

Kompaktifizierung vs. Vervollständigung in unendlichen Graphen

Quellen:

Zur Vervollständigung eines metrischen Raums in allgemein siehe

http://en.wikipedia.org/wiki/Complete_metric (englisch).

Zu ℓ -TOP(G) siehe

<http://www.math.uni-hamburg.de/home/georgakopoulos/ltop/>

Sei (X, d) ein metrischer Raum

Eine Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in X heißt Cauchy-Folge wenn

$$\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} \text{ so dass } d(x_i, x_j) < \epsilon \text{ gilt } \forall i, j > n.$$

X ist *vollständig* wenn es zu jeder Cauchy-Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in X einen *Limespunkt* gibt, d.h., einen Punkt $x \in X$ mit $\lim_i d(x, x_i) = 0$
(X ist kompakt g.d.w. jede Folge einen Häufungspunkt hat)

Zwei Cauchy-Folgen $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in X sind *äquivalent*, wenn gilt $\lim_i d(x_i, y_i) = 0$

Vervollständigung (\hat{X}, d') von (X, d) :

- $\hat{X} := \{\text{Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen in } X\}$
- $d'(x, y) := \lim_i d(x_i, y_i)$, wobei $(x_i) \in x$ und $(y_i) \in y$.

Sei G lokal endlich, zusammenhängend, und $\ell : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ gegeben. Wir definieren:

$d_\ell(x, y) := \inf_{P \text{ ist ein } x\text{-}y \text{ "Weg"}} \ell(P)$

wobei $\ell(P) := \sum_{e \in E(P)} \ell(e)$; so ein "Weg" P darf mitten auf einer Kante anfangen/aufhören falls x und/oder y innere Kantenpunkte sind; P enthält immer nur endlich viele Ecken.

– \rightarrow metrischer Raum (G, d_ℓ)

Sei $\ell\text{-TOP}(G) := (\hat{G}, d_\ell)$ die Vervollständigung

$$\partial^\ell G := \ell\text{-TOP}(G) \setminus G$$

Lemma 1. $\forall \psi \in \partial^\ell G$ es gibt einen Strahl R mit $\ell(R) < \infty$ der nach ψ konvergiert.

Proof. Sei $(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in ψ . Konstruiere eine Teilfolge (ψ_{n_i}) s.d. $\sum_i d_\ell(\psi_{n_i}, \psi_{n_{i+1}}) < \infty$. Für jedes i finde einen endlichen ψ_{n_i} - $\psi_{n_{i+1}}$ Weg P_i der Länge ungefähr $d_\ell(\psi_{n_i}, \psi_{n_{i+1}})$ (z.B., der Länge höchstens $d_\ell(\psi_{n_i}, \psi_{n_{i+1}}) + 2^{-i}$). Wende das Kamm-Lemma (Lemma 8.2.2) auf dem Teilgraphen $\bigcup P_i$ an. Der Strahl des Kamms konvergiert gegen ψ . □

Korollar 2. \forall Cauchy-Folge (ψ_i) mit Limes $\psi \in \partial^\ell G$ es gibt einen topologischen Kamm K mit Zinken in $\{\psi_i\}$ der nach ψ konvergiert und endliche Gesamtlänge hat.

Theorem 3. $\sum_{e \in E(G)} \ell(e) < \infty \Rightarrow \ell\text{-TOP}(G) \approx |G|$

Beweis (Skizze). Wir definieren eine Bijektion $\pi : \Omega(G) \rightarrow \partial^\ell G$:

sei $\pi(\omega)$ die Äquivalenzklasse der Folge der Ecken eines Strahls in ω .

π ist:

- wohl definiert; (jeder Strahl konvergiert weil $\sum_{e \in E(G)} \ell(e) < \infty$; zwei Strahlen aus dem gleichen Ende konvergieren gegen den gleichen Punkt in $\ell\text{-TOP}(G)$)
- surjektiv; (Lemma 1)
- injektiv; (sei S ein ω - ω' Trenner; dann ist $d_\ell(\pi(\omega), \pi(\omega'))$ mindestens so groß wie die kürzeste Kante die von S abgeht)

Wir haben also eine Bijektion $\pi' : |G| \rightarrow \ell\text{-TOP}(G)$. Es ist noch zu zeigen dass die Topologien gleich sind:

– Zu einer Basisumgebung $O = O(S, \omega)$ von $|G|$ ist die Kugel $B_{\pi(\omega)}(r/2)$ (wobei r die kleinste Länge einer Kante die von S abgeht) von $\ell\text{-TOP}(G)$ in O "enthalten", wobei "enthalten" mit Hilfe der Bijektion π' zu interpretieren ist.

– zu einer Kugel $B_x(r)$ in $\ell\text{-TOP}(G)$ wähle $F \subset E(G)$ so dass $\sum_{e \in E(G) \setminus F} \ell(e) < r/2$; dann ist eine Basisumgebung von $\pi^{-1}(x)$ bezüglich dem Eckentrenner $V(F)$ in $B_x(r)$ "enthalten". □

Beispiele:

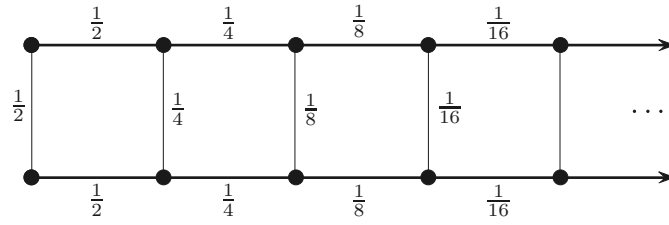


Figure 1: $\ell\text{-TOP}(G) \approx |G|$

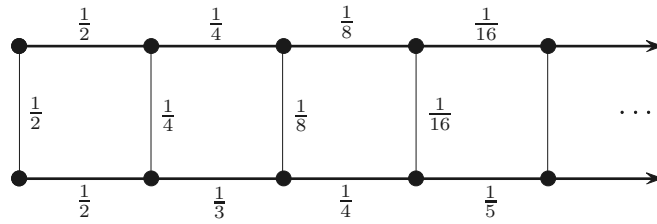


Figure 2: $\ell\text{-TOP}(G) \approx |G|$

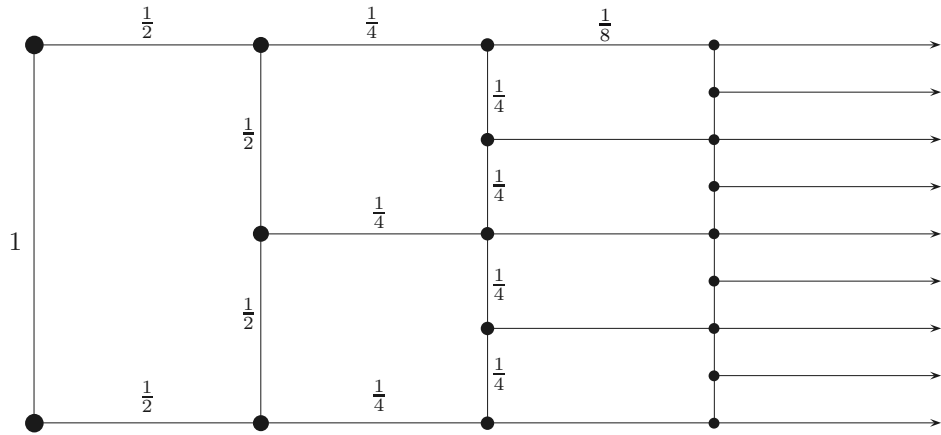


Figure 3: Das Ende spaltet sich in ein reelles Intervall auf

Übungen

1. In Seite 1 haben wir definiert wann zwei Cauchy-Folgen äquivalent heißen; beweise dass das in der Tat eine Äquivalenzrelation ist.

2. Beweise dass wenn der Raum (X, d) vollständig ist dann ist seine Vervollständigung *isometrisch* zu (X, d) . (zwei metrische Räume (M, d_M) und (N, d_N) sind isometrisch wenn es eine Bijektion $f : M \rightarrow N$ gibt so dass $d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y) \forall x, y \in M$).

3⁺. Beweise dass die Vervollständigung eines metrischen Raums doch vollständig ist, und dass der ursprüngliche Raum in seiner Vervollständigung isometrisch eingebettet ist.

4. Konstruiere einen Graphen G und eine Zuweisung von Längen $\ell : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ auf die Kanten von G , so dass es zwei Ecken v, w in G gibt, deren Distanz $d_\ell(v, w)$ von keinem endlichen v - w Weg angenommen wird, d.h., es gibt v - w Wege mit Längen beliebig nah an $d_\ell(v, w)$, aber keinen der genau diese Länge hat.

5. Für den Graphen G in folgender Zeichnung entscheide ob ℓ - $TOP(G)$ kompakt ist.

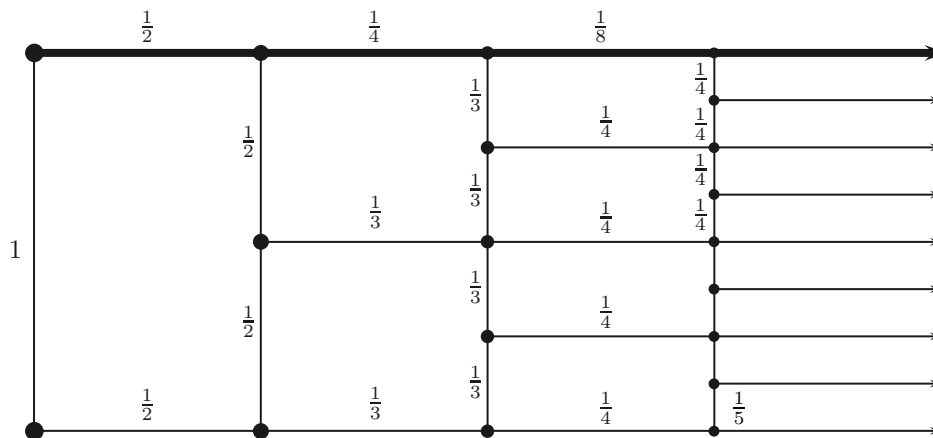


Figure 4: kompakt?