n)$ sei

$$\beta_3^\varphi = (\varphi(0, \bar{x}) \wedge \forall x(\varphi(x, \bar{x}) \rightarrow \varphi(x', \bar{x}))) \rightarrow \forall x \varphi(x, \bar{x}).$$

Dabei steht \bar{x} für x_1, \dots, x_n und $\varphi(0, \bar{x})$ für die Formel, die man erhält, wenn man jedes x , das in $\varphi(x, \bar{x})$ vorkommt, durch das Konstantensymbol 0 ersetzt.

Das Axiomenschema β_3^φ , $\varphi = \varphi(x, x_1, \dots, x_n)$ Formel, würde man intuitiv als ein Axiom schreiben, nämlich

$$\beta_3^2 = \forall M((0 \in M \wedge \forall x(x \in M \rightarrow x' \in M)) \rightarrow \forall x(x \in M)),$$

wobei M über alle Teilmengen von \mathbb{N} läuft. Allerdings ist das Axiom β_3^2 , wie die Bezeichnung schon andeutet, eine zweitstufige Aussage, die sich in der (erststufigen) Prädikatenlogik nicht formulieren lässt.

In unserem Schema β_3^φ behilft man sich, in dem man nur über definierbare M redet.

Wie oben schon angekündigt ist $(\mathbb{N}, 0, +1)$ Modell der Peano-Arithmetik. Während die zweitstufige Peano-Arithmetik, in der man anstelle der β_3^φ das zweitstufige Axiom β_3^2 benutzt, die natürlichen Zahlen bis auf Isomorphie eindeutig beschreibt, gibt es Modelle der erststufigen Peano-Arithmetik, die nicht zu den natürlichen Zahlen isomorph sind. Wie wir später sehen werden, gibt es überhaupt keine erststufige Theorie, die die natürlichen Zahlen bis auf Isomorphie eindeutig beschreibt.

Beispiel 2.22. Die *Zermelo-Fraenkelsche Mengenlehre (ZF)* hat das sehr übersichtliche Vokabular $\tau := \{\varepsilon\}$. Die Menge der Axiome von ZF ist

$$\{\text{Ext, Paar, Ver, Pot, Fund, Un}\} \cup \{\text{Auss}_\varphi, \text{Ers}_\varphi : \varphi \in \text{Fml}_\tau\}.$$

Die Axiome sind wie folgt definiert:

- Ext (Extensionalitätsaxiom):

$$\forall z(z \varepsilon x \leftrightarrow z \varepsilon y) \rightarrow x \equiv y$$

Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente haben.

- Paar (Paarmengenaxiom):

$$\exists z(x \varepsilon z \wedge y \varepsilon z)$$

Für je zwei Mengen x und y existiert eine Menge, die mindestens die Elemente x und y hat.

- Ver (Vereinigungsaxiom):

$$\exists U \forall y(y \varepsilon x \rightarrow \forall z(z \varepsilon y \rightarrow z \varepsilon U))$$

Für jede Menge x existiert eine Menge U mit $\bigcup x \subseteq U$.

- Pot (Potenzmengenaxiom):

$$\exists P \forall y(\forall z(z \varepsilon y \rightarrow z \varepsilon x) \rightarrow y \varepsilon P)$$

Für jede Menge x existiert eine Menge P mit $\mathcal{P}(x) \subseteq P$.

- Fund (Fundierungsaxiom):

$$\exists y y \varepsilon x \rightarrow \exists y \forall z(z \varepsilon x \rightarrow \neg z \varepsilon y)$$

Jede nichtleere Menge x enthält ein \in -minimales Element. Mit anderen Worten, es gibt keine unendlichen, bzgl. \in fallenden Folgen.

- Un (Unendlichkeitsaxiom):

$$\exists x(\exists y y \varepsilon x \wedge \forall y(y \varepsilon x \rightarrow y \cup \{y\} \varepsilon x))$$

Es gibt eine unendliche Menge. Genauer, es gibt eine nichtleere Menge, die unter der Abbildung $y \mapsto y \cup \{y\}$ abgeschlossen ist. Dabei ist $y \cup \{y\} \varepsilon x$ Abkürzung für

$$\exists z(z \varepsilon x \wedge y \varepsilon z \wedge \forall r(r \varepsilon y \rightarrow r \varepsilon z) \wedge \forall r(r \varepsilon z \rightarrow (r \equiv y \vee r \varepsilon y))).$$

- Auss $_{\varphi}$ (Aussonderungsaxiom):

$$\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z, y_1, \dots, y_n)))$$

Für jede Menge x und alle y_1, \dots, y_n ist $\{y \in x : \varphi(y, y_1, \dots, y_n)\}$ eine Menge.

- Ers $_{\varphi}$ (Ersetzungsaxiom):

$$\begin{aligned} \forall x \exists y(\varphi(x, y, x_1, \dots, x_n) \wedge \forall z(\varphi(x, z, x_1, \dots, x_n) \rightarrow y \equiv z)) \\ \rightarrow \forall r \exists s \forall x(x \in r \rightarrow \exists y(y \in s \wedge \varphi(x, y, x_1, \dots, x_n))) \end{aligned}$$

Für jede (definierbare) Abbildung f und jede Menge r existiert eine Menge s mit $f[r] \subseteq s$.

Üblicherweise fordert man, dass die Klasse V , die Klasse aller Mengen, zusammen mit der Relation \in ein Modell von ZF ist. Dabei muss man etwas aufpassen, da (V, \in) in unserem Sinne keine Struktur ist, da V eben eine echte Klasse ist und keine Menge. In der Mengenlehre sind alle Objekte, über die geredet wird, Mengen.

Die Axiome von ZF sagen einem im wesentlichen, wie man aus schon bekannten Mengen neue Mengen konstruieren kann. Insbesondere erlauben diese Axiome die Konstruktion der Menge der natürlichen Zahlen, der Menge der reellen Zahlen usw. Dabei muss man sich allerdings überlegen, was die natürlichen Zahlen eigentlich sein sollen. Da nur über Mengen geredet wird, muss auch jede Zahl eine Menge sein. Üblicherweise definiert man 0 als die leere Menge, 1 als die Menge $\{0\}$, 2 als $\{0, 1\}$ und allgemein $n + 1$ als $\{0, 1, \dots, n\}$. Kennt man die natürlichen Zahlen, so ist es leicht, zunächst die ganzen Zahlen, dann die rationalen Zahlen und schließlich die reellen Zahlen zu konstruieren.

Insgesamt garantieren die Axiome von ZF die Existenz von ausreichend vielen Mengen, um praktisch jedes mathematische Objekt auf natürliche Weise als Menge auffassen zu können. Ein mathematischer Satz wird im wesentlichen genau dann als wahr anerkannt, wenn er aus ZF bzw. aus ZFC, ZF zusammen mit dem Auswahlaxiom (welches in ZF zum Zornschen Lemma äquivalent ist), folgt.

Die Modelle der Theorie ZF werden in der Vorlesung *Modelle der Mengenlehre* diskutiert. Das ist nötig, wenn man zeigen will, dass gewisse Aussagen nicht aus ZF folgen. Die psychologische Hauptschwierigkeit beim Verständnis der Modelle von ZF liegt darin, dass man einerseits innerhalb dieser Modelle Mathematik betreiben kann (so wie wir in V arbeiten) und andererseits die Modelle selbst mit mathematische Methoden untersuchen kann wie Gruppen, Ringe oder Körper.

2.5. Substitution und gebundene Umbenennung. Wir benötigen eine syntaktische Operation auf den Formeln, das Einsetzen eines Termes für eine Variable (*Substitution*). Wie folgendes Beispiel zeigt, muss man dabei etwas aufpassen.

Beispiel 2.23. Betrachte die Formel $\alpha(x) = \exists y(y \cdot y \equiv x)$. Die Formel bedeutet (zum Beispiel in \mathbb{N}) „ x ist Quadrat“. Setzt man für x den Term $x+y$ ein (*substituiert* man x durch $x+y$), so erhält man eine Formel, die man $\alpha(x/x+y)$ nennen könnte. Diese Formel sollte bedeuten „ $x+y$ ist Quadrat“. Substituiert man naiv, so erhält man aber die Formel

$$\alpha(x/x+y) = \exists y(y \cdot y = x+y),$$

die offenbar etwas anderes bedeutet als „ $x+y$ ist Quadrat“. Zum Beispiel gilt $\alpha(x/x+y)$ in \mathbb{N} für $x=2$. Setzt man aber für y die Zahl 3 ein, so ist $x+y=5$, also keine Quadratzahl. Trotzdem gilt

$$\mathbb{N} \models \alpha(x/x+y)[2, 3],$$

da y in der Formel keine freie Variable mehr ist und damit der Wert, den man für y einsetzt, keine Auswirkung auf die Gültigkeit hat.

Definition 2.24. a) Sei α eine prädikatenlogische Formel, $\exists x\beta$ eine Teilformel von α , wobei die Menge der Teilformeln von α wieder auf die naheliegende Weise induktiv über den Formelaufbau definiert ist. Dann heißt β der *Wirkungsbereich* von $\exists x$.

Wir nennen ein Vorkommen einer Variable x in einer Formel α *gebunden*, falls dieses Vorkommen von x im Wirkungsbereich eines Quantors $\exists x$ liegt. (Dabei zählen wir das Vorkommen von x in $\exists x$ nicht als Vorkommen von x .)

Jedes andere Vorkommen von x in α heißt *frei*.

b) Sei t ein Term, α eine Formel und x eine Variable. Dann heißt t *frei für x in α* , falls keine Variable y von t durch Ersetzen von x durch t in den Wirkungsbereich eines Quantors $\exists y$ gerät.

Mit anderen Worten, t ist frei für x in α , falls für kein $y \in \text{var}(t)$ ein freies Vorkommen von x im Wirkungsbereich eines Quantors $\exists y$ liegt.

c) Sei α eine Formel, $x \in \text{frvar}(\alpha)$ und t ein Term. Wir definieren die *Substitution* von x durch t wie folgt:

Angenommen, $x_1, \dots, x_n \in \text{var}(t)$ sind die Variablen, die an Stellen in α gebunden sind, an denen x frei vorkommt. Wähle Variablen y_1, \dots, y_n , die weder in t noch in α vorkommen. Ersetze x_i in α an jeder Stelle durch y_i , an der x_i gebunden vorkommt. Ersetze jeden Quantor $\exists x_i$ in α durch $\exists y_i$. Setze schließlich t für x ein, und zwar an jeder Stelle, an der x in α frei vorkommt.

Das liefert die Formel $\alpha(x/t)$.

d) Analog zu c) definiert man die simultane Substitution mehrerer Variablen durch Terme. Sei $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ eine Formel und t_1, \dots, t_n Terme. Angenommen $y_1, \dots, y_m \in \text{var}(t_1) \cup \dots \cup \text{var}(t_n)$ sind die Variablen y für die folgendes gilt: y kommt in t_i vor und ist gebunden an einer Stelle in α , an der x_i frei vorkommt.

Wähle Variablen z_1, \dots, z_m , die weder in α noch in den t_i vorkommen. Ersetze jedes gebundene Vorkommen von y_j in α durch z_j und jeden Quantor $\exists y_j$ durch $\exists z_j$ (für alle $j \in \{1, \dots, m\}$). Ersetze danach x_i jedes freie Vorkommen von x_i in α durch t_i . Das liefert die Formel $\alpha(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n)$.

Es gelten folgende intuitiv einleuchtende Sätze über Substitution und gebundene Umbenennung.

Satz 2.25 (Satz über gebundene Umbenennung). *Sei $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ eine Formel und x eine Variable (die auch unter den x_i sein darf). Sei y eine Variable, die in α nicht vorkommt. Sei α' die Formel, die aus α entsteht, wenn man jedes gebundene Vorkommen von x in α durch y ersetzt und jeden Quantor $\exists x$ durch $\exists y$. Sei $\mathcal{A} = (A, \dots)$ eine Struktur und $a_1, \dots, a_n \in A$. Dann gilt*

$$\mathcal{A} \models \alpha[a_1, \dots, a_n] \leftrightarrow \mathcal{A} \models \alpha'[a_1, \dots, a_n].$$

Satz 2.26 (Substitutionssatz). *Sei $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ Formel und t_1, \dots, t_n Terme. Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ sei t_i frei für x_i in α . Sei*

$$\beta := \alpha(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n).$$

Weiter sei

$$\text{var}(t_1) \cup \dots \cup \text{var}(t_n) \subseteq \{y_1, \dots, y_m\}.$$

Dann gilt für alle $b_1, \dots, b_m \in A$:

$$\mathcal{A} \models \beta[b_1, \dots, b_m] \leftrightarrow \mathcal{A} \models \alpha[a_1, \dots, a_n]$$

mit $a_i := t_i^{\mathcal{A}}[b_1, \dots, b_m]$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

Insgesamt erhält man

Korollar 2.27. *Sei $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ Formel und t_1, \dots, t_n Terme. Sei*

$$\beta := \alpha(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n).$$

Weiter sei

$$\text{var}(t_1) \cup \dots \cup \text{var}(t_n) \subseteq \{y_1, \dots, y_m\}.$$

Dann gilt für alle $b_1, \dots, b_m \in A$:

$$\mathcal{A} \models \beta[b_1, \dots, b_m] \leftrightarrow \mathcal{A} \models \alpha[a_1, \dots, a_n]$$

mit $a_i := t_i^{\mathcal{A}}[b_1, \dots, b_m]$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

2.6. Formales Ableiten in der Prädikatenlogik. Die Erfüllungsrelation \models legt folgende Definitionen nahe:

Definition 2.28. Sei T eine Theorie über dem Vokabular τ und $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ Formel über τ . Dann folgt α inhaltlich (semantisch) aus T ($T \models \alpha$), wenn für jede τ -Struktur $\mathcal{A} = (A, \dots)$ und alle $a_1, \dots, a_n \in A$ gilt:

$$\mathcal{A} \models T \Rightarrow \mathcal{A} \models \alpha[a_1, \dots, a_n]$$

Dabei bedeutet $\mathcal{A} \models T$, dass \mathcal{A} Modell jeder Aussage in T ist.

Eine Formel α heißt *allgemeingültig*, wenn $\emptyset \models \alpha$ gilt, wenn also α aus der leeren Theorie folgt. Mit anderen Worten, α ist allgemeingültig, wenn α in jeder Struktur (über dem richtigen Vokabular) unter jeder Belegung der freien Variablen wahr ist.

Zwei Formeln $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ und $\beta(x_1, \dots, x_n)$ sind (semantisch) äquivalent, wenn für alle Strukturen $\mathcal{A} = (A, \dots)$ und alle $a_1, \dots, a_n \in A$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \alpha[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \beta[a_1, \dots, a_n]$$

Wir schreiben in diesem Fall $\alpha \approx \beta$.

Ziel dieses Abschnittes ist es, auf rein syntaktische Weise eine Relation \vdash der formalen Ableitbarkeit zwischen Theorien und Formeln zu definieren, von der wir später zeigen werden, dass sie mit \models übereinstimmt.

Definition 2.29. Wir werden einen Kalkül einführen, der aus *Axiomen* und *Regeln* besteht. Axiome sind dabei gewisse Formeln über τ . Regeln sind Paare (p, k) , wobei p eine endliche Menge von Formeln ist und k eine Formel. Die Menge p heißt *Prämisse*, die Formel k *Konklusion*. Ist (p, k) Regel, so *geht k aus p hervor*. Eine Regel $(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \beta)$ schreibt man üblicherweise als

$$\frac{\alpha_1, \dots, \alpha_n}{\beta}.$$

Sei T eine Theorie und α eine Formel. Dann ist α aus T *ableitbar* ($T \vdash \alpha$), falls es eine endliche Folge $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ von Formeln mit $\alpha = \alpha_n$ gibt, so dass für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

- (1) die Formel α_i ist Axiom oder Element von T oder
- (2) α_i geht (durch Anwenden einer Regel) aus einer Teilmenge von $\{\alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}\}$ hervor.

Eine Folge $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ wie oben heißt *Beweis*.

Um unseren Kalkül einzuführen, benötigen wir noch ein paar Begriffe, die die Aussagenlogik mit der Prädikatenlogik in Verbindung bringen.

Definition und Bemerkung 2.30. a) Eine Formel $\alpha \in \text{Fml}_\tau$ heißt *prädikatenlogische Tautologie*, wenn es eine aussagenlogische Tautologie $\rho = \rho(p_1, \dots, p_n)$ und Formeln $\beta_1, \dots, \beta_n \in \text{Fml}_\tau$ gibt, so dass α aus ρ durch Ersetzen der Aussagenvariablen p_i durch die Formel β_i (für alle $i \in \{1, \dots, n\}$) hervorgeht.

b) Jede prädikatenlogische Tautologie ist allgemeingültig.

c) Eine Formel $\beta \in \text{Fml}_\tau$ heißt (*aussagenlogisch*) *unzerlegbar*, wenn β atomar ist oder von der Form $\exists x\gamma$ für ein $\gamma \in \text{Fml}_\tau$. Jedes $\alpha \in \text{Fml}_\tau$ lässt sich auf genau eine Weise mit Hilfe von \neg und \vee aus unzerlegbaren Formeln aufbauen.

d) Die Eigenschaft, prädikatenlogische Tautologie zu sein, ist entscheidbar. Sei nämlich $\alpha \in \text{Fml}_\tau$ aus den unzerlegbaren Formeln β_1, \dots, β_n mit Hilfe von \neg und \vee zusammengesetzt. Seien p_1, \dots, p_n paarweise verschiedene Aussagenvariablen und ρ die aussagenlogische Formel, die man aus α erhält, wenn man jedes β_i durch p_i ersetzt. Die Formel α ist genau dann prädikatenlogische Tautologie, wenn ρ aussagenlogische Tautologie ist. Letzteres lässt sich aber mit dem Wahrheitstafelverfahren entscheiden.

Definition 2.31. Die Axiome unseres Kalküls sind die folgenden:

- (1) Aussagenlogische Axiome: jede prädikatenlogische Tautologie ist Axiom.
- (2) Identitätslogische Axiome: für jedes n -stellige Funktionssymbol f , jedes n -stellige Relationssymbol r und Variablen $x, y, z, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ sind folgende Formeln Axiome:

$$\begin{aligned} x &\equiv x \\ x &\equiv y \rightarrow y \equiv x \\ (x &\equiv y \wedge y \equiv z) \rightarrow x \equiv z \\ (x_1 &\equiv y_1 \wedge \dots \wedge x_n \equiv y_n) \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \equiv f(y_1, \dots, y_n) \\ (x_1 &\equiv y_1 \wedge \dots \wedge x_n \equiv y_n) \rightarrow (r(x_1, \dots, x_n) \rightarrow r(y_1, \dots, y_n)) \end{aligned}$$

- (3) Substitutionsaxiome: Für jede Formel α , jede Variable x und jeden Term t ist

$$\alpha(x/t) \rightarrow \exists x\alpha$$

ein Axiom.

Der Kalkül hat folgende Regeln:

- (1) Modus Ponens: für alle $\alpha, \beta \in \text{Fml}_\tau$ ist

$$\frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

eine Regel

- (2) Existenzregel: für alle $\alpha, \beta \in \text{Fml}_\tau$ und alle $x \in X$ mit $x \notin \text{frvar}(\beta)$ ist

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta}{\exists x \alpha \rightarrow \beta}$$

eine Regel.

Lemma 2.32. *Die Eigenschaft einer endlichen Folge $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ von Formeln, Beweis einer Formel α aus einer endlichen Theorie T zu sein, ist entscheidbar.*

Beweis. Für jede Formel β ist entscheidbar, ob β prädikatenlogische Tautologie ist. Es ist auch entscheidbar, ob β identitätslogisches Axiom ist und ob β Substitutionsaxiom ist. Da T endlich ist, ist auch $\beta \in T$ entscheidbar. Schließlich ist für jede endliche Menge p von Formeln und jede Formel k entscheidbar, ob (p, k) Regel ist. Damit lässt sich durch Induktion über n zeigen, dass entscheidbar ist, ob $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ Beweis aus T ist. Ob $\alpha_n = \alpha$ gilt, ist offenbar auch entscheidbar. \square

Satz 2.33 (Korrektheitssatz). *Sei T eine Theorie und α Formel. Wenn $T \vdash \alpha$ gilt, dann auch $T \models \alpha$.*

Beweis. Sei $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ein Beweis von α aus T . Wir zeigen durch Induktion über $i \in \{1, \dots, n\}$, dass $T \models \alpha_i$ für alle i gilt.

Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Angenommen, für alle $j \in \{1, \dots, i-1\}$ gilt $T \models \alpha_j$. Da $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ Beweis ist, trifft einer der folgenden Fälle zu:

- (1) α_i ist prädikatenlogische Tautologie;
- (2) α_i ist identitätslogisches Axiom;
- (3) α_i ist von der Form $\beta(x/t) \rightarrow \exists x \beta$;
- (4) α_i geht durch Anwendung von Modus Ponens aus einer Teilmenge von $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}\}$ hervor. Insbesondere existieren $k, j \in \{1, \dots, i-1\}$, so dass α_k von der Form $\alpha_j \rightarrow \alpha_i$ ist.
- (5) α_i geht durch Anwendung der Existenzregel aus einer Teilmenge von $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}\}$ hervor. Insbesondere ist α_i von der Form $\exists x \beta \rightarrow \gamma$ mit $x \notin \text{frvar} \gamma$ und es gibt $j \in \{1, \dots, i-1\}$ mit $\alpha_j = \beta \rightarrow \gamma$.

Sei nun $\mathcal{A} = (A, \dots)$ eine Struktur mit $\mathcal{A} \models T$. Sei $\text{frvar}(\alpha_i) \subseteq \{x_1, \dots, x_m\}$, und seien $a_1, \dots, a_m \in A$. Wir haben $\mathcal{A} \models \alpha_i[a_1, \dots, a_m]$ zu zeigen. Wir können dabei annehmen, dass für alle $j \in \{1, \dots, i-1\}$ gilt: $\text{frvar}(\alpha_j) \subseteq \{x_1, \dots, x_m\}$.

In den Fällen (1) und (2) gilt offenbar $\mathcal{A} \models \alpha_i[a_1, \dots, a_m]$. Für den Fall (3) nehmen wir $\mathcal{A} \models \beta(x/t)[a_1, \dots, a_m]$ an. Für $a := t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_m]$ gilt dann $\mathcal{A} \models \beta[a, a_1, \dots, a_m]$. Insbesondere gilt $\mathcal{A} \models \exists x \beta[a_1, \dots, a_m]$. Das zeigt

$$\mathcal{A} \models (\beta(x/t) \rightarrow \exists x \beta)[a_1, \dots, a_m].$$

In den Fällen (4) und (5) müssen wir auf die Induktionsannahme zurückgreifen. Danach gilt für alle $j \in \{1, \dots, i-1\}$ und alle $b_1, \dots, b_m \in A$: $\mathcal{A} \models \alpha_j[b_1, \dots, b_m]$.

Angenommen, (4) trifft zu. Seien k und j wie in (4). Wegen $\mathcal{A} \models \alpha_j[a_1, \dots, a_m]$ und $\mathcal{A} \models (\alpha_j \rightarrow \alpha_i)[a_1, \dots, a_m]$ gilt auch $\mathcal{A} \models \alpha_i[a_1, \dots, a_m]$.

Angenommen, (5) trifft zu. Seien β, γ und j wie in (5). Nach Voraussetzung gilt

$$\mathcal{A} \models (\beta \rightarrow \gamma)[a_1, \dots, a_m].$$

Angenommen, es gilt $\mathcal{A} \models \exists x \beta[a_1, \dots, a_m]$. Wir müssen $\mathcal{A} \models \gamma[a_1, \dots, a_m]$ zeigen.

Falls x in β nicht frei vorkommt, so gilt $\mathcal{A} \models \exists x\beta[a_1, \dots, a_m]$ genau dann, wenn $\mathcal{A} \models \beta[a_1, \dots, a_m]$ gilt. Wegen

$$\mathcal{A} \models (\beta \rightarrow \gamma)[a_1, \dots, a_m]$$

gilt in diesem Falle $\mathcal{A} \models \gamma[a_1, \dots, a_m]$.

Falls x in β frei vorkommt, so auch in $\alpha_j = \beta \rightarrow \gamma$. Nach unserer Annahme ist x damit unter x_1, \dots, x_m . Wir können $x = x_1$ annehmen. Wähle $a \in A$ mit $\mathcal{A} \models \beta[a, a_2, \dots, a_m]$. Nach Induktionsannahme gilt

$$\mathcal{A} \models (\beta \rightarrow \gamma)[a, a_2, \dots, a_m].$$

Damit gilt auch $\mathcal{A} \models \gamma[a, a_2, \dots, a_m]$. Da x_1 nach Voraussetzung in γ nicht frei vorkommt, ist die Gültigkeit von γ in \mathcal{A} unabhängig von der Belegung von x_1 . Damit gilt $\mathcal{A} \models \gamma[a_1, \dots, a_m]$. \square

Bevor wir den Kalkül benutzen, um tatsächlich Formeln abzuleiten, treffen wir ein paar Feststellungen, die das Ableiten unter Umständen wesentlich vereinfachen.

Lemma 2.34 (Tautologisches Schließen). *Ist $(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$ prädikatenlogische Tautologie und T Theorie mit $T \vdash \alpha_1, \dots, \alpha_n$, so gilt $T \vdash \beta$.*

Beweis. Wir müssen einen Beweis von β aus T angeben. Wir benutzen

$$\alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \beta$$

als Abkürzung für

$$\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow \dots (\alpha_n \rightarrow \beta) \dots).$$

Man beachte, dass mit $(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$ auch $\alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \beta$ prädikatenlogische Tautologie ist.

Sei nun $(\beta_1, \dots, \beta_m)$ Beweis aus T mit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$. Wir verlängern diesen Beweis zu einem Beweis von β , und zwar wie folgt:

$$\begin{array}{l} \alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \beta \quad (\text{Tautologie}) \\ \alpha_2 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \beta \quad (\text{Modus Ponens, geht wegen } \alpha_1 \in \{\beta_1, \dots, \beta_m\}) \\ \dots \\ \beta \quad (\text{Modus Ponens, geht wegen } \alpha_n \in \{\beta_1, \dots, \beta_m\}) \end{array}$$

\square

Für eine Formel α mit $\emptyset \vdash \alpha$ schreiben wir $\vdash \alpha$.

Lemma 2.35. *Für jede Formel α und jeden Term t gilt:*

$$\vdash \forall x\alpha \rightarrow \alpha(x/t)$$

Beweis. Man erinnere sich daran, dass $\forall x\alpha \rightarrow \alpha(x/t)$ Abkürzung für $\neg\exists x\neg\alpha \rightarrow \alpha(x/t)$ ist. Wir geben einen Beweis dieser Formel an.

$$\begin{array}{l} \neg\alpha(x/t) \rightarrow \exists x\neg\alpha \quad (\text{Axiom}) \\ (\neg\alpha(x/t) \rightarrow \exists x\neg\alpha) \rightarrow (\neg\exists x\neg\alpha \rightarrow \alpha(x/t)) \quad (\text{Tautologie}) \\ \neg\exists x\neg\alpha \rightarrow \alpha(x/t) \quad (\text{Modus Ponens}) \end{array}$$

\square

Lemma 2.36. Für jede Theorie T und jede Formel α gilt $T \vdash \alpha$ genau dann, wenn $T \vdash \forall x \alpha$ gilt.

Beweis. Gelte $T \vdash \forall x \alpha$. Lemma 2.35 zusammen mit einer Anwendung von Modus Ponens liefert dann $T \vdash \alpha$.

Gelte $T \vdash \alpha$. Sei γ irgendeine Aussage und \perp Abkürzung für $\gamma \wedge \neg \gamma$.

Dann lautet ein Beweis von $\forall x \alpha$ aus α wie folgt:

$$\begin{aligned} & \alpha \\ & \alpha \rightarrow (\neg \alpha \rightarrow \perp) \quad (\text{Tautologie}) \\ & \neg \alpha \rightarrow \perp \quad (\text{Modus Ponens}) \\ & \exists x \neg \alpha \rightarrow \perp \quad (\text{Existenzregel}) \\ & (\exists x \neg \alpha \rightarrow \perp) \rightarrow \neg \exists x \neg \alpha \quad (\text{Tautologie}) \\ & \neg \exists x \neg \alpha \quad (\text{Modus Ponens}) \end{aligned}$$

□

Nach diesen Vorbereitungen können wir unseren Kalkül benutzen, um tatsächlich mal etwas zu beweisen.

Beispiel 2.37. Sei $\tau = \{\cdot, {}^{-1}, e\}$ das Vokabular der Gruppentheorie. Wir zeigen, dass aus den Axiomen der Gruppentheorie (geschrieben in dem Vokabular τ) folgt, dass das neutrale Element einer Gruppe eindeutig bestimmt ist. Wir wollen also den Satz

$$\forall x (\forall y y \cdot x \equiv y \rightarrow x \equiv e)$$

ableiten.

$$\begin{aligned} & \forall y y \cdot x \equiv y \rightarrow e \cdot x \equiv e \quad (\text{Lemma 2.35}) \\ & \forall x (e \cdot x \equiv x \wedge x \cdot e \equiv x) \quad (\text{Axiom der Gruppentheorie}) \\ & e \cdot x \equiv x \wedge x \cdot e \equiv x \quad (\text{Lemma 2.36}) \\ & (e \cdot x \equiv x \wedge x \cdot e \equiv x) \rightarrow e \cdot x \equiv x \quad (\text{prädikatenlogische Tautologie}) \\ & e \cdot x \equiv x \quad (\text{Modus Ponens}) \\ & (x \equiv a \wedge a \equiv b) \rightarrow x \equiv b \quad (\text{Axiom}) \\ & \forall a ((x \equiv a \wedge a \equiv b) \rightarrow x \equiv b) \quad (\text{Lemma 2.36}) \\ & \forall a ((x \equiv a \wedge a \equiv b) \rightarrow x \equiv b) \rightarrow ((x \equiv e \cdot x \wedge e \cdot x \equiv b) \rightarrow x \equiv b) \quad (2.35) \\ & (x \equiv e \cdot x \wedge e \cdot x \equiv b) \rightarrow x \equiv b \quad (\text{Modus Ponens}) \\ & \forall b ((x \equiv e \cdot x \wedge e \cdot x \equiv b) \rightarrow x \equiv b) \quad (\text{Lemma 2.36}) \\ & \forall b ((x \equiv e \cdot x \wedge e \cdot x \equiv b) \rightarrow x \equiv b) \rightarrow ((x \equiv e \cdot x \wedge e \cdot x \equiv e) \rightarrow x \equiv e) \quad (2.35) \\ & (x \equiv e \cdot x \wedge e \cdot x \equiv e) \rightarrow x \equiv e \quad (\text{Modus Ponens}) \\ & ((\forall y y \cdot x \equiv y \rightarrow e \cdot x \equiv e) \wedge ((x \equiv e \cdot x \wedge e \cdot x \equiv e) \rightarrow x \equiv e) \wedge e \cdot x \equiv x) \\ & \quad \rightarrow (\forall y y \cdot x \equiv y \rightarrow x \equiv e) \quad (\text{prädikatenlogische Tautologie}) \\ & \forall y y \cdot x \equiv y \rightarrow x \equiv e \quad (\text{Lemma 2.34}) \\ & \forall x (\forall y y \cdot x \equiv y \rightarrow x \equiv e) \quad (\text{Lemma 2.36}) \end{aligned}$$

Wir beweisen noch zwei wichtige Tatsachen über unseren Kalkül.

Satz 2.38 (Deduktionstheorem). Sei α Aussage, β Formel und T Theorie. Dann gilt

$$T \cup \{\alpha\} \vdash \beta \Leftrightarrow T \vdash \alpha \rightarrow \beta.$$

Beweis. Gelte $T \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Dann gilt auch $T \cup \{\alpha\} \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Außerdem gilt $T \cup \{\alpha\} \vdash \alpha$. Eine Anwendung von Modus Ponens liefert nun $T \cup \{\alpha\} \vdash \beta$.

Gelte nun $T \cup \{\alpha\} \vdash \beta$. Sei $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ ein Beweis von β aus $T \cup \{\alpha\}$. Durch Induktion über $i \in \{1, \dots, n\}$ zeigen wir $T \vdash \alpha \rightarrow \beta_i$.

Sei also $i \in \{1, \dots, n\}$. Angenommen, für alle $j \in \{1, \dots, i-1\}$ gilt $T \vdash \alpha \rightarrow \beta_j$. Falls $T \vdash \beta_i$ gilt, so benutzen wir die Tautologie $\beta_i \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta_i)$ und Modus Ponens, um $\alpha \rightarrow \beta_i$ aus T abzuleiten.

Falls β_i nicht aus T ableitbar ist, so kann β_i kein Axiom und kein Element von T sein. Ist $\beta_i = \alpha$, so ist $\alpha \rightarrow \beta_i$ Tautologie und damit aus T ableitbar. Es bleibt der Fall zu betrachten, dass β_i durch Anwendung einer Regel aus einer Teilmenge von $\{\beta_1, \dots, \beta_{i-1}\}$ hervorgeht.

Angenommen β_i geht durch Modus Ponens aus einer Teilmenge von $\{\beta_1, \dots, \beta_{i-1}\}$ hervor. Dann gibt es $j, k \in \{1, \dots, i-1\}$ mit $\beta_k = \beta_j \rightarrow \beta_i$. Nach Induktionsannahme gilt $T \vdash \alpha \rightarrow \beta_j$ und $T \vdash \alpha \rightarrow (\beta_j \rightarrow \beta_i)$. Nun ist aber

$$((\alpha \rightarrow \beta_j) \wedge (\alpha \rightarrow (\beta_j \rightarrow \beta_i))) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta_i)$$

eine prädikatenlogische Tautologie. Nach Lemma 2.34 gilt demnach $T \vdash \alpha \rightarrow \beta_i$.

Angenommen, β_i geht durch die Existenzregel aus einem β_j , $j < i$, hervor. Dann ist β_j von der Form $\gamma \rightarrow \delta$ und $\beta_i = \exists x\gamma \rightarrow \delta$ für ein $x \in X$, das in δ nicht frei vorkommt.

Nach Induktionsannahme gilt $T \vdash \alpha \rightarrow (\gamma \rightarrow \delta)$. Die Formel

$$(\alpha \rightarrow (\gamma \rightarrow \delta)) \rightarrow (\gamma \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta))$$

ist prädikatenlogische Tautologie. Eine Anwendung von Modus Ponens liefert $T \vdash \gamma \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta)$. Da α Aussage ist, kommt x in $\alpha \rightarrow \delta$ nicht frei vor. Die Existenzregel liefert nun $T \vdash \exists x\gamma \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta)$. Wie oben folgt daraus $T \vdash \alpha \rightarrow (\exists x\gamma \rightarrow \delta)$, was noch zu zeigen war \square

Lemma 2.39. *Seien T eine Theorie und α eine Aussage über dem Vokabular τ . Weiter sei C' eine Menge neuer Konstanten, die in τ nicht vorkommen. Das Vokabular τ' entstehe aus τ durch hinzufügen der Konstanten in C' . Dann ist α genau dann über τ aus T ableitbar, wenn α über τ' aus T ableitbar ist. Dabei heißt α über einem Vokabular σ aus T ableitbar, wenn es einen Beweis von α aus T gibt, der nur Formeln über σ benutzt.*

Beweis. Offensichtlich ist ein Beweis von α aus T , der nur Formeln über τ benutzt, auch ein Beweis von α aus T über τ' .

Sei nun $b = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ Beweis von α über τ' . In b kommen nur endlich viele der neuen Konstanten vor, zum Beispiel c_1, \dots, c_k . Wähle paarweise verschiedene Variablen y_1, \dots, y_k , die in b nicht vorkommen.

Sei $b' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ die Folge von Formeln, die entsteht, wenn man für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ jedes Vorkommen von c_i durch y_i ersetzt. Es ist klar, dass in b' nur Formeln über τ vorkommen. Außerdem gilt $\alpha'_n = \alpha_n = \alpha$, da in α keine der neuen Konstanten vorkommt. Wir zeigen, dass b' Beweis von α aus T ist, und zwar durch Induktion über $i \in \{1, \dots, n\}$.

Ist α_i prädikatenlogische Tautologie, so auch α'_i . Entsprechendes gilt, wenn α_i identitätslogisches Axiom ist. Ist α_i von der Form $\beta(x/t) \rightarrow \exists x\beta$, so ist auch α'_i Substitutionsaxiom.

Geht α_i durch Anwenden von Modus Ponens aus α_j und α_l hervor, so geht α'_i durch Anwenden von Modus Ponens aus α'_j und α'_l hervor. Geht α_i durch Anwenden der Existenzregel aus α_j hervor, so existieren Formeln β und γ und eine Variable x , die in γ nicht frei vorkommt, so dass gilt: $\alpha_j = \beta \rightarrow \gamma$ und $\alpha_i = \exists x\beta \rightarrow \gamma$. Ersetzt man nun in α_j und α_i die c_l durch die y_l und erhält $\alpha'_j = \beta' \rightarrow \gamma'$ und $\alpha'_i = \exists x\beta' \rightarrow \gamma'$, so gilt, dass x in γ' nicht frei vorkommt, weil x von den y_l verschieden ist. Damit geht α'_i durch Anwenden der Existenzregel aus α'_j hervor. \square

3. DER VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ DER PRÄDIKATENLOGIK

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass die syntaktische Folgerungrelation \vdash mit der semantischen \models übereinstimmt. Das ist der sogenannte *Vollständigkeitsatz der Prädikatenlogik*. Eine zentrale Rolle beim Beweis des Vollständigkeitsatzes spielen

3.1. Widerspruchsfreie Theorien.

Definition 3.1. Sei T eine Theorie über dem Vokabular τ . T heißt (*syntaktisch*) *widerspruchsvoll*, wenn für jede Formel φ über τ gilt: $T \vdash \varphi$. Sonst heißt T (*syntaktisch*) *widerspruchsfrei*.

Lemma 3.2. *Eine Theorie T ist genau dann widerspruchsvoll, wenn gilt: $T \vdash \perp$.*

Beweis. Ist T widerspruchsvoll, so gilt $T \vdash \varphi$ für jede Formel φ , insbesondere für $\varphi = \perp$. Angenommen, es gilt $T \vdash \perp$. Sei φ eine Formel. Dann ist $\perp \rightarrow \varphi$ prädikatenlogische Tautologie und damit Axiom unseres Kalküls. Mit Modus Ponens ergibt sich $T \vdash \varphi$. \square

Lemma 3.3. *Hat T ein Modell, so ist T widerspruchsfrei.*

Beweis. Sei \mathcal{A} eine Struktur mit $\mathcal{A} \models T$. Angenommen, $T \vdash \perp$. Nach dem Korrektheitssatz (Satz 2.33) gilt dann $\mathcal{A} \models \perp$. Das ist aber unmöglich. \square

Der wesentliche Beweisschritt im Beweis des Vollständigkeitsatzes wird die Umkehrung von Lemma 3.3 sein.

Lemma 3.4. *Sei T eine Theorie (über τ).*

- a) *Mit T ist auch jede Teilmenge von T widerspruchsfrei.*
- b) *T ist genau dann widerspruchsfrei, wenn jede endliche Teilmenge von T widerspruchsfrei ist.*
- c) *Sei K eine Menge von widerspruchsfreien Theorien über τ , die bezüglich \subseteq linear geordnet ist. Dann ist $\bigcup K$ widerspruchsfrei.*
- d) *Ist T widerspruchsfrei, so gibt es eine maximal widerspruchsfreie Theorie T' (über τ) mit $T \subseteq T'$.*

Beweis. a) Sei $S \subseteq T$. Gilt $S \vdash \perp$, so auch $T \vdash \perp$.

b) Sei T widerspruchsfrei. Dann ist nach a) jede Teilmenge von T widerspruchsfrei, insbesondere jede endliche.

Angenommen T ist widerspruchsvoll. Dann gilt $T \vdash \perp$. Es existiert also ein Beweis von \perp aus T . In diesem Beweis kommen aber nur endlich viele Aussagen aus T vor. Sei S die endliche Menge der Aussagen in T , die in diesem Beweis vorkommen. Offenbar gilt $S \vdash \perp$. Damit hat T eine endliche Teilmenge, die widerspruchsvoll ist.

c) Nach b) genügt es zu zeigen, dass jede endliche Teilmenge von $\bigcup K$ widerspruchsfrei ist. Sei also $S \subseteq \bigcup K$ endlich. Da K bezüglich \subseteq linear geordnet ist, existiert $S' \in K$ mit $S \subseteq S'$. Nach Voraussetzung ist S' widerspruchsfrei, also auch S .

d) Betrachte

$$H := \{S : S \text{ ist widerspruchsfrei Theorie über } \tau \text{ mit } T \subseteq S\}.$$

Die Menge H ist durch \subseteq halbgeordnet. Nach c) hat jede linear geordnete Teilmenge K von H eine obere Schranke in H , nämlich $\bigcup K$.

Nach dem Zornschen Lemma hat H ein maximales Element T' . \square

Lemma 3.5. *Sei T eine Theorie über τ . Weiter seien φ und ψ Aussagen über τ .*

- a) *$T \cup \{\varphi \vee \psi\}$ ist genau dann widerspruchsfrei, wenn $T \cup \{\varphi\}$ oder $T \cup \{\psi\}$ widerspruchsfrei ist.*
- b) *Ist T widerspruchsfrei, so ist $T \cup \{\varphi\}$ oder $T \cup \{\neg\varphi\}$ widerspruchsfrei.*

Beweis. a) Wir zeigen:

$$T \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash \perp \Leftrightarrow T \cup \{\varphi\} \vdash \perp \text{ und } T \cup \{\psi\} \vdash \perp$$

Nach dem Deduktionstheorem (Satz 2.38) ist das äquivalent zu

$$T \vdash \varphi \vee \psi \rightarrow \perp \Leftrightarrow T \vdash \varphi \rightarrow \perp \text{ und } T \vdash \psi \rightarrow \perp.$$

Nun ist aber für jede Formel α die Formel $\neg\alpha \leftrightarrow (\alpha \rightarrow \perp)$ eine prädikatenlogische Tautologie. Es bleibt zu zeigen:

$$T \vdash \neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow T \vdash \neg\varphi \text{ und } T \vdash \neg\psi.$$

Das ist aber leicht bei Benutzung der Tautologie

$$\neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi).$$

b) folgt aus a), wenn man weiß, dass für jede Aussage φ mit T auch $T \cup \{\varphi \vee \neg\varphi\}$ widerspruchsfrei ist. Letzteres folgt aber wie in a) mit Hilfe des Deduktionstheorems. \square

Lemma 3.6. *Sei T maximal widerspruchsfrei und φ, ψ Aussagen.*

- a) $\varphi \in T \Leftrightarrow T \cup \{\varphi\}$ ist widerspruchsfrei.
- b) $\varphi \vee \psi \in T \Leftrightarrow \varphi \in T$ oder $\psi \in T$.
- c) $\neg\varphi \in T \Leftrightarrow \varphi \notin T$.

Beweis. Folgt aus Lemma 3.5. \square

Definition und Bemerkung 3.7. Seien $\tau = C \cup F \cup R$ und $\tau' = C' \cup F' \cup R'$ Vokabulare mit $C \subseteq C'$, $F \subseteq F'$ und $R \subseteq R'$. Jeder τ' -Struktur \mathcal{A}' lässt sich eine τ -Struktur $\mathcal{A} = \mathcal{A}' \upharpoonright \tau$ zuordnen, die dieselbe Trägermenge wie \mathcal{A}' hat und in der die Konstanten, Relationen und Funktionen aus τ so interpretiert werden wie in \mathcal{A}' (man vergisst also einfach die $z^{\mathcal{A}'}$ mit $z \in \tau' \setminus \tau$). \mathcal{A} heißt das *Redukt* von \mathcal{A}' auf τ , \mathcal{A}' eine *Expansion* von \mathcal{A} auf τ' .

Offenbar lässt sich jede τ -Struktur zu einer τ' -Struktur expandieren. Ist \mathcal{A}' eine Expansion von \mathcal{A} auf τ' und gilt $\mathcal{A} \models T$ für eine Theorie T (über τ), so gilt auch $\mathcal{A}' \models T$, wobei T jetzt als Theorie über τ' aufgefasst wird.

Lemma 3.8. *Das Vokabular τ' gehe aus τ durch Hinzufügen neuer Konstantensymbole hervor. Sei T eine Theorie über τ . Dann ist T genau dann widerspruchsfrei über τ , wenn T über τ' widerspruchsfrei ist.*

Beweis. Nach Lemma 2.39 gilt $T \vdash \perp$ über τ genau dann, wenn $T \vdash \perp$ über τ' gilt. \square

Lemma 3.9. *Sei φ eine Formel über τ , T Theorie über τ . Angenommen, es gibt einen variablenfreien Term t , so dass $T \cup \{\varphi(x/t)\}$ widerspruchsfrei ist. Dann ist auch $T \cup \{\exists x\varphi\}$ widerspruchsfrei.*

Beweis. Zu zeigen ist

$$T \cup \{\exists x\varphi\} \vdash \perp \Rightarrow T \cup \{\varphi(x/t)\} \vdash \perp.$$

Angenommen $T \cup \{\exists x\varphi\} \vdash \perp$. Nach dem Deduktionstheorem (Satz 2.38) gilt $T \vdash \exists x\varphi \rightarrow \perp$. Die Formel $\varphi(x/t) \rightarrow \exists x\varphi$ ist Substitutionsaxiom. Eine prädikatenlogische Tautologie und Modus Ponens liefern $T \vdash \varphi(x/t) \rightarrow \perp$. \square

Lemma 3.10. Sei Φ eine Menge von Formeln über τ . Für jedes $\varphi \in \Phi$ sei $\text{frvar}(\varphi) \subseteq \{x_\varphi\}$. Sei $T \cup \{\exists x_\varphi \varphi(x_\varphi)\}$ widerspruchsfrei. Für jedes $\varphi \in \Phi$ sei c_φ eine neue Konstante. Das Vokabular τ' entstehe aus τ durch Hinzufügen der neuen Konstantensymbole c_φ , $\varphi \in \Phi$. Ist $T \cup \{\exists x_\varphi \varphi(x_\varphi)\}$ widerspruchsfrei über τ , so ist $T \cup \{\varphi(x_\varphi/c_\varphi)\}$ widerspruchsfrei über τ' .

Beweis. Angenommen,

$$T \cup \{\varphi(x_\varphi/c_\varphi) : \varphi \in \Phi\} \vdash \perp.$$

Zu zeigen ist

$$T \cup \{\exists x_\varphi \varphi : \varphi \in \Phi\} \vdash \perp.$$

Es gibt $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Phi$ mit

$$T \cup \{\varphi_1(x_{\varphi_1}/c_{\varphi_1}), \dots, \varphi_n(x_{\varphi_n}/c_{\varphi_n})\} \vdash \perp.$$

Mit dem Deduktionstheorem erhält man

$$T \cup \{\varphi_1(x_{\varphi_1}/c_{\varphi_1}), \dots, \varphi_{n-1}(x_{\varphi_{n-1}}/c_{\varphi_{n-1}})\} \vdash \varphi_n(x_{\varphi_n}/c_{\varphi_n}) \rightarrow \perp.$$

Die Existenzregel liefert

$$T \cup \{\varphi_1(x_{\varphi_1}/c_{\varphi_1}), \dots, \varphi_{n-1}(x_{\varphi_{n-1}}/c_{\varphi_{n-1}})\} \vdash \exists x_{\varphi_n} \varphi_n \rightarrow \perp.$$

Eine weitere Anwendung des Deduktionstheorems ergibt

$$T \cup \{\varphi_1(x_{\varphi_1}/c_{\varphi_1}), \dots, \varphi_{n-1}(x_{\varphi_{n-1}}/c_{\varphi_{n-1}})\} \cup \{\exists x_{\varphi_n} \varphi_n\} \vdash \perp.$$

Iteriert man dieses Argument (genauer, führt man mit diesem Argument eine vollständige Induktion durch), so erhält man

$$T \cup \{\exists x_{\varphi_1} \varphi_1, \dots, \exists x_{\varphi_n} \varphi_n\} \vdash \perp.$$

Insbesondere gilt

$$T \cup \{\exists x_\varphi \varphi : \varphi \in \Phi\} \vdash \perp.$$

□

Definition 3.11. Eine Theorie T über τ heißt *Henkin-Theorie* (bezüglich τ), falls für jede Formel der Form $\exists x \varphi \in T$ eine Konstante $c \in \tau$ existiert, für die $\varphi(x/c) \in T$ gilt.

Lemma 3.12. Ist T maximal widerspruchsfreie Henkin-Theorie über τ , so gilt für jede Formel $\varphi = \varphi(x)$ über τ :

$$\exists x \varphi \in T \Leftrightarrow \text{es gibt eine Konstante } c \in \tau \text{ mit } \varphi(x/c) \in T$$

Beweis. Folgt sofort aus Lemma 3.6 a), Lemma 3.9, Lemma 3.10 und der Definition einer Henkin-Theorie. □

Satz 3.13. Sei T eine widerspruchsfreie Theorie über τ . Dann gibt es ein Vokabular τ^* , das aus τ durch Hinzufügen neuer Konstantensymbole entsteht, und eine maximal widerspruchsfreie Henkin-Theorie T^* über τ^* mit $T \subseteq T^*$.

Beweis. Wir definieren induktiv Vokabulare τ_n mit

$$\tau = \tau_0 \subseteq \tau_1 \subseteq \dots$$

und Theorien T_n über τ_n mit

$$T \subseteq T_0 \subseteq T_1 \subseteq \dots,$$

so dass T_n maximal widerspruchsfrei über τ_n ist.

Setze $\tau_0 := \tau$ und wähle T_0 maximal widerspruchsfrei über $\tau = \tau_0$ mit $T \subseteq T_0$. Das geht nach Lemma 3.4 d).

Sei nun τ_n bereits definiert und T_n maximal widerspruchsfrei über τ_n . Das Vokabular τ_{n+1} entstehe aus τ_n durch Hinzufügen eines neuen Konstantensymbols c_φ für jede Formel $\varphi = \varphi(x)$ über τ_n . Setze

$$T'_{n+1} := T_n \cup \{\varphi(x/c_\varphi) : \exists x\varphi \in T_n\}.$$

Nach Lemma 3.10 ist T'_{n+1} widerspruchsfreie Theorie über τ_{n+1} . Wähle eine maximal widerspruchsfreie Theorie T_{n+1} über τ_{n+1} mit $T'_{n+1} \subseteq T_{n+1}$.

Setze schließlich $\tau^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tau_n$ und $T^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$. Wir zeigen, dass T^* maximal widerspruchsfreie Henkin-Theorie über τ^* ist.

Nach Lemma 3.8 sind alle T_n widerspruchsfrei über τ^* . Nach Lemma 3.4 c) ist damit auch T^* widerspruchsfrei. Sei nun φ eine Aussage über τ^* . Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass φ bereits Aussage über τ_n ist. Da T_n maximal widerspruchsfrei ist, gilt $\varphi \in T_n \subseteq T^*$ oder $T_n \cup \{\varphi\}$ ist widerspruchsvoll. Im letzteren Fall ist auch $T^* \cup \{\varphi\}$ widerspruchsvoll. Das zeigt, dass T^* maximal widerspruchsfrei ist.

Sei nun $\varphi = \varphi(x)$ Formel über τ^* mit $\exists_x \varphi \in T^*$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\exists_x \varphi \in T_n$. Nach Wahl von τ_{n+1} und T_{n+1} gibt es ein Konstantensymbol $c \in \tau_{n+1} \subseteq \tau^*$ mit $\varphi(x/c) \in T_{n+1} \subseteq T^*$. Das zeigt, dass T^* Henkin-Theorie ist. \square

3.2. Etwas über Kardinalzahlen.

Definition 3.14. Seien A und B Mengen. A ist *gleichmächtig* mit B ($A \approx B$), falls es eine Bijektion zwischen A und B gibt. A ist *nicht größer* als B ($A \preceq B$), falls es eine Injektion $i : A \rightarrow B$ gibt.

Lemma 3.15. a) Die Relation \approx zwischen Mengen ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

b) Die Relation \preceq zwischen Mengen ist reflexiv und transitiv.

c) $A \preceq B$ gilt genau dann, wenn es eine Surjektion $s : B \rightarrow A$ gibt.

d) Gilt $A \preceq B$ und $B \preceq A$, so ist $A \approx B$.

Definition und Bemerkung 3.16. a) Die (echte) Klasse der *Kardinalzahlen* ist ein Repräsentantensystem für die \approx -Äquivalenzklassen von Mengen. Nach Lemma 3.15 sind die Kardinalzahlen damit durch \preceq linear geordnet. Für zwei Kardinalzahlen κ und λ schreibt man $\kappa \leq \lambda$ anstelle von $\kappa \preceq \lambda$.

b) Für eine Menge A ist $|A|$, die *Mächtigkeit* von A , die eindeutig bestimmte Kardinalzahl, die mit A gleichmächtig ist. Wir vergessen in Zukunft die Relationen \preceq und \approx und schreiben $|A| \leq |B|$ und $|A| = |B|$ anstelle von $A \preceq B$ und $A \approx B$.

c) Die endlichen Kardinalzahlen sind genau die natürlichen Zahlen. Man erinnere sich daran, dass jede natürliche Zahl n gleich der n -elementigen Menge ihrer Vorgänger ist.

Definition und Bemerkung 3.17. Die Klasse der Kardinalzahlen ist durch \leq sogar *wohlgeordnet*, d.h., \leq ist linear (siehe oben) und jede nichtleere Klasse von Kardinalzahlen hat ein bzgl. \leq kleinstes Element. Insbesondere hat jede nichtleere Menge von Kardinalzahlen ein kleinstes Element. Die kleinste unendliche Kardinalzahl nennt man \aleph_0 („aleph-null“). Die Mächtigkeit von \mathbb{N} ist \aleph_0 .

Als nächstes definieren wir Rechenoperationen zwischen Kardinalzahlen.

Definition 3.18. Seien κ und λ Kardinalzahlen und A und B disjunkte Mengen mit $|A| = \kappa$ und $|B| = \lambda$. Wir setzen

$$\kappa + \lambda := |A \cup B|, \quad \kappa \cdot \lambda := |A \times B|, \quad \kappa^\lambda := |\{f : B \rightarrow A\}|.$$

Man beachte, dass diese Definitionen unabhängig von der Wahl von A und B sind. Anstelle von A und B hätten wir auch κ und λ schreiben können, außer im Falle der Addition, wo es wichtig ist, disjunkte Mengen zu benutzen.

Lemma 3.19. a) Die Operationen $+$ und \cdot zwischen Kardinalzahlen sind kommutativ und assoziativ. Auf den natürlichen Zahlen stimmen sie mit der üblichen Addition bzw. der üblichen Multiplikation überein. Auch die Exponentiation zwischen Kardinalzahlen stimmt auf den natürlichen Zahlen mit der üblichen Exponentiation überein.

b) Seien $\kappa \leq \kappa'$ und $\lambda \leq \lambda'$ Kardinalzahlen. Dann gilt

$$\kappa + \lambda \leq \kappa' + \lambda', \quad \kappa \cdot \lambda \leq \kappa' \cdot \lambda', \quad \kappa^\lambda \leq \kappa'^{\lambda'}.$$

c) Für Kardinalzahlen κ , λ und μ gilt

$$\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$$

d) Sei A eine Menge der Mächtigkeit κ . Dann gilt

$$\kappa < 2^\kappa = |\mathcal{P}(A)|.$$

Dabei bezeichnet $<$ wie üblich die Relation $\leq \setminus =$.

e) Für Kardinalzahlen κ , λ und μ gilt

$$\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu, \quad (\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}.$$

Die Behauptungen dieses Lemmas rechnen sich fast von selbst nach. Weniger trivial ist die folgende Aussage über Kardinalzahlarithmetik.

Satz 3.20. *Seien κ und λ Kardinalzahlen mit $\max(\kappa, \lambda) \geq \aleph_0$. Dann gilt*

$$\kappa + \lambda = \max(\kappa, \lambda).$$

Sind κ und λ von 0 verschieden, so gilt zusätzlich

$$\kappa \cdot \lambda = \max(\kappa, \lambda).$$

Korollar 3.21. *a) Für jede unendliche Kardinalzahl κ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\kappa^n = \kappa$.*

b) Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen mit $|I| \leq \lambda$ und $|A_i| \leq \kappa$ für alle $i \in I$. Dann gilt $|\bigcup_{i \in I} A_i| \leq \kappa \cdot \lambda$.

c) Sei Z ein beliebiges, nichtleeres Alphabet. Dann ist $|Z^| = \max(\aleph_0, |Z|)$.*

d) Für ein Vokabular $\tau = C \cup F \cup R$ sei $\|\tau\| := \max(\aleph_0, |\tau|)$. Die Menge X der Individuenvariablen sei abzählbar unendlich, also von der Mächtigkeit \aleph_0 . Dann gibt es genau $\|\tau\|$ Formeln und auch genau $\|\tau\|$ Aussagen über τ . Außerdem gibt es höchstens $\|\tau\|$ Terme über τ .

Beweis. a) folgt mittels vollständiger Induktion über n aus Satz 3.20.

b) Fixiere für jedes $i \in I$ eine Injektion $f_i : A_i \rightarrow \kappa$. Fixiere eine Injektion $g : I \rightarrow \lambda$. Wir definieren eine Injektion $h : \bigcup_{i \in I} A_i \rightarrow \kappa \times \lambda$.

Sei $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Wähle $i \in I$ mit $a \in A_i$. Setze $h(a) := (f_i(a), g(i))$. Es ist klar, dass h das Gewünschte leistet.

c) Es ist klar, dass es mindestens $|Z|$ Wörter über Z gibt. Da Z^* Wörter beliebiger Länge enthält, ist $|Z^*|$ unendlich. Damit gilt $|Z^*| \geq \max(|Z|, \aleph_0)$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau

$$|Z|^n \leq \max(|Z|, \aleph_0)$$

Wörter der Länge n über Z . Nach b) gibt es daher höchstens

$$\max(|Z|, \aleph_0) \cdot \aleph_0 = \max(|Z|, \aleph_0)$$

Wörter über Z .

d) Nach c) gibt es höchstens $\|\tau\|$ Wörter über dem zu τ gehörigen Alphabet (τ zusammen mit den Individuenvariablen, Klammern und logischen Zeichen). Insbesondere gibt es höchstens $\|\tau\|$ Terme, Formeln und Aussagen über τ . Wie man schnell sieht, gibt es mindestens $\|\tau\|$ Formeln und Aussagen über τ . □

Korollar 3.22. *Sei T eine widerspruchsfreie Theorie über τ . Dann gibt es ein Vokabular τ^* , das durch Hinzufügen neuer Konstantensymbole aus τ hervorgeht, und eine maximal widerspruchsfreie Henkin-Theorie $T^* \supseteq T$ über τ^* , so dass gilt: $\|\tau^*\| = \|\tau\|$*

Beweis. Im Beweis von Satz 3.13 setzen wir $\kappa := \|\tau\|$. Induktiv lässt sich dann für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen: $\|\tau_n\| = \kappa$. Ist nämlich $\|\tau_n\| = \kappa$, so gilt $\|\tau_{n+1}\| = \kappa$, da es nur $\|\tau_n\|$ Formeln über τ_n gibt. Insgesamt erhält man

$$\kappa = \|\tau\| = \|\tau_0\| \leq \|\tau^*\| \leq \aleph_0 \cdot \kappa = \kappa.$$

Insbesondere gilt $\|\tau^*\| = \kappa$. □

3.3. Beweis des Vollständigkeitsatzes.

Definition 3.23. Sei $\tau = C \cup F \cup R$ ein Vokabular. Eine τ -Struktur $\mathcal{A} = (A, \dots)$ heißt *kanonisch*, falls $A = \{c^{\mathcal{A}} : c \in C\}$ gilt.

Satz 3.24. *Jede maximal widerspruchsfreie Henkin-Theorie T über $\tau = C \cup F \cup R$ hat (bis auf Isomorphie genau) ein kanonisches Modell.*

Korollar 3.25. *Jede widerspruchsfreie Theorie T über einem Vokabular τ hat ein Modell einer Mächtigkeit $\leq |\tau|$.*

Beweis. Nach Korollar 3.22 existieren ein Vokabular $\tau^* \supseteq \tau$ und eine maximal widerspruchsfreie Henkin-Theorie $T^* \supseteq T$ mit $|\tau^*| \leq |\tau|$. Nach Satz 3.24 hat T^* ein kanonisches Modell $\mathcal{A} = (A, \dots)$. Wegen der Kanonizität von \mathcal{A} gilt $|A| \leq |\tau^*| \leq |\tau|$. \square

Korollar 3.26 (Vollständigkeitsatz). *Sei T eine Theorie über τ und α eine Formel über τ . Dann gilt*

$$T \models \alpha \quad \Leftrightarrow \quad T \vdash \alpha.$$

Beweis. Nach dem Korrektheitssatz (Satz 2.33) gilt

$$T \vdash \alpha \quad \Rightarrow \quad T \models \alpha.$$

Gelte nun $T \not\vdash \alpha$. Dann ist $T \cup \neg\alpha$ widerspruchsfrei und hat nach Korollar 3.25 ein Modell \mathcal{A} . Wegen $\mathcal{A} \models \neg\alpha$ gilt $\mathcal{A} \not\models \alpha$. Das zeigt $T \not\models \alpha$. \square

Beweis von Satz 3.24. Sei T maximal widerspruchsfreie Henkin-Theorie über dem Vokabular $\tau = C \cup F \cup R$. Wir konstruieren ein kanonisches Modell $\mathcal{A} = (A, \dots)$ von T .

Als unterliegenden Menge A wählen wir C / \sim , wobei \sim die wie folgt definierte Äquivalenzrelation ist:

$$c \sim d \quad :\Leftrightarrow \quad c \equiv d \in T$$

Wir zeigen zunächst, dass \sim Äquivalenzrelation auf C ist. Seien $c, d, e \in C$. Die identitätlogischen Axiome zusammen mit Lemma 2.35 und Lemma 2.36 zeigen, dass folgende Aussagen schon aus der leeren Theorie ableitbar sind:

- (1) $c \equiv c$
- (2) $c \equiv d \rightarrow d \equiv c$
- (3) $(c \equiv d \wedge d \equiv e) \rightarrow c \equiv e$

Da T maximal widerspruchsfrei ist, sind diese Aussagen bereits Elemente von T . Insbesondere gilt $c \sim c$.

Ist $c \sim d$, so ist $c \equiv d \in T$. Die mit Modus Ponens folgt aus (2) $T \vdash d \equiv c$. Da T maximal widerspruchsfrei ist, gilt $d \equiv c \in T$, also $d \sim c$.

Gelte nun $c \sim d$ und $d \sim e$. Dann sind $c \equiv d$ und $d \equiv e$ Elemente von T . (3) zusammen mit den üblichen Ableitungstricks liefert $T \vdash c \equiv e$ und damit $c \equiv e \in T$. Es folgt $c \sim e$. Das zeigt, dass \sim Äquivalenzrelation ist.

Die Interpretation der Konstantensymbole auf $A = C / \sim$ ist die naheliegende: für $c \in C$ sei $c^{\mathcal{A}} := [c]$, wobei $[c]$ die \sim -Äquivalenzklasse von c bezeichnet.

Als Nächstes definieren wir die Interpretationen der Relationssymbole. Sei $r \in R$ ein n -stelliges Relationssymbol. Setze

$$r^{\mathcal{A}} := \{([c_1], \dots, [c_n]) : c_1, \dots, c_n \in C \text{ und } r(c_1, \dots, c_n) \in T\}.$$

Wir müssen zeigen, dass $r^{\mathcal{A}}$ wohldefiniert ist.

Seien $c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n \in C$, so dass für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt: $c_i \sim d_i$. Wir zeigen

$$(*) \quad r(c_1, \dots, c_n) \in T \quad \Leftrightarrow \quad r(d_1, \dots, d_n) \in T.$$

Die identitätslogischen Axiome zusammen mit Lemma 2.35 und Lemma 2.36 liefern die Ableitbarkeit von

$$(c_1 \equiv d_1 \wedge \cdots \wedge c_n \equiv d_n) \rightarrow (r(c_1, \dots, c_n) \rightarrow r(d_1, \dots, d_n)).$$

Wegen der maximalen Widerspruchsfreiheit von T ist diese Aussage schon Element von T . Nach Wahl der c_i und d_i gilt

$$c_1 \equiv d_1, \dots, c_n \equiv d_n \in T.$$

Mit den üblichen Ableitungstricks (prädikatenlogische Tautologien und Modus Ponens) erhält man

$$T \vdash r(c_1, \dots, c_n) \rightarrow r(d_1, \dots, d_n).$$

Ist nun $r(c_1, \dots, c_n) \in T$, so gilt mittels Modus Ponens $T \vdash r(d_1, \dots, d_n)$ und damit $r(d_1, \dots, d_n) \in T$. Die Rückrichtung von (*) erhält man analog.

Die Interpretationen der Funktionssymbole definieren wir ähnlich wie bei den Relationssymbolen. Sei $f \in F$ ein n -stelliges Funktionssymbol und seien $c_1, \dots, c_n \in C$. Sei t der Term $f(c_1, \dots, c_n)$. Das Axiom $x \equiv x$ zusammen mit Lemma 2.35 und Lemma 2.36 liefert $\vdash t \equiv t$. Sei α die Formel $x \equiv t$. Das Substitutionsaxiom

$$\alpha(x/t) \rightarrow \exists x \alpha$$

lautet ausgeschrieben

$$t \equiv t \rightarrow \exists x x \equiv f(c_1, \dots, c_n).$$

Eine Anwendung von Modus Ponens liefert $T \vdash \exists x x \equiv f(c_1, \dots, c_n)$. Es folgt $\exists x x \equiv f(c_1, \dots, c_n) \in T$.

Da T eine Henkin-Theorie ist, existiert ein Konstantensymbol $d \in C$ mit $d \equiv f(c_1, \dots, c_n) \in T$. Setze

$$f^{\mathcal{A}}([c_1], \dots, [c_n]) := [d].$$

Wie im Falle der Relationssymbole zeigt man, dass $f^{\mathcal{A}}$ wohldefiniert ist. Damit ist die Definition der Struktur \mathcal{A} abgeschlossen. Es bleibt $\mathcal{A} \models T$ nachzurechnen.

Zunächst zeigen wir für jeden variablenfreien Term t :

$$d \equiv t \in T \quad \Leftrightarrow \quad [d] = t^{\mathcal{A}}$$

Wir benutzen Induktion über den Termaufbau. Ist t ein Konstantensymbol, so folgt die Behauptung aus der Definition und den Eigenschaften von \sim .

Sei nun t von der Form $f(t_1, \dots, t_n)$, die t_i variablenfrei. Angenommen, $d \equiv t \in T$. Dann existieren $c_i \in C$ mit $[c_i] = t_i^{\mathcal{A}}$ für alle i . Nach Induktionsvoraussetzung gilt $c_i \equiv t_i \in T$ für alle i . Es gilt

$$\vdash (c_1 \equiv t_1 \wedge \cdots \wedge c_n \equiv t_n) \rightarrow f(t_1, \dots, t_n) \equiv f(c_1, \dots, c_n).$$

Das liefert

$$T \vdash f(c_1, \dots, c_n) \equiv f(t_1, \dots, t_n).$$

Wegen $d \equiv t \in T$ und der maximalen Widerspruchsfreiheit von T erhalten wir $d \equiv f(c_1, \dots, c_n) \in T$. Nach Definition von $f^{\mathcal{A}}$ ist

$$[d] = f^{\mathcal{A}}([c_1], \dots, [c_n]) = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}, \dots, t_n^{\mathcal{A}}) = t^{\mathcal{A}}.$$

Angenommen, $[d] = t^{\mathcal{A}}$. Wähle c_1, \dots, c_n wie oben mit $[c_i] = t_i^{\mathcal{A}}$ für alle i . Nach Induktionsvoraussetzung gilt $c_i \equiv t_i \in T$ für alle i . Es gilt $[d] = f^{\mathcal{A}}([c_1], \dots, [c_n])$. Nach Definition von $f^{\mathcal{A}}$ ist $d \equiv f(c_1, \dots, c_n) \in T$. Wie oben sieht man

$$f(c_1, \dots, c_n) \equiv f(t_1, \dots, t_n) \in T.$$

Es folgt $d \equiv f(t_1, \dots, t_n) \in T$, was zu zeigen war.

Wir zeigen jetzt durch Induktion über den Formelaufbau, das für jede Aussage α über τ gilt: $\alpha \in T \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \alpha$. Daraus folgt sofort $\mathcal{A} \models T$.

Sei α von der Form $t \equiv s$ für variablenfreie Terme t und s . Wähle eine Konstante c mit $[c] = t^A$. Wie wir bereits gezeigt haben, gilt $c \equiv t \in T$.

Angenommen, $s \equiv t \in T$. Wegen der maximalen Widerspruchsfreiheit gilt dann auch $c \equiv s \in T$. Es folgt $[c] = s^A$ und damit $\mathcal{A} \models s \equiv t$.

Gelte nun $\mathcal{A} \models s \equiv t$. Dann ist $[c] = s^A$ und damit $c \equiv s \in T$. Es folgt $t \equiv s \in T$.

Sei α von der Form $r(t_1, \dots, t_n)$ für ein n -stelliges Relationssymbol r und variablenfreie Terme t_i . Wähle Konstanten c_1, \dots, c_n mit $[c_i] = t_i^A$ für alle i . Dann gilt $c_i \equiv t_i \in T$ für alle i .

Gelte $\mathcal{A} \models r(t_1, \dots, t_n)$. Dann gilt auch $\mathcal{A} \models r(c_1, \dots, c_n)$. Nach Definition von r^A ist $r(c_1, \dots, c_n) \in T$. Es folgt $r(t_1, \dots, t_n) \in T$.

Gelte $r(t_1, \dots, t_n) \in T$. Dann ist auch $r(c_1, \dots, c_n) \in T$. Es folgt $\mathcal{A} \models r(c_1, \dots, c_n)$ und damit $\mathcal{A} \models r(t_1, \dots, t_n)$.

Sei $\alpha = \neg\beta$. Dann gilt

$$\mathcal{A} \models \alpha \Leftrightarrow \mathcal{A} \not\models \beta \Leftrightarrow \beta \notin T \Leftrightarrow \alpha \in T.$$

Sei $\alpha = \beta \vee \gamma$. Dann gilt

$$\mathcal{A} \models \alpha \Leftrightarrow (\mathcal{A} \models \beta \text{ oder } \mathcal{A} \models \gamma) \Leftrightarrow (\beta \in T \text{ oder } \gamma \in T) \Leftrightarrow \alpha \in T.$$

Sei schließlich $\alpha = \exists x\beta$. Dann gilt $\mathcal{A} \models \exists x\beta$ genau dann, wenn es ein $c \in C$ gibt mit $\mathcal{A} \models \beta[[c]]$. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn es ein $c \in C$ gibt mit $\mathcal{A} \models \beta(x/c)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist Letzteres äquivalent dazu, dass es ein $c \in C$ gibt mit $\beta(x/c) \in T$. Da T Henkin-Theorie ist, ist Letzteres äquivalent zu $\exists x\beta \in T$. \square

3.4. Eine Anwendung des Vollständigkeitsatzes.

Definition 3.27. Sei $Z = \{z_0, z_1, \dots\}$ ein abzählbares Alphabet. Wir nennen $W \subseteq Z^*$ *entscheidbar*, wenn es einen Algorithmus gibt, der für gegebenes $w \in Z^*$ entscheidet, ob $w \in W$ gilt. $W \subseteq Z^*$ heißt *effektiv aufzählbar* (oder auch *berechenbar aufzählbar*), wenn $W = \emptyset$ ist oder es einen Algorithmus gibt, der für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $w_n \in Z^*$ berechnet, so dass $W = \{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ gilt. (W wird in Form einer *effektiven Liste* w_0, w_1, \dots dargestellt.)

Beispiel 3.28. a) Z^* ist effektiv aufzählbar. Man kann nämlich Z^* in folgender Weise effektiv aufzählen: Schreibe in eine Liste der Reihe nach das leere Wort, das Wort z_0 , alle Wörter mit Länge ≤ 2 , die nur z_0 und z_1 benutzen, alle Wörter mit Länge ≤ 3 , die nur z_0, z_1 und z_2 benutzen usw.

b) Jede entscheidbare Menge $W \subseteq Z^*$ ist effektiv aufzählbar. Dazu schreibt man Z^* in einer effektiven Liste w_0, w_1, \dots auf. Dann entscheidet man der Reihe nach für jedes $n \in \mathbb{N}$, ob $w_n \in W$ gilt. Falls ja, so schreibt man w_n in die Liste für W .

c) Jedes endliche $W \subseteq Z^*$ ist entscheidbar.

Sei nun τ ein endliches Vokabular und

$$Z := \tau \cup \{(\cdot), \equiv, \exists, \neg, \vee\} \cup X,$$

wobei $X = \{x_0, x_1, \dots\}$ eine abzählbare (genauer: effektiv aufzählbare) Menge von Variablen ist.

Lemma 3.29. *Über dem Alphabet $Z \cup \{ \langle \cdot \rangle, | \}$ sind folgende Mengen entscheidbar:*

a) *Die Menge Tm_τ der Terme über τ ; die Menge Fml_τ der Formeln über τ ; die Menge der Aussagen über τ .*

b) *Die Mengen*

$$S_0 := \{ \langle \alpha_1 | \dots | \alpha_n \rangle : n \in \mathbb{N} \text{ und } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \text{Fml}_\tau \}$$

und

$$S_1 := \{ \langle \alpha_1 | \dots | \alpha_n \rangle : n \in \mathbb{N} \text{ und } (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{ ist ein Beweis} \}.$$

c) Die Menge

$$S_T := \{ \langle \alpha_1 | \dots | \alpha_n \rangle : n \in \mathbb{N} \text{ und } (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{ ist ein Beweis aus } T \}$$

für jede entscheidbare Theorie T über τ .

Satz 3.30. Sei T eine entscheidbare Theorie über τ . Dann ist die Menge $\{ \alpha \in \text{Fml}_\tau : T \vdash \alpha \}$ effektiv aufzählbar.

Beweis. Nach Lemma 3.29 c) ist die Menge der Beweise aus T entscheidbar und damit auch effektiv aufzählbar. Sei

$$(\alpha_1^0, \dots, \alpha_{n_0}^0), (\alpha_1^1, \dots, \alpha_{n_1}^1), \dots$$

eine effektive Liste der Beweise aus T . Dann ist $\alpha_{n_0}^0, \alpha_{n_1}^1, \dots$ eine effektive Liste der aus T ableitbaren Formeln. \square

Korollar 3.31. Sei T eine entscheidbare Theorie über τ . Dann ist die Menge $\{ \alpha \in \text{Fml}_\tau : T \models \alpha \}$ effektiv aufzählbar.

Beweis. Nach dem Vollständigkeitsatz ist $T \vdash \alpha$ äquivalent zu $T \models \alpha$. Die Behauptung des Korollars folgt nun sofort aus Satz 3.30. \square

4. ETWAS MODELLTHEORIE

4.1. Der Kompaktheitssatz und seine Anwendungen.

Satz 4.1 (Kompaktheitssatz). *Sei T eine Theorie über einem Vokabular τ . T hat genau dann ein Modell, wenn jede endliche Teilmenge T_0 von T ein Modell hat.*

Beweis. Nach Korollar 3.25 hat T genau dann ein Modell, wenn T widerspruchsfrei ist. Das ist aber genau dann der Fall, wenn jede endliche Teilmenge von T widerspruchsfrei ist, also ein Modell hat. \square

Satz 4.2 (Endlichkeitssatz). *Sei T eine Menge von Aussagen und α eine Formel über einem Vokabular τ . Dann gilt $T \models \alpha$ genau dann, wenn T eine endliche Teilmenge T_0 hat, so dass $T_0 \models \alpha$ gilt.*

Beweis. Offenbar ist α genau dann aus T ableitbar, wenn α aus einer endlichen Teilmenge von T ableitbar ist. Mit dem Vollständigkeitssatz folgt die Behauptung des Endlichkeitssatzes. \square

Satz 4.3. *Sei T eine Theorie über einem Vokabular τ , die ein unendliches Modell oder beliebig große endliche Modelle hat. Dann hat T Modelle beliebig großer Mächtigkeit.*

Beweis. Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Wir erweitern das Vokabular τ zu einem Vokabular τ' , indem wir κ neue Konstantensymbole einführen. Betrachte die Theorie

$$T' := T \cup \{\neg c \equiv d : c \text{ und } d \text{ sind verschiedene neue Konstantensymbole}\}.$$

Wir zeigen, dass T' ein Modell hat. Nach Satz 4.1 genügt es zu zeigen, dass jede endliche Teilmenge von T_0 von T' ein Modell hat.

Da T_0 endlich ist, kommen in T_0 auch nur endlich viele der neuen Konstantensymbole vor. Wähle ein Modell \mathcal{A} von T , das mindestens soviele Elemente hat, wie in T_0 neue Konstantensymbole vorkommen. Expandiere \mathcal{A} zu einer τ' -Struktur \mathcal{A}_0 , in dem die in T_0 vorkommenden neuen Konstantensymbole paarweise verschieden interpretiert werden. Die Interpretation der anderen neuen Konstantensymbole in \mathcal{A}_0 sei beliebig gewählt. Es ist klar, dass \mathcal{A}_0 Modell von T_0 ist.

Damit existiert ein Modell \mathcal{A}' von T' . Nach Wahl von T' hat die Trägermenge von \mathcal{A}' mindestens die Mächtigkeit κ . Außerdem ist $\mathcal{A}' \upharpoonright \tau$ ein Modell von T . \square

Korollar 4.4. *a) Eine erststufige Theorie, die beliebig große endliche Modelle hat, hat auch unendliche Modelle. Insbesondere lassen sich die Klassen der endlichen Mengen, der endlichen Halbordnungen, der endlichen Graphen, der endlichen Körper usw. nicht erststufig axiomatisieren.*

b) Die Theorie von $\mathbb{N} = (\mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot)$ hat Modelle, die nicht zu \mathbb{N} isomorph sind. Die entsprechenden Aussagen gelten auch für \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{Z} und \mathbb{C} .

Modelle der Theorie von wohlbekannten Strukturen wie \mathbb{R} oder \mathbb{N} , die nicht zu den typischen Modellen der Theorie isomorph sind, nennt man *Nichtstandard-Modelle*.

Satz 4.5. *Es gibt abzählbare Modelle von $\text{Th}(\mathbb{N})$, die nicht zu \mathbb{N} isomorph sind.*

Beweis. Wir erweitern das Vokabular für \mathbb{N} um ein neues Konstantensymbol c . Für jedes n sei φ_n die Aussage, die sagt, dass c mindestens der n -te Nachfolger von 0 ist. Mit dem Kompaktheitssatz sieht man leicht, dass

$$T := \text{Th}(\mathbb{N}) \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$$

ein Modell \mathcal{A} hat. Nach Korollar 3.25 kann \mathcal{A} abzählbar gewählt werden.

Wir haben zu zeigen, dass das Redukt von \mathcal{A} auf das Vokabular von \mathbb{N} nicht zu \mathbb{N} isomorph ist. Nach Wahl von T existiert in \mathcal{A} ein Element (nämlich $c^{\mathcal{A}}$), welches für kein $n \in \mathbb{N}$ der n -te Nachfolger von $0^{\mathcal{A}}$ ist. Ein entsprechendes Element existiert in \mathbb{N} nicht. \square

4.2. Elementare Submodelle.

Definition 4.6. a) Sei $\mathcal{A} = (A, \dots)$ eine τ -Struktur. Eine τ -Struktur $\mathcal{B} = (B, \dots)$ heißt *Substruktur* von \mathcal{A} ($\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$), falls gilt:

- (1) $B \subseteq A$
- (2) Ist $c \in \tau$ ein Konstantensymbol, so gilt $c^{\mathcal{B}} = c^{\mathcal{A}}$.
- (3) Ist $r \in \tau$ ein n -stelliges Relationssymbol, so gilt $r^{\mathcal{B}} = r^{\mathcal{A}} \cap B^n$.
- (4) Ist $f \in \tau$ ein n -stelliges Funktionssymbol, so gilt $f^{\mathcal{B}} = f^{\mathcal{A}} \upharpoonright B^n$. Insbesondere ist B unter $f^{\mathcal{A}}$ abgeschlossen.

b) Sei $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$. Dann heißt eine Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ *absolut* für \mathcal{A} und \mathcal{B} , wenn für alle $b_1, \dots, b_n \in B$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[b_1, \dots, b_n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B} \models \varphi[b_1, \dots, b_n]$$

c) Sei $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$. \mathcal{B} ist *elementare Substruktur* von \mathcal{A} ($\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$), wenn jede Formel für \mathcal{A} und \mathcal{B} absolut ist.

d) Seien $\mathcal{A} = (A, \dots)$ und $\mathcal{B} = (B, \dots)$ τ -Strukturen. Eine Abbildung $e : A \rightarrow B$ heißt *elementare Einbettung* von \mathcal{A} in \mathcal{B} , wenn für alle $a_1, \dots, a_n \in A$ und alle Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ über τ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B} \models \varphi[e(a_1), \dots, e(a_n)]$$

(Ist $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$, so gilt $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ genau dann, wenn die Identität von A nach B elementare Einbettung ist).

Definition 4.7. Zwei τ -Strukturen \mathcal{A} und \mathcal{B} sind *elementar äquivalent* ($\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$) wenn sie die gleiche Theorie haben.

Bemerkung 4.8. Aus $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$ folgt $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$.

Lemma 4.9. Sei \mathcal{A} eine τ -Struktur und $\mathcal{B} = (B, \dots) \leq \mathcal{A}$. Dann ist \mathcal{B} genau dann *elementare Substruktur* von \mathcal{A} , wenn für jede Formel $\psi(x, y_1, \dots, y_n)$ über τ und alle b_1, \dots, b_n mit $\mathcal{A} \models \exists x \psi[b_1, \dots, b_n]$ ein $a \in B$ existiert mit $\mathcal{B} \models \psi[a, b_1, \dots, b_n]$.

Beweis. Die Implikation von links nach rechts ist klar. Wir zeigen die andere Richtung. Gelte die rechte Seite der Äquivalenz im Lemma. Wir zeigen durch Induktion über den Formalaufbau, dass alle Formeln φ für \mathcal{A} und \mathcal{B} absolut sind.

Ist φ atomar, so ist φ absolut für \mathcal{A} und \mathcal{B} , da \mathcal{B} Substruktur von \mathcal{A} ist. Wie man leicht sieht, sind Boolesche Kombinationen absoluter Formeln absolut. Es bleibt der Fall zu betrachten, dass φ von der Form $\exists x \psi$ ist, wobei ψ für \mathcal{A} und \mathcal{B} absolut ist. Aber in diesem Fall ist φ nach der rechten Seite der Äquivalenz im Lemma absolut. \square

Lemma 4.10. Sei $\mathcal{A} = (A, \dots)$ eine τ -Struktur und $M \subseteq A$. Weiter sei κ Kardinalzahl mit $\kappa \geq \max(\aleph_0, |\tau|, |M|)$ und $\kappa \leq |A|$. Dann existiert eine Substruktur $\mathcal{B} = (B, \dots)$ von \mathcal{A} mit $M \subseteq B$ und $|B| = \kappa$.

Beweis. Sei $B \subseteq A$ eine beliebige Menge. Um B zu einer Substruktur von \mathcal{A} zu machen, muss man jedes n -stellige Relationssymbol $r \in \tau$ auf B durch $r^{\mathcal{A}} \cap B^n$ interpretieren. Jedes Konstantensymbol $c \in \tau$ muss durch $c^{\mathcal{A}}$ interpretiert werden. Insbesondere muss $c^{\mathcal{A}} \in B$ für jedes Konstantensymbol $c \in \tau$ gelten.

Jedes n -stellige Funktionssymbol $f \in \tau$ muss auf B durch $f^{\mathcal{A}} \upharpoonright B^n$ interpretiert werden. Das geht genau dann, wenn B unter den Funktionen $f^{\mathcal{A}}$, $f \in \tau$, abgeschlossen ist.

Wir müssen also zeigen, dass eine Menge $B \subseteq A$ existiert, die M umfasst, alle Konstanten von \mathcal{A} enthält, die Mächtigkeit κ hat und unter allen Funktionen $f^{\mathcal{A}}$ abgeschlossen ist.

Wähle zunächst eine Menge $M' \subseteq A$ mit $M \subseteq M'$ und $|M'| = \kappa$. Setze dann

$$B_0 := M' \cup \{c^A : c \in \tau \text{ ist Konstantensymbol}\}.$$

Sei B_n bereits definiert. Setze dann

$$B_{n+1} := B_n \cup \{f^A(a_1, \dots, a_k) : f \in \tau \text{ ist } k\text{-stelliges} \\ \text{Funktionssymbol und } a_1, \dots, a_k \in B_n.\}$$

Definiere schließlich $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

Es ist klar, dass $|B_0| = \kappa$ gilt. Durch Induktion über n sieht man schnell, dass $|B_n| = \kappa$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wegen $\kappa \geq \aleph_0$ ist $\kappa \leq |B| \leq \kappa \cdot \aleph_0 = \kappa$. Aus der Konstruktion von B folgt, dass für jedes k -stellige Funktionssymbol $f \in \tau$ und alle $a_1, \dots, a_k \in B$ gilt: $f^A(a_1, \dots, a_k) \in B$.

B ist also unter den Funktionen von \mathcal{A} abgeschlossen. Wegen $B_0 \subseteq B$ umfasst B die Menge M und enthält alle Konstanten von \mathcal{A} . Damit ist B Trägermenge einer Substruktur \mathcal{B} von \mathcal{A} mit den gewünschten Eigenschaften. \square

Satz 4.11 (Satz von Löwenheim-Skolem, abwärts). *Sei $\mathcal{A} = (A, \dots)$ eine τ -Struktur und $M \subseteq A$. Weiter sei κ eine Kardinalzahl mit $\max(\aleph_0, |M|, |\tau|) \leq \kappa \leq |A|$. Dann existiert eine elementare Substruktur $\mathcal{B} = (B, \dots)$ von \mathcal{A} mit $M \subseteq B$ und $|B| = \kappa$.*

Beweis. Nach Lemma 4.9 genügt es zu zeigen, dass eine Substruktur $\mathcal{B} = (B, \dots)$ von \mathcal{A} existiert mit $M \subseteq B$ und $|B| = \kappa$, so dass für alle Formeln $\varphi(x, y_1, \dots, y_n)$ und alle $b_1, \dots, b_n \in B$ mit $\mathcal{A} \models \exists x \varphi[b_1, \dots, b_n]$ ein $a \in B$ existiert mit $\mathcal{B} \models \varphi[a, b_1, \dots, b_n]$.

Dazu erweitern wir unser Vokabular τ zu einem Vokabular τ' , indem wir für jede Formel $\varphi(x, y_1, \dots, y_n)$ ein n -stelliges Funktionssymbol f_φ einführen und wie folgt auf A interpretieren:

Für b_1, \dots, b_n sei $f_\varphi^A(b_1, \dots, b_n)$ ein $a \in A$ mit $\mathcal{A} \models \varphi(a, b_1, \dots, b_n)$, falls so ein a existiert. Sonst sei $f_\varphi^A(b_1, \dots, b_n)$ ein beliebiges $a \in A$.

Die Funktionen f_φ^A nennt man *Skolemfunktionen* für die Struktur \mathcal{A} . Sei \mathcal{A}' die Expansion von \mathcal{A} um die gewählten Skolemfunktionen für \mathcal{A} . \mathcal{A}' ist eine τ' -Struktur. Wie wir bereits nachgerechnet haben, gibt es höchstens $\max(\aleph_0, |\tau|)$ Formeln über τ . Damit hat τ' höchstens die Mächtigkeit $\max(\aleph_0, |\tau|)$.

Nach Lemma 4.10 hat \mathcal{A}' eine Substruktur $\mathcal{B}' = (B, \dots)$ mit $M \subseteq B$ und $|B| = \kappa$. Wir zeigen, dass $\mathcal{B} := \mathcal{B}' \upharpoonright \tau$ elementare Substruktur von \mathcal{A} ist.

$\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$ ist klar. Sei $\varphi(x, y_1, \dots, y_n)$ eine Formel über τ und $b_1, \dots, b_n \in B$ mit $\mathcal{A} \models \exists x \varphi[b_1, \dots, b_n]$. Wir haben $\mathcal{B} \models \exists x \varphi[b_1, \dots, b_n]$ nachzurechnen. Da aber B Trägermenge einer Substruktur von \mathcal{A}' ist, ist B unter f_φ^A abgeschlossen. Insbesondere ist $a := f_\varphi^A(b_1, \dots, b_n) \in B$. Nach Wahl von f_φ^A gilt $\mathcal{B} \models \varphi[a, b_1, \dots, b_n]$ und damit $\mathcal{B} \models \exists x \varphi[b_1, \dots, b_n]$.

Nach Lemma 4.9 ist \mathcal{B} elementare Substruktur von \mathcal{A} . \square

Definition und Bemerkung 4.12. Sei $\mathcal{A} = (A, \dots)$ eine τ -Struktur und $M \subseteq A$. Das Vokabular τ_M entstehe aus τ durch Hinzufügen eines neuen Konstantensymbols c_a für jedes $a \in M$. Die Struktur \mathcal{A}_M sei die Expansion von \mathcal{A} auf τ_M , die man erhält, wenn man jedes neue Konstantensymbol c_a durch a interpretiert.

Das *elementare Diagramm* von \mathcal{A} ist die Theorie

$$\text{eldiag}(\mathcal{A}) := \{\varphi(x_1/c_{a_1}, \dots, x_n/c_{a_n}) : \varphi(x_1, \dots, x_n) \text{ ist Formel über } \tau, \\ a_1, \dots, a_n \in A \text{ und } \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]\}.$$

Offenbar gilt $\mathcal{A}_A \models \text{eldiag}(\mathcal{A})$.

Satz 4.13 (Satz von Löwenheim-Skolem, aufwärts). *Sei $\mathcal{A} = (A, \dots)$ unendliche τ -Struktur und κ Kardinalzahl mit $\kappa \geq \max(\aleph_0, |A|, |\tau|)$. Dann gibt es eine τ -Struktur $\mathcal{B} = (B, \dots)$ mit $|B| = \kappa$ und $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$.*

Beweis. Nach Satz 4.3 existiert ein Modell $\mathcal{B}_A = (B, \dots)$ von $\text{eldiag}(\mathcal{A})$ mit $|B| \geq \kappa$. Nach Satz 4.11 kann \mathcal{B}_A sogar mit $|B| = \kappa$ gewählt werden. Setze $\mathcal{B} := \mathcal{B}_A \upharpoonright \tau$. Die Abbildung $e : A \rightarrow B; a \mapsto c_a^{\mathcal{B}_A}$ ist eine elementare Einbettung von \mathcal{A} nach \mathcal{B} . \square

Definition 4.14. Sei (I, \leq) eine lineare Ordnung. Für jedes $i \in I$ sei $\mathcal{A}_i = (A_i, \dots)$ eine τ -Struktur. Für alle $i, j \in I$ mit $i \leq j$ sei $\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}_j$. Solch eine Familie $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ nennt man *elementare Kette*.

Wir definieren eine τ -Struktur $\mathcal{A} = (A, \dots)$ wie folgt. Setze $A := \bigcup_{i \in I} A_i$. Für jedes Konstantensymbol $c \in \tau$ sei $c^{\mathcal{A}} := c^{\mathcal{A}_i}$ für ein beliebiges $i \in I$. Für jedes n -stellige Funktionssymbol $f \in \tau$ und alle $a_1, \dots, a_n \in A$ wähle ein $i \in I$ mit $a_1, \dots, a_n \in A_i$. Setze dann

$$f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) := f^{\mathcal{A}_i}(a_1, \dots, a_n).$$

Für jedes n -stellige Relationssymbol $r \in \tau$ sei $r^{\mathcal{A}} := \bigcup_{i \in I} r^{\mathcal{A}_i}$.

Für \mathcal{A} schreibt man auch $\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$.

Satz 4.15. *Sei $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine elementare Kette. Dann ist $\mathcal{A} := \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ eine τ -Struktur und für jedes $i \in I$ gilt $\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}$.*

Beweis. Es ist klar, dass \mathcal{A} eine τ -Struktur ist, auch wenn die genaue Definition dieser Struktur scheinbar von einigen Wahlen abhängt. Wir zeigen zunächst, dass jedes \mathcal{A}_j Substruktur von \mathcal{A} ist. Fixiere ein $j \in I$.

Sei $c \in \tau$ ein Konstantensymbol. Für die Definition von $c^{\mathcal{A}}$ wurde ein gewisses $i \in I$ gewählt und dann $c^{\mathcal{A}} := c^{\mathcal{A}_i}$ gesetzt. Es gilt $j \leq i$ oder $i \leq j$ und damit $\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}_j$ oder $\mathcal{A}_j \preceq \mathcal{A}_i$. In jedem Falle ist $c^{\mathcal{A}_i} = c^{\mathcal{A}_j}$. Damit ist $c^{\mathcal{A}}$ unabhängig von der Wahl von i und es gilt $c^{\mathcal{A}_j} = c^{\mathcal{A}}$.

Sei $f \in \tau$ ein n -stelliges Funktionssymbol und $a_1, \dots, a_n \in A_j$. In der Definition von $f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)$ wurde ein $i \in I$ mit $a_1, \dots, a_n \in A_i$ gewählt und dann $f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathcal{A}_i}(a_1, \dots, a_n)$ gesetzt. Es gilt $i \leq j$ oder $j \leq i$ und damit $\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}_j$ oder $\mathcal{A}_j \preceq \mathcal{A}_i$. In jedem Falle ist $f^{\mathcal{A}_i}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathcal{A}_j}(a_1, \dots, a_n)$ und damit $f^{\mathcal{A}_j}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)$.

Auf ähnliche Weise sieht man für jedes n -stellige Relationssymbol $r \in \tau$, dass $r^{\mathcal{A}_j} = r^{\mathcal{A}} \cap A_j^n$ gilt. Damit ist \mathcal{A}_j Substruktur von \mathcal{A} .

Wir benutzen nun Lemma 4.9 um zu zeigen, dass jedes \mathcal{A}_j sogar elementare Substruktur von \mathcal{A} ist.

Sei $j \in I$ und $\varphi(x, y_1, \dots, y_n)$ Formel über τ . Seien $b_1, \dots, b_n \in A_j$ mit

$$\mathcal{A} \models \exists x \varphi[b_1, \dots, b_n].$$

Dann existiert ein $i \in I$, so dass es ein $a \in A_i$ gibt mit

$$\mathcal{A} \models \varphi[a, b_1, \dots, b_n].$$

Wir können dabei $i \geq j$ wählen. Es gilt

$$\mathcal{A}_i \models \exists x \varphi[b_1, \dots, b_n].$$

Wegen $\mathcal{A}_j \preceq \mathcal{A}_i$ gilt

$$\mathcal{A}_j \models \exists x \varphi[b_1, \dots, b_n].$$

Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 4.9 erfüllt und \mathcal{A}_j ist elementare Substruktur von \mathcal{A} . \square

4.3. Kategorizität und Vollständigkeit.

Definition 4.16. Eine Theorie T über einem Vokabular τ heißt *vollständig*, wenn T widerspruchsfrei ist und für alle Aussagen φ über τ entweder φ oder $\neg\varphi$ aus T folgt.

Eine Theorie T heißt κ -kategorisch für eine Kardinalzahl κ , falls T bis auf Isomorphie genau ein Modell der Mächtigkeit κ hat.

Der Zusammenhang zwischen Vollständigkeit und Kategorizität ist der folgende:

Lemma 4.17. *Sei T eine Theorie über τ und κ eine unendliche Kardinalzahl mit $|\tau| \leq \kappa$. Falls T nur unendliche Modelle hat und κ -kategorisch ist, so ist T vollständig.*

Beweis. Angenommen, T ist nicht vollständig. Also gibt es eine Aussage φ , so dass weder φ noch $\neg\varphi$ aus T folgen. Die Theorien $T_0 := T \cup \{\varphi\}$ und $T_1 := T \cup \{\neg\varphi\}$ sind beide widerspruchsfrei und haben damit Modelle. Da T nur unendliche Modelle hat, sind insbesondere die Modelle von T_0 und T_1 unendlich. Es folgt, dass T_0 und T_1 Modelle der Mächtigkeit κ haben. Wegen der κ -Kategorizität von T sind diese Modelle isomorph. Isomorphe Strukturen haben aber dieselbe Theorie. Also kann nicht die eine Struktur φ erfüllen und die andere $\neg\varphi$. Ein Widerspruch. \square

Beispiel 4.18. Die Theorie der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte ist \aleph_0 -kategorisch und damit vollständig. Die Theorie ist aber nicht 2^{\aleph_0} -kategorisch.

Beweis. Sei (L, \leq) eine abzählbare dichte lineare Ordnung ohne Endpunkte. Wir zeigen, dass (L, \leq) isomorph zu (\mathbb{Q}, \leq) ist. Sei $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Aufzählung von \mathbb{Q} und $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Aufzählung von L . Dazu konstruieren wir eine aufsteigende Kette $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ partieller Isomorphismen von L nach \mathbb{Q} . (Ein *partieller Isomorphismus* ist eine partielle Abbildung, die ein Isomorphismus zwischen ihrem Definitionsbereich und ihrem Bild ist.) Setze $f_0 := \emptyset$.

Sei f_n bereits definiert. Ist n gerade, so wähle $m \in \mathbb{N}$ minimal, so dass q_m nicht im Bild von f_n ist. Es gibt folgende Fälle:

- (1) q_m ist kleiner als alle Elemente des Bildes von f_n . Wähle $l \in L$ echt kleiner als alle Elemente des Definitionsbereiches von f_n . Das geht, da L keine Endpunkte hat.
- (2) q_m ist größer als alle Elemente im Bild von f_n . Wähle $l \in L$ echt größer als alle Elemente des Definitionsbereiches von f_n .
- (3) q_m liegt zwischen zwei Elementen des Bildes von f_n . Sei p das größte Element des Bildes von f_n unter q_m und r das kleinste über q_m . Wähle $l \in L$ zwischen $f_n^{-1}(p)$ und $f_n^{-1}(r)$. Das geht, da L dichte lineare Ordnung ist.

Setze $f_{n+1} := f_n \cup \{(l, q_m)\}$. Wie man leicht sieht, ist f_{n+1} partieller Isomorphismus. Sei nun n ungerade. Sei $m \in \mathbb{N}$ minimal, so dass l_m nicht im Definitionsbereich von f_n liegt. Wie oben erhält man ein $q \in \mathbb{Q}$, so dass $f_{n+1} := f_n \cup \{(l_m, q)\}$ partieller Isomorphismus ist. Wie man leicht nachrechnet, ist $f := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ ein Isomorphismus zwischen L und \mathbb{Q} .

Dass die Theorie der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte nicht 2^{\aleph_0} -kategorisch ist, sieht man an folgenden Beispielen: (\mathbb{R}, \leq) und $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \leq)$ sind nichtisomorphe dichte lineare Ordnungen ohne Endpunkte der Mächtigkeit 2^{\aleph_0} . $(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ ist nicht vollständig im ordnungstheoretischen Sinn, \mathbb{R} schon. \square

Wir betrachten noch zwei Beispiele vollständiger Theorien mit etwas anderem Kategorizitätsverhalten.

Beispiel 4.19. a) Sei K ein abzählbar unendlicher Körper. Die Theorie der K -Vektorräume ist κ -kategorisch für alle $\kappa > \aleph_0$, aber nicht \aleph_0 -kategorisch.

b) Sei K ein endlicher Körper. Die Theorie der K -Vektorräume ist κ -kategorisch für alle unendlichen Kardinalzahlen κ .

Beweis. a) Ist V ein überabzählbarer K -Vektorraum, so gilt $|V| = \dim(V)$. Da ein Vektorraum durch seine Dimension bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist, ist die Theorie der K -Vektorräume κ -kategorisch für alle überabzählbaren Kardinalzahlen κ . Abzählbare K -Vektorräume können die Dimensionen $1, 2, \dots$ und \aleph_0 haben. Es gibt also bis auf Isomorphie abzählbar viele abzählbare K -Vektorräume.

b) Ist K endlich, so gilt schon für jeden unendlichen K -Vektorraum V die Gleichung $|V| = \dim(V)$. Damit ist die Theorie der K -Vektorräume κ -kategorisch für alle unendlichen Kardinalzahlen κ . \square

Man beachte, dass die zwei in diesem Beispiel genannten Theorien nicht vollständig sind, da sie auch endliche Modelle haben. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es nämlich eine Aussage, die ausdrückt, dass eine Struktur genau n Elemente hat. Wenn man jedoch den beiden Theorien noch für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage hinzufügt, die ausdrückt, dass die Struktur mindestens n Elemente hat, so erhält man nach Lemma 4.17 vollständige Theorien. Es gibt auch vollständige Theorien mit unendlichen Modellen, die für kein unendliches κ κ -kategorisch sind. Allerdings sind damit die möglichen Kategorizitätsverhalten vollständiger Theorien über einem abzählbaren Vokabular auch schon ausgeschöpft:

Satz 4.20 (Satz von Morley). *Sei T eine vollständige Theorie, die unendliche Modelle hat. Ist T κ -kategorisch für ein überabzählbares κ , so ist T κ -kategorisch für jedes überabzählbare κ .*

Einen Beweis dieses Satzes findet man zum Beispiel in [Chang, Keisler: Model theory, 3rd rev. ed., Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 73, North-Holland (1990)].

5. DIE UNVOLLSTÄNDIGKEITSSÄTZE

5.1. Das Halteproblem. Bisher haben wir den Begriff „Algorithmus“ eher intuitiv benutzt. Üblicherweise versteht man unter einem Algorithmus eine Rechenvorschrift, die bei geeigneter Eingabe nach endlicher Zeit ein Ergebnis liefert. Wenn man präziser sein will, muss man genau definieren, was eine Rechenvorschrift ist und auf welche Weise gerechnet wird.

Es gibt verschiedene sinnvolle Modellierungen von „Rechenvorschrift“ und „berechenbar“. Die populärsten sind Turingmaschinen, Registermaschinen und rekursive Funktionen. Alle diese Interpretationen liefern äquivalente Begriffe von Berechenbarkeit. Das legt nahe, dass sie den „richtigen“ Begriff von Berechenbarkeit liefern.

Der Einfachheit halber bedienen wir uns der Registermaschinen. Eine Registermaschine ist einfach eine abstrakte Version eines Computers, aber mit unendlich großem Arbeitsspeicher. Berechenbar ist alles, was sich in endlicher Zeit mit einer entsprechend programmierten Registermaschine berechnen lässt. Wir fixieren also die Maschine und benutzen unterschiedliche Programme, um unterschiedliche Dinge zu berechnen. Die Programme sind in irgendeiner sinnvollen Programmiersprache geschrieben und formal einfach Wörter über einem endlichen Alphabet. Die Eingabe einer Registermaschine ist ebenfalls ein Wort, üblicher Weise über dem gleichen Alphabet wie das Programm.

Wir gehen davon aus, dass die Programmiersprache unserer Registermaschinen sinnvoll gewählt ist, so dass die Menge der (syntaktisch) korrekten Programme entscheidbar ist.

Definition 5.1. Das *Halteproblem* ist das Problem zu entscheiden, ob eine mit einem vorgelegten Programm programmierte Registermaschine bei einer ebenfalls vorgelegten Eingabe nach endlicher Zeit anhält, also die Berechnung beendet.

Satz 5.2. *Das Halteproblem ist unentscheidbar. Genauer, es gibt kein Programm P für eine Registermaschine, so dass die mit P programmierte Maschine für jedes Programm Q und jede Eingabe E nach endlicher Zeit entscheidet, ob eine mit dem Programm Q programmierte Maschine bei Eingabe E nach endlicher Zeit anhält.*

Beweis. Angenommen es gibt ein Programm P , so dass eine mit P programmierte Registermaschine bei Eingabe eines Programms Q gefolgt von einer Eingabe E entscheidet, ob die mit Q programmierte Maschine bei Eingabe von E anhält oder nicht. Wir modifizieren das Programm P so zu einem Programm P' , dass die mit P' programmierte Maschine bei Eingabe eines Programms Q genau dann anhält, wenn die mit Q programmierte Maschine bei Eingabe von Q nicht anhält.

Die Existenz des Programms P' führt nun zum Widerspruch. Dazu sehen wir uns an, was die mit P' programmierte Maschine bei Eingabe von $Q := P'$ tut. Nach Konstruktion von P' hält die mit P' programmierte Maschine bei der Eingabe von $Q = P'$ genau dann an, wenn die mit $Q = P'$ programmierte Maschine bei Eingabe von $Q = P'$ nicht anhält. Ein Widerspruch. \square

Korollar 5.3. *Die Menge aller Programme P , für die eine mit P programmierte Registermaschine bei leerer Eingabe anhält, ist nicht entscheidbar.*

Beweis. Der Beweis von Satz 5.2 zeigt, dass ein Spezialfall des Halteproblems, nämlich zu entscheiden, ob eine mit einem Programm P programmierte Maschine bei Eingabe von P anhält, nicht entscheidbar ist.

Wir benutzen diese Tatsache, um das Korollar zu zeigen. Dazu ordnen wir (auf berechenbare Weise) jedem Program Q ein Programm Q^+ zu. Die mit Q^+ programmierte Maschine schreibt zunächst das Wort Q in den Speicher und fährt dann mit der Berechnung fort wie die mit Q programmierte Maschine bei Eingabe des aktuellen Speicherinhalts (also des Wortes Q). Q^+ hält also genau dann bei leerer Eingabe, wenn Q bei Eingabe des Wortes Q hält.

Könnte man entscheiden, ob Q^+ bei leerer Eingabe anhält, so könnte man entscheiden, ob Q bei Eingabe von Q anhält. Nach dem Beweis von Satz 5.2 geht Letzteres aber nicht. \square

5.2. Unentscheidbarkeit der Arithmetik.

Definition 5.4. Das Vokabular der *Arithmetik* ist $\tau = \{0, ', +, \cdot, <\}$. Die (*elementare*) *Arithmetik* ist die Theorie von $(\mathbb{N}, 0, ', +, \cdot, <)$, wobei $'$ wie üblich die Nachfolgerfunktion (die jedes $n \in \mathbb{N}$ auf $n + 1$ abbildet) bezeichnet.

Wir werden die Unentscheidbarkeit der Arithmetik auf die Unentscheidbarkeit des Halteproblems zurückführen. Dazu müssen wir Programme für Registermaschinen durch natürliche Zahlen codieren, um dann Aussagen wie „die mit P programmierte Maschine hält bei leerer Eingabe“ als Aussagen über natürliche Zahlen formulieren zu können.

Ein wesentlicher Schritt ist dabei die Codierung endlicher Folgen natürlicher Zahlen durch einzelne natürliche Zahlen (bzw. zunächst einmal durch Paare natürlicher Zahlen). Das leistet Gödels β -Funktion.

Lemma 5.5. *Es gibt eine Funktion $\beta : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften:*

a) *Für jede Folge (a_0, \dots, a_r) natürlicher Zahlen gibt es $t, p \in \mathbb{N}$, so dass für alle $i \leq r$ gilt:*

$$\beta(t, p, i) = a_i$$

b) *Es gibt eine Formel $\chi(x_0, x_1, x_2, x_3)$ über τ , die β in \mathbb{N} definiert. D.h., für alle $t, p, i, a \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\mathbb{N} \models \chi[t, p, i, a] \quad \Leftrightarrow \quad \beta(t, p, i) = a$$

Beweis. a) Sei (a_0, \dots, a_r) gegeben. Wähle eine Primzahl $p > a_0, \dots, a_r, r + 1$ und setze

$$t := 1 \cdot p^0 + a_0 p^1 + 2p^2 + a_1 p^3 + \dots + (r + 1)p^{2r} + a_r p^{2r+1}.$$

Die Folge $(a_r, r + 1, \dots, a_1, 2, a_0, 1)$ die p -adische Darstellung von t . Man beachte, dass die p -adische Darstellung einer natürlichen Zahl eindeutig ist.

Wir zeigen zunächst, dass für alle $i \leq r$ genau dann $a = a_i$ gilt, wenn es $b_0, b_1, b_n \in \mathbb{N}$ gibt mit

- (1) $t = b_0 + b_1((i + 1) + ap + b_2 p^2)$,
- (2) $a < p$,
- (3) $b_0 < b_1$,
- (4) $b_1 = p^{2l}$ für ein geeignetes $l \in \mathbb{N}$.

Die Implikation von links nach rechts folgt dabei aus der Definition von t . Für die andere Richtung nehmen wir an, dass (1)–(4) für b_0, b_1 und b_2 gelten. Nach (4) ist $b_1 = p^{2l}$ für ein geeignetes $l \in \mathbb{N}$. Nach (1) gilt

$$t = b_0 + (i + 1) \cdot p^{2l} + ap^{2l+1} + b_2 p^{2l+2}.$$

Wegen $b_0 < p^{2l}$, $a < p$ und der Eindeutigkeit der p -adischen Darstellung von t gilt $l = i$ und $a = a_i$.

Setze $\beta(t, p, i) := a_i$. Genauer, für t, p und i für die b_0, b_1, b_2 und a mit (1)–(4) existieren sei $\beta(t, p, i) = a$, falls p prim ist. Das definiert eine Funktion, da es höchstens ein a gibt, welches diese Definition erfüllt. Falls keine geeigneten Zahlen a, b_0, b_1 und b_2 existieren oder p nicht prim ist, so setze $\beta(t, p, i) := 0$. Das liefert eine Funktion, die a) erfüllt.

Es ist klar, dass die Definition von β , wie in b) behauptet, in Form einer Formel $\chi(x_0, x_1, x_2, x_3)$ geschrieben werden kann. \square

Die β -Funktion erlaubt es, induktive (genauer, rekursive) Definitionen zu formalisieren. Ein Beispiel ist die Definition von n^m in \mathbb{N} .

Lemma 5.6. *Es gibt eine Formel $\varphi(x_0, x_1, x_2)$ über τ , so dass für alle $n, m, a \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\mathbb{N} \models \varphi[n, m, a] \quad \Leftrightarrow \quad n^m = a.$$

Beweis. Die Formel $\varphi(x_0, x_1, x_2)$ sagt folgendes:

„Falls $x_1 = 0$ ist, so ist $x_2 = 1$. Ist $x_1 \neq 0$, so gibt es eine Folge (a_0, \dots, a_{m-1}) natürlicher Zahlen mit $a_0 = x_0$, $m = x_1$ und $a_{m-1} = x_2$, so dass für jedes $i < m - 1$ gilt: $a_{i+1} = a_i \cdot x_0$.“

Die einzige Schwierigkeit, so eine Formel über τ hinzuschreiben, besteht in dem Existenzquantor über endliche Folgen natürlicher Zahlen. An dieser Stelle benutzen wir die β -Funktion. Formal lautet φ wie folgt:

$$(x_1 \equiv 0 \rightarrow x_2 \equiv 0') \wedge \left[\neg x_1 \equiv 0 \rightarrow \right. \\ \left. \exists t \exists p \left(\chi(t, p, 0, x_0) \wedge \forall r [r + 0' \equiv x_1 \rightarrow (\chi(t, p, r, x_2) \wedge \right. \right. \\ \left. \left. \forall i [i < r \rightarrow \forall a \forall b (\chi(t, p, i, a) \wedge \chi(t, p, i + 0', b) \rightarrow b \equiv a \cdot x_0)] \right) \right] \right]$$

Es ist klar, dass die Formel das Gewünschte leistet. \square

Mit der Definiertbarkeit der Exponentiation in \mathbb{N} ergibt sich die Möglichkeit, endliche Folgen natürlicher Zahlen auf eine etwas naheliegendere Weise als mit Hilfe der β -Funktion durch einzelne natürliche Zahlen zu codieren. Sei $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Aufzählung aller Primzahlen gemäß ihrer Größe. Es ist also $p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$ und so weiter. Man beachte, dass die Funktion $n \mapsto p_n$ definierbar ist. (Man benutze wieder die β -Funktion. Eine Zahl p ist die Primzahl p_n , wenn es eine Folge (a_0, \dots, a_n) von Primzahlen mit $a_0 = 2$ und $a_n = p$ gibt, so dass zwischen a_i und a_{i+1} keine weiteren Primzahlen liegen.) Es gibt also eine Formel $\varphi(x_0, x_1)$ über τ , so dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathbb{N} \models \varphi(n, m) \quad \Leftrightarrow \quad m = p_n$$

Eine Folge (a_0, \dots, a_r) natürlicher Zahlen kann nun einfach durch

$$t := p_0^{a_0} \cdot p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_r^{a_r}$$

codiert werden. Da die Zerlegung einer natürlichen Zahl in ihre Primfaktoren eindeutig ist, lässt sich jedes a_i eindeutig aus t zurückgewinnen. Die Zahl a_i ist nämlich einfach die größte Zahl a , für die p_i^a noch die Zahl t teilt. Hätten wir also die Exponentiation in unser Vokabular τ aufgenommen, so hätten wir uns die Definition der β -Funktion sparen können.

Wir wollen nun Aussagen über die Berechnung von Registermaschinen als Aussagen über dem Vokabular τ aufschreiben. Dazu müssen wir uns etwas näher mit den Berechnungen von Registermaschinen befassen.

Wir können annehmen, dass die Programme von Registermaschinen aus Folgen von Anweisungen bestehen. Jede Anweisung kann dabei noch ein bis zwei Parameter erhalten, die natürliche Zahlen sind. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass jede Anweisung genau zwei Parameter hat, von denen unter Umständen einer oder auch beide keine Funktion haben. Das hängt von der jeweiligen Anweisung ab. Es ist hierbei nur wichtig, dass es eine Programmiersprache gibt, die diese Eigenschaften hat und mit der man alles programmieren kann, was man mit anderen Programmiersprachen programmieren kann.

Beispiele für Anweisungen sind zum Beispiel „addiere zur Speicherstelle mit der Nummer n die natürliche Zahl m “ oder auch „halt“. Die erste Anweisung ist eine Anweisung mit zwei Parametern, die zweite Anweisung braucht eigentlich keine weiteren Parameter, wir fügen aber trotzdem noch zwei (sinnlose) Parameter hinzu, damit alle Anweisungen dasselbe Format haben.

In jedem Falle hat unsere Programmiersprache nur endlich viele verschiedene Anweisungen. Um nun ein Programm, eine endliche Folge von Anweisungen mit jeweils zwei Parametern, in eine natürliche Zahl zu übersetzen, ordnen wir jeder Anweisung auf injektive Weise eine natürliche Zahl zu. Diese Zuordnung macht aus einem Programm eine endliche Folge natürlicher Zahlen. Sei (a_0, \dots, a_r) die Folge natürlicher Zahlen, die wir beim Übersetzen eines Programmes P erhalten. Aus der Folge (a_0, \dots, a_r) erhalten wir eine natürliche Zahl $p_0^{a_0} \cdots p_r^{a_r}$, die *Gödel-Nummer* von P .

Wie man leicht sieht, gibt es eine Formel $\varphi_{\text{Programm}}(x)$ über τ , die genau dann in \mathbb{N} auf eine natürliche Zahl n zutrifft, wenn n Gödel-Nummer eines Programmes ist.

Die Eingaben von Registermaschinen sind endliche Zeichenketten über einem endlichen Alphabet, und wir können sie leicht in einzelne natürliche Zahlen übersetzen, nämlich in ihre *Gödel-Nummern*.

Für die Beschreibung einer Berechnung einer Registermaschine nehmen wir an, dass zu jedem Zeitpunkt der Berechnung nur endlich viel des unendlichen Speichers tatsächlich belegt ist. Die Maschine rechnet Schrittweise. Wir messen die Rechenzeit daher in der Anzahl der ausgeführten Rechenschritte.

Die *Konfiguration* der Maschine zu einem Zeitpunkt t (wobei t eine natürliche Zahl ist, nämlich die Anzahl der bisher ausgeführten Rechenschritte) ist der Speicherinhalt der Maschine zum Zeitpunkt t zusammen mit dem Zustand des „Prozessors“ der Maschine. Ohne auf die genaueren Details der Registermaschine einzugehen, können wir annehmen, dass der Prozessor nur endlich viele Zustände annehmen kann und der Zustand der ganzen Maschine zum Zeitpunkt t durch die Konfiguration eindeutig beschrieben ist.

Eine Konfiguration kann aufgefasst werden als endliche Folge natürlicher Zahlen. Eine Zahl beschreibt den Zustand des Prozessors, eine Zahl beschreibt die Position der Anweisung im Programm, die als nächstes bearbeitet werden soll, die restlichen Zahlen beschreiben den Inhalt je einer Speicherzelle. So eine Zahlenfolge kann wieder durch eine einzelne natürliche Zahl codiert werden, die *Gödel-Nummer* der Konfiguration.

Eine *Berechnung* einer Registermaschine ist eine endliche Folge von Konfigurationen, wobei eine Konfiguration aus der vorherigen hervorgeht, indem die jeweils aktuelle Anweisung ausgeführt wird. Die erste in einer Berechnung auftretende Konfiguration ergibt sich dabei aus der dem Programm der Maschine und der Eingabe. Jede Berechnung kann damit durch eine natürliche Zahl codiert werden, die

wir die *Gödel-Nummer* der Berechnung nennen. Eine Berechnung *endet*, wenn zu irgendeinem Zeitpunkt der Berechnung der aktuelle Befehl „halt“ lautet.

Man beachte, dass eine Berechnung in unserem Sinne nur ein Anfangsstück von dem ist, was die Maschine tatsächlich tut. Falls eine Berechnung n Rechenschritte beschreibt und der letzte Rechenschritt nicht die Ausführung der Anweisung „halt“ ist, so kann die Berechnung zu einer längeren Berechnung fortgesetzt werden. Die Fortsetzung auf den jeweils nächsten Rechenschritt ist dabei eindeutig. (Man spricht daher von einer *deterministischen Maschine*.)

Es ist klar, dass man eine Formel $\varphi_{\text{Rechenschritt}}(x, y, z)$ über τ aufschreiben kann, die auf natürliche Zahlen n, k, l genau dann zutrifft (in der Struktur \mathbb{N}), wenn gilt

- (1) n ist Gödel-Nummer eines Programms P ,
- (2) k und l sind Gödel-Nummern von Konfigurationen K_0 und K_1 und
- (3) falls K_0 die Konfiguration einer mit P programmierten Maschine zu einem Zeitpunkt t ist, so ist K_1 die Konfiguration der Maschine zu Zeitpunkt $t+1$.

Außerdem kann man eine Formel $\varphi_{\text{Start}}(x, y, z)$ aufschreiben, die genau dann auf natürliche Zahlen n, m, k zutrifft, wenn gilt

- (1) n ist Gödel-Nummer eines Programms P ,
- (2) m ist Gödel-Nummer einer Eingabe E und
- (3) k ist die Gödel-Nummer der Konfiguration einer mit P programmierten Registermaschine nach Eingabe von E .

Schließlich können wir eine Formel $\varphi_{\text{Berechnung}}(x, y, z)$ aufschreiben, die genau dann auf natürliche Zahlen n, m, k zutrifft, wenn gilt

- (1) n ist Gödelnummer eines Programmes P ,
- (2) m ist Gödelnummer einer Eingabe E und
- (3) k ist Gödelnummer einer Berechnung einer mit P programmierten Registermaschine bei Eingabe von E .

Diese Vorarbeit erlaubt es uns schließlich, eine Formel $\varphi_{\text{halt}}(x, y)$ aufzuschreiben, die genau dann auf n und m zutrifft, wenn gilt

- (1) n ist Gödel-Nummer eines Programms P ,
- (2) m ist Gödel-Nummer einer Eingabe E und
- (3) es gibt eine Berechnung einer mit P programmierten Registermaschine bei Eingabe von E , so dass es einen Zeitpunkt t gibt, an dem die Anweisung „halt“ ausgeführt wird.

Wir erhalten nun leicht

Satz 5.7. *Die elementare Arithmetik ist nicht entscheidbar.*

Beweis. Angenommen es gibt ein Verfahren, für jede Aussage ψ über τ zu entscheiden, ob $\mathbb{N} \models \psi$ gilt oder nicht. Dann kann man das Halteproblem wie folgt entscheiden:

Für jede natürliche Zahl k definieren wir einen Term t_k durch $t_0 := 0$ und $t_{k+1} := t'_k$. Es ist klar, dass der Wert von t_k in \mathbb{N} genau k selbst ist. Jedes Element der Struktur \mathbb{N} wird also durch einen Term über τ repräsentiert.

Seien ein nun Programm P und eine Eingabe E gegeben. Berechne die Gödel-Nummern n und m von P und E . Stelle fest ob $\varphi_{\text{halt}}(t_n, t_m)$ in \mathbb{N} gilt oder nicht. Falls ja, so hält die mit P programmierte Maschine bei Eingabe von E , sonst nicht. Ein Widerspruch zur Unentscheidbarkeit des Halteproblems. \square

Aus diesem Satz lassen sich recht starke Folgerungen ziehen. Dazu benötigen wir zwei Lemmata.

Lemma 5.8. *Sei T eine effektiv aufzählbare Theorie (über einem endlichen bzw. effektiv aufzählbaren Vokabular). Dann ist die Menge $\{\varphi : T \vdash \varphi\}$ ebenfalls effektiv aufzählbar.*

Beweis. Sei $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ effektive Aufzählung von T . Dann können wir die Menge aller Folgerungen aus T aufzählen, indem wir im n -ten Schritt alle Beweise aus $\{\alpha_0, \dots, \alpha_n\}$ aufzählen, die höchstens die Länge n haben und höchstens die ersten n Variablen benutzen. In die Liste für T schreiben wir für jeden aufgezählten Beweis jeweils die letzte Formel des Beweises. Dieses Verfahren liefert die gesuchte effektive Aufzählung der Menge $\{\varphi : T \vdash \varphi\}$. \square

Lemma 5.9. *Sei T eine effektiv aufzählbare, widerspruchsfreie, vollständige Theorie, die unter semantischen Folgerungen abgeschlossen ist. Dann ist T entscheidbar.*

Beweis. Da T unter Folgerungen abgeschlossen ist, gilt für jede Aussage φ :

$$\varphi \in T \text{ oder } \neg\varphi \in T$$

Damit lässt sich für jede Aussage φ wie folgt entscheiden, ob $\varphi \in T$ gilt:

Zähle T effektiv auf. Warte, bis in der Liste φ oder $\neg\varphi$ erscheint. Eine der beiden Aussagen ist in T und wird damit irgendwann aufgezählt. Wird φ aufgezählt, so liegt φ in T , wird $\neg\varphi$ aufgezählt, so liegt φ nicht in T . \square

Wir können nun folgende Version des *ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes* beweisen.

Korollar 5.10. *Ist $T \subseteq \text{Th}(\mathbb{N})$ effektiv aufzählbar, so existiert eine Aussage $\varphi \in \text{Th}(\mathbb{N})$ mit $T \not\vdash \varphi$. Es gibt also kein effektiv aufzählbares Axiomensystem für die elementare Arithmetik.*

Beweis. $\text{Th}(\mathbb{N})$ ist eine vollständige Theorie. Angenommen $T \subseteq \text{Th}(\mathbb{N})$ ist effektiv aufzählbar. Nach Lemma 5.8 ist die Menge der Folgerungen aus T auch effektiv aufzählbar. Gäbe es keine Aussage in $\text{Th}(\mathbb{N})$, die nicht aus T folgt, so wäre T vollständig und $\text{Th}(\mathbb{N})$ nach Lemma 5.9 entscheidbar. Ein Widerspruch zu Satz 5.7. \square

5.3. Der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz. Das Korollar 5.10 spricht nur über die Theorie der natürlichen Zahlen. Insbesondere benutzen wir die Struktur \mathbb{N} . Gödels ursprünglicher Beweis war eher syntaktischer Natur und liefert ein etwas allgemeineres Ergebnis. Wieder sei τ das Vokabular der Arithmetik.

Definition 5.11. Sei T eine Menge von Aussagen über τ .

a) Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^r$ heißt *in T repräsentierbar*, falls es eine Formel $\varphi(x_1, \dots, x_r)$ gibt, so dass für alle n_1, \dots, n_r gilt:

- (1) $(n_1, \dots, n_r) \in R \Rightarrow T \vdash \varphi(t_{n_1}, \dots, t_{n_r})$ und
- (2) $(n_1, \dots, n_r) \notin R \Rightarrow T \vdash \neg\varphi(t_{n_1}, \dots, t_{n_r})$.

Dabei sind die Terme t_{n_i} wie in Satz 5.7 definiert. Falls (1) und (2) für alle n_1, \dots, n_r erfüllt sind, so *repräsentiert* φ die Relation R .

b) Eine Funktion $F : \mathbb{N}^r \rightarrow \mathbb{N}$ ist *in T repräsentierbar*, falls eine Formel $\varphi(x_1, \dots, x_{r+1})$ existiert, so dass für alle $n_1, \dots, n_{r+1} \in \mathbb{N}$ gilt:

- (1) $F(n_1, \dots, n_r) = n_{r+1} \Rightarrow T \vdash \varphi(t_{n_1}, \dots, t_{n_{r+1}})$,
- (2) $F(n_1, \dots, n_r) \neq n_{r+1} \Rightarrow T \vdash \neg\varphi(t_{n_1}, \dots, t_{n_{r+1}})$ und
- (3) $T \vdash \exists x_{r+1}(\varphi(t_{n_1}, \dots, t_{n_r}, x_{r+1}) \wedge \forall y(\varphi(t_{n_1}, \dots, t_{n_r}, y) \rightarrow y \equiv x_{r+1}))$.

Falls (1)–(3) für alle n_1, \dots, n_{r+1} erfüllt sind, so *repräsentiert* φ die Funktion F . Für die Formel in (3) schreiben wir in Zukunft einfach $\exists!x_{r+1}\varphi(t_{n_1}, \dots, t_{n_r}, x_{r+1})$.

Wir stellen zunächst fest, dass alle entscheidbaren Relationen und Funktionen in der elementaren Arithmetik repräsentierbar sind. Eine Funktion $F : \mathbb{N}^r \rightarrow \mathbb{N}$ heißt dabei *entscheidbar*, wenn die Relation $\{(n_1, \dots, n_{r+1}) : F(n_1, \dots, n_r) = n_{r+1}\}$ entscheidbar ist.

Man beachte, dass die entscheidbaren Funktionen genau die berechenbaren Funktionen sind. Hat man eine berechenbare Funktion $F : \mathbb{N}^r \rightarrow \mathbb{N}$ gegeben, so entscheidet man, ob $F(n_1, \dots, n_r) = n_{r+1}$ gilt, indem man $F(n_1, \dots, n_r)$ berechnet und den errechneten Wert mit n_{r+1} vergleicht. Ist $F : \mathbb{N}^r \rightarrow \mathbb{N}$ entscheidbar, so berechnet man $F(n_1, \dots, n_r)$, indem man alle $n \in \mathbb{N}$ durchgeht und jeweils entscheidet, ob $F(n_1, \dots, n_r) = n$ gilt. Dieser Fall muss irgendwann eintreten.

Man beachte, dass dieses Argument nur für Funktionen durchgeht, die auf ganz \mathbb{N}^r definiert sind. Es ist aber auch sinnvoll über partielle berechenbare Funktionen zu reden. Es kann nämlich vorkommen, dass ein Algorithmus für bestimmte r -Tupel (n_1, \dots, n_r) einen sinnvollen Wert berechnet, für andere r -Tupel aber nicht terminiert. Die von dem Algorithmus berechnete Funktion ist dann nicht überall definiert.

Für partielle Funktionen ist der Unterschied zwischen berechenbar und entscheidbar genau der Unterschied zwischen effektiv aufzählbar und entscheidbar: Eine partielle Funktion ist genau dann berechenbar, wenn sie als Relation (also als Menge endlicher Folgen natürlicher Zahlen) effektiv aufzählbar ist.

Lemma 5.12. a) Sei $R \subseteq \mathbb{N}^r$ entscheidbar. Dann ist R in $\text{Th}(\mathbb{N})$ repräsentierbar.
b) Sei $F : \mathbb{N}^r \rightarrow \mathbb{N}$ entscheidbar. Dann ist F in $\text{Th}(\mathbb{N})$ repräsentierbar.

Beweis. a) Sei P ein Programm, so dass die mit P programmierte Registermaschine für alle n_1, \dots, n_r korrekt entscheidet, ob $(n_1, \dots, n_r) \in R$ gilt.

Mit Hilfe der im Beweis von Satz 5.7 benutzten Formeln lässt sich leicht eine Formel $\varphi_R(x_1, \dots, x_r)$ angeben, die genau dann auf $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ zutrifft, wenn es eine Berechnung der mit P programmierten Registermaschine gibt, so dass die Eingabe n_1, \dots, n_r lautet und die Maschine entscheidet, dass $(n_1, \dots, n_r) \in R$ gilt.

Da $\text{Th}(\mathbb{N})$ vollständig ist, wird R von φ_R repräsentiert.

b) beweist man im wesentlichen genauso wie a). \square

Für die Repräsentierbarkeit aller entscheidbaren Relationen und Funktionen braucht man nicht die volle Stärke von $\text{Th}(\mathbb{N})$. Es genügt, eine entscheidbare Teilmenge von $\text{Th}(\mathbb{N})$, die eine etwas erweiterte Version der bereits vorgestellten Peano-Arithmetik ist. (Die Peano-Arithmetik ist in der Literatur nicht ganz eindeutig definiert. Oft nennt man das bereits eingeführte Axiomensystem über dem Vokabular $(0, ')$ die *Peano-Axiome*. Die im Folgenden definierte Theorie heißt dann Peano-Arithmetik. Wir benutzen den Namen *volle Peano-Arithmetik*.)

Definition 5.13. Die *volle Peano-Arithmetik* ist die Theorie PA über τ , die aus folgenden Aussagen besteht:

- (1) $\forall x(\neg x' \equiv 0)$
- (2) $\forall x \forall y(x' \equiv y' \rightarrow x \equiv y)$
- (3) $\forall x(x + 0 \equiv x)$
- (4) $\forall x \forall y(x + y' \equiv (x + y)')$
- (5) $\forall x(x \cdot 0 \equiv 0)$
- (6) $\forall x \forall y(x \cdot y' \equiv x \cdot y + x)$
- (7) $\forall x \forall y(x < y \leftrightarrow \exists z(\neg z \equiv 0 \wedge y \equiv x + z))$
- (8) Für alle Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_n, y)$ über τ die Aussage

$$\forall x_1 \dots \forall x_n((\varphi(y/0) \wedge \forall y(\varphi \rightarrow \varphi(y/y')))) \rightarrow \forall y \varphi$$

Ohne Beweis stellen wir fest:

Lemma 5.14. *Alle entscheidbaren Relationen und Funktionen sind in PA (und damit auch in jeder stärkeren Theorie) repräsentierbar.*

Man beachte, dass dieses Lemma einfach deshalb wahr sein könnte, weil PA widerspruchsvoll ist und damit jede beliebige Relation repräsentierbar ist. Aber wir wissen natürlich, dass PA widerspruchsfrei ist, weil PA ja ein Modell hat, nämlich \mathbb{N} . Diese Bemerkung ist zwar im Moment vermutlich noch etwas rätselhaft, wird aber hoffentlich etwas klarer, wenn wir den zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatz behandeln.

Der erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz lautet nun wie folgt:

Satz 5.15. *Sei T eine widerspruchsfreie und entscheidbare Theorie über τ in der alle entscheidbaren Funktionen und Relationen repräsentierbar sind. Dann existiert eine Aussage φ über τ , so dass weder φ noch $\neg\varphi$ aus T ableitbar sind.*

Man beachte, dass in dem Satz nicht vorausgesetzt wird, dass \mathbb{N} überhaupt Modell von T ist. Es wird auch nicht über $\text{Th}(\mathbb{N})$ geredet. Wegen Lemma 5.14 zeigt dieser Satz insbesondere, dass keine widerspruchsfreie, entscheidbare Theorie T mit $\text{PA} \subseteq T$ vollständig ist.

Wir benötigen ein paar Lemmata, um Satz 5.15 zu beweisen. Dazu ordnen wir jeder Formel φ über τ auf sinnvolle Weise (analog zu den Programmen) eine Gödel-Nummer n^φ zu.

Lemma 5.16 (Fixpunktsatz). *Sei T eine Theorie über τ , in der alle entscheidbaren Funktionen und Relationen repräsentierbar sind. Dann existiert für jede Formel $\psi(x)$ über τ eine Aussage φ ($= \varphi_\psi$) über τ , so dass gilt:*

$$T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi(t_{n^\varphi})$$

Schlampig gesprochen behauptet φ von sich selbst die Eigenschaft ψ zu haben.

Beweis. Definiere $F : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ durch

$$F(n, m) = \begin{cases} n^{\chi(t_m)}, & \text{falls } n \text{ Gödel-Nummer der Formel } \chi(x) \text{ ist,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Es ist klar, dass F berechenbar ist. Da F auf ganz \mathbb{N}^2 definiert ist, ist F auch entscheidbar. Für jede Formel $\chi(x)$ gilt $F(n^\chi, m) = n^{\chi(t_m)}$.

Da F in T repräsentierbar ist, existiert eine Formel $\alpha(x, y, z)$, die F repräsentiert. Sei die Formel $\psi(x)$ gegeben. Setze

$$\beta := \forall z(\alpha(x, x, z) \rightarrow \psi(z))$$

und

$$\varphi := \forall z(\alpha(t_{n^\beta}, t_{n^\beta}, z) \rightarrow \psi(z)).$$

Beachte, dass φ genau $\beta(x/t_{n^\beta})$ ist. Damit gilt $F(n^\beta, n^\beta) = n^\varphi$.

Da T die Funktion F repräsentiert, gilt

$$T \vdash \alpha(t_{n^\beta}, t_{n^\beta}, t_{n^\varphi}). \quad (*)$$

Wir zeigen nun

$$T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi(t_{n^\varphi}).$$

Nach Definition von φ gilt

$$T \cup \{\varphi\} \vdash \alpha(t_{n^\beta}, t_{n^\beta}, t_{n^\varphi}) \rightarrow \psi(t_{n^\varphi}).$$

Nach (*) liefert das $T \vdash \varphi \rightarrow \psi(t_{n^\varphi})$. Da α die Funktion F repräsentiert, gilt

$$T \vdash \exists! z \alpha(t_{n^\beta}, t_{n^\beta}, z).$$

Wegen (*) gilt

$$T \vdash \forall z(\alpha(t_{n^\beta}, t_{n^\beta}, z) \rightarrow z \equiv t_{n^\varphi}),$$

also

$$T \vdash \psi(t_{n^\varphi}) \rightarrow \forall z(\alpha(t_{n^\beta}, t_{n^\beta}, z) \rightarrow \psi(z))$$

und damit

$$T \vdash \psi(t_{n^\varphi}) \rightarrow \varphi.$$

□

Lemma 5.16 heißt Fixpunktsatz, weil es zeigt, dass für jede Formel $\psi(x)$ bis auf Äquivalenz ein Fixpunkt der Abbildung $\varphi \mapsto \psi(t_{n^\varphi})$ existiert.

Wir werden das Lemma anwenden, um eine Aussage zu konstruieren, die, grob gesprochen, aussagt „ich bin nicht beweisbar“. Für eine Theorie T sei T^+ die Menge der Gödel-Nummern der Aussagen, die aus T ableitbar sind.

Lemma 5.17. *Sei T widerspruchsfreie Theorie über τ . Falls T^+ in T repräsentierbar ist, so gibt es eine Aussage φ , so dass weder φ noch $\neg\varphi$ aus T ableitbar sind.*

Beweis. Sei $\chi(x)$ ein Formel, die T^+ repräsentiert. Sei $\psi := \neg\chi$. Nach dem Fixpunktsatz existiert eine Aussage φ mit

$$T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi(t_{n^\varphi}).$$

Es gilt also

$$T \vdash \varphi \leftrightarrow \neg\chi(t_{n^\varphi}).$$

Angenommen, $T \vdash \varphi$. Nach Wahl von φ gilt dann auch

$$T \vdash \neg\chi(t_{n^\varphi}).$$

Da χ die Relation T^+ repräsentiert, folgt daraus $n^\varphi \notin T^+$, also $T \not\vdash \varphi$. Ein Widerspruch.

Angenommen, $T \not\vdash \varphi$. Dann ist $n^\varphi \notin T^+$. Damit gilt

$$T \vdash \neg\chi(t_{n^\varphi}).$$

Wegen der Wahl von φ folgt daraus $T \vdash \varphi$. Ebenfalls ein Widerspruch. □

Lemma 5.18. *a) Sei T eine widerspruchsfreie Theorie (über τ), in der T^+ repräsentierbar ist. Dann ist T nicht vollständig.*

b) (Tarskis „undefinability of truth“) Die Menge der Gödel-Nummern wahrer Aussagen über \mathbb{N} ist in $\text{Th}(\mathbb{N})$ nicht repräsentierbar.

Beweis. a) folgt sofort aus Lemma 5.17.

b) Wäre $\text{Th}(\mathbb{N})^+$ in $\text{Th}(\mathbb{N})$ repräsentierbar, so wäre $\text{Th}(\mathbb{N})$ nach a) unvollständig. $\text{Th}(\mathbb{N})$ ist aber offenbar vollständig. Ein Widerspruch. □

Fixiere nun eine entscheidbare, widerspruchsfreie Theorie T , in der alle entscheidbaren Funktionen und Relationen repräsentierbar sind. Man erinnere sich daran, dass für eine entscheidbare Theorie T die Menge T^+ effektiv aufzählbar ist. Ist T vollständig, so ist T^+ sogar entscheidbar, falls T entscheidbar ist (Lemma 5.9). Damit ist T^+ in T repräsentierbar.

Nach Lemma 5.18 ist T nicht vollständig. Das zeigt Satz 5.15. Da für vollständige Theorien T die Menge T^+ sogar dann schon entscheidbar ist, wenn T nur effektiv aufzählbar ist, erhalten wir folgende Verstärkung des ersten Unvollständigkeitssatzes:

Satz 5.19. *Sei T widerspruchsfreie, effektiv aufzählbare Theorie über τ , in der alle entscheidbaren Funktionen und Relationen repräsentierbar sind. Dann ist T nicht vollständig.*

Insbesondere gibt es keine effektiv aufzählbare, widerspruchsfreie Theorie T , die PA umfasst und vollständig ist.

Man beachte den subtilen Unterschied zu Korollar 5.10. In Korollar 5.10 wurde nur über Teiltheorien von $\text{Th}(\mathbb{N})$ gesprochen. Da $\text{Th}(\mathbb{N})$ aber nichtmal effektiv aufzählbar ist, ist der Begriff „Teiltheorie von $\text{Th}(\mathbb{N})$ “ schwer zu fassen. Die wesentliche Information von Korollar 5.10 ist also, dass man $\text{Th}(\mathbb{N})$ nicht sinnvoll axiomatisieren kann. Satz 5.19 zeigt dagegen, dass man überhaupt keine widerspruchsfreie, vollständige Theorie T mit $\text{PA} \subseteq T$ sinnvoll axiomatisieren kann.

Weder PA noch das Vokabular τ spielen dabei eine wirklich herausragende Rolle. Es geht nur darum, dass man Theorien betrachtet, die genügend ausdrucksstark sind. Es gilt zum Beispiel auch folgender Satz (den man leicht mit den hier benutzten Methoden zeigen kann):

Satz 5.20. *Sei T eine widerspruchsfreie, effektiv aufzählbare Theorie über dem Vokabular $\{\varepsilon\}$ mit $\text{ZF} \subseteq T$. Dann ist T nicht vollständig.*

5.4. Der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz. Der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz ist eine Verstärkung des ersten, die dramatische Konsequenzen für die Grundlagen der Mathematik insgesamt hat. Der Satz besagt, dass die Widerspruchsfreiheit einer genügend starken, sinnvoll axiomatisierbaren Theorie nicht innerhalb der Theorie selbst gezeigt werden kann.

Man kann also kein sinnvolles Axiomensystem für die Mathematik angeben und dann innerhalb des Systems beweisen, dass das System zu keinen Widersprüchen führt. Das heißt aber nicht, dass wir die Widerspruchsfreiheit eines entsprechenden Systems nicht anderweitig erkennen könnten. Wir „wissen“ zum Beispiel, dass die natürlichen Zahlen existieren und dass die Struktur \mathbb{N} die Theorie PA erfüllt. Damit wissen wir, dass PA widerspruchsfrei ist, obwohl wir das nicht aus PA selbst ableiten können.

Zunächst müssen wir uns klarmachen, wie wir eine Aussage wie „PA ist widerspruchsfrei“ überhaupt über dem Vokabular τ aufschreiben können.

Sei T eine entscheidbare Theorie über τ , in der alle entscheidbaren Funktionen und Relationen repräsentierbar sind. Mit T ist auch die Relation

$$H := \{(n, m) : n \text{ ist Gödel-Nummer einer Formel } \varphi \\ \text{und } m \text{ ist Gödel-Nummer eines Beweises von } \varphi \text{ aus } T\}$$

entscheidbar. Für jede Formel φ gilt:

$$T \vdash \varphi \iff \text{es gibt } m \in \mathbb{N} \text{ mit } (n^\varphi, m) \in H$$

Sei $\alpha(x, y)$ eine Formel, die H repräsentiert. Setze

$$\text{ableitbar}_T(x) := \exists y \alpha(x, y).$$

Nach Lemma 5.16 existiert eine Aussage φ mit

$$T \vdash \varphi \leftrightarrow \neg \text{ableitbar}_T(t_{n^\varphi}).$$

Intuitiv sagt φ „ich bin nicht aus T ableitbar“.

Lemma 5.21. *Angenommen, T ist widerspruchsfrei. Dann gilt $T \not\vdash \varphi$.*

Beweis. Angenommen, $T \vdash \varphi$. Wähle ein $m \in \mathbb{N}$ mit $(n^\varphi, m) \in H$. Dann gilt $T \vdash \alpha(t_{n^\varphi}, t_m)$. Insbesondere gilt $T \vdash \text{ableitbar}_T(t_{n^\varphi})$. Nach Wahl von φ folgt daraus $T \vdash \neg \varphi$. Damit ist T nicht widerspruchsfrei. \square

Die Widerspruchsfreiheit von T ist äquivalent zu $T \not\vdash \perp$. Damit ist es sinnvoll, die Widerspruchsfreiheit von T durch

$$\text{wfrei}_T := \neg \text{ableitbar}_T(t_{n^\perp})$$

auszudrücken. Damit können wir Lemma 5.21 formalisieren durch die Aussage

$$\text{wfrei}_T \rightarrow \neg \text{ableitbar}_T(t_{n^\varphi}).$$

In der Tat kann man im Falle $PA \subseteq T$ Lemma 5.21 innerhalb der Theorie T beweisen. (Das ist etwas aufwändig, aber nicht sehr tiefsinnig.) Es gilt also

$$T \vdash \text{wfrei}_T \rightarrow \neg \text{ableitbar}_T(t_{n\varphi}).$$

Das liefert den zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatz:

Satz 5.22. *Sei T eine entscheidbare, widerspruchsfreie Theorie über τ , so dass $PA \subseteq T$ gilt. Dann ist wfrei_T nicht aus T ableitbar.*

Beweis. Angenommen, $T \vdash \text{wfrei}_T$. Wegen

$$T \vdash \text{wfrei}_T \rightarrow \neg \text{ableitbar}_T(t_{n\varphi})$$

gilt dann $T \vdash \neg \text{ableitbar}_T(t_{n\varphi})$. Nach Wahl von φ gilt damit $T \vdash \varphi$, im Widerspruch zu Lemma 5.21. \square

Auch im Falle des zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatzes sind die Wahl des Vokabulars τ und der Theorie PA nicht wesentlich. Der Satz gilt für jede genügend starke Theorie.

Insbesondere gilt für die Aussage wfrei_{ZF} , die in natürlicher Weise die Widerspruchsfreiheit von ZF ausdrückt, folgender Satz:

Satz 5.23. *Falls ZF widerspruchsfrei ist, so ist wfrei_{ZF} nicht aus ZF beweisbar.*