3 Modellreduzierung

Hier gilt es die Modelle weiter zu vereinfachen. Dies ist in den allermeisten Fällen notwendig, da die wenigsten (dimensionslosen) Modelle explizit lösbar sind.

Beispiel 2:
Das dimensionslose Problem

$$\epsilon\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{1}{(x+1)^2}, \qquad x(0) = 0, \qquad \frac{dx(0)}{dt} = 1, \tag{3.0.41}$$

besteht also in einer nichtlineare gewöhnlichen Differentialgleichung 2.ter Ordnung mit der Besonderheit, dass die Zeit t in der Differentialgleichung nicht explizit vorkommt. Man kann daher $y = \frac{dx}{dt}$ einführen mit

$$\frac{d^2x}{dt^2} = y\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{y^2}{2}. \tag{3.0.42}$$

Damit kann die Gleichung $(3.0.41)$ durch Integration nach x und Verwendung der Anfangsbedingungen um eine Ordnung reduziert werden auf

$$\frac{\epsilon}{2}(\frac{dx}{dt})^2 = \frac{\epsilon}{2} - \frac{x}{1+x}, \qquad x(0) = 0, \tag{3.0.43}$$

was aber die Schwierigkeiten nicht wirklich verringert hat. Diese Weg scheint also nicht sehr erfolgsversprechend zu sein.

Als Alternative kann man das Problem $(3.0.41)$ natürlich auf ein System 1.ter Ordnung umschreiben

$$\frac{dx}{dt} = y \qquad x(0) = 0 \tag{3.0.44}$$

$$\epsilon\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{(x+1)^2}, \qquad y(0) = 1. \tag{3.0.45}$$

Da das System autonom ist (in der rechten Seiten kommt die Zeit t nicht explizit vor), kann man die gesamte Dynamik des Systems im Phasenraum untersuchen. Das ist nicht schwierig, da keine stationäre Punkte vorliegen und die Flüsse in den vier Quadranten feste Richtungen haben. Die Singularität bei $x = -1$ wollen wir nicht weiter verfolgen, da der uns interessierende Bereich bei $x \geq 0$ ist. Man kann nun leicht das qualitative Verhalten der Lösung sehen. Sucht man sich die parameterisierte Kurve zur Lösung mit obigen Anfangsdaten, so sieht man, dass x entlang der zunächst zunimmt und dann wieder abfällt. Ebenso verringert sich die zunächst positive Geschwindigkeit y immer mehr bis sie dann ins negative abdriftet. Das beschreibt genau den erwarteten Flug, allerdings gibt die Phasenraumanalyse keine Auskunft über die Dauer bis zur Rückkehr des Körpers an die Erdoberfläche.

Wie die beiden Ansätze zeigen, sind weitere Vereinfachungen unumgänglich. Der einfachste Versuch basiert auf der Tatsache, dass der Parameter ϵ sehr klein ist. Man setzt in daher versuchsweise einfach mal zu Null. Das gibt das algebraische Problem

$$0 = -\frac{1}{(x+1)^2}, \qquad x(0) = 0, \qquad \frac{dx(0)}{dt} = 1, \tag{3.0.46}$$

ohne Lösung, da die Lösung $x = -1$ der ersten Gleichung der Anfangsbedingung widerspricht.

Man kann aber denselben Versuch in der alternativen Skalierung $(2.0.25)$

$$\frac{d^2x_1(t_1)}{dt_1^2} = -\frac{1}{(x_1+1)^2}, \qquad x_1(0) = 0, \qquad \frac{dx_1(0)}{dt_1} = \sqrt{\epsilon} \tag{3.0.47}$$

durchführen. Man erhält dann für $\epsilon = 0$

$$\frac{d^2x_1(t_1)}{dt_1^2} = -\frac{1}{(x_1+1)^2}, \qquad x_1(0) = 0, \qquad \frac{dx_1(0)}{dt_1} = 0. \tag{3.0.48}$$

Die Lösungen haben die Eigenschaft $x_1 \leq 0$, welche für unser Problem nicht akzeptabel ist.

Setzt man allerdings in der Skalierung $(2.0.33)$ $\epsilon = 0$

$$\frac{d^2x_2(t_1)}{dt_2^2} = -\frac{1}{(\epsilon x_2+1)^2}, \qquad x_2(0) = 0, \qquad \frac{dx_2(0)}{dt_2} = 1, \tag{3.0.49}$$

so erhält man

$$\frac{d^2x_2(t_2)}{dt_2^2} = -1, \qquad x_2(0) = 0, \qquad \frac{dx_2(0)}{dt_2} = 1, \tag{3.0.50}$$

mit der Lösung

$$x_2(t_1) = t_1 - \frac{t_2^2}{2} \tag{3.0.51}$$

und der skalierten Flugdauer $T = 2$ und der entsprechenden realen von $T^\star = 2\frac{V}{g}$.

Beispiel 4: Das Pendel II

Im Falle des Pendels mit starker Dämpfung ist also der Parameter α sehr gross. Nimmt man also die Skalierung (2.0.37) und teilt dann durch α

$$\frac{1}{\alpha}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} + \frac{\beta}{\alpha}\sin(\theta_0\theta) = 0, \qquad \theta(0) = 1, \qquad \frac{d\theta(0)}{dt} = 1, \tag{3.0.52}$$

so würde der Versuch $\alpha = 0$ zu setzen auf

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \qquad \theta(0) = 1, \qquad \frac{d\theta(0)}{dt} = 1, \tag{3.0.53}$$

führen. Allerdings hat dieses Problem kiene Lösung. Anderseits kann man in dem entsprechend umskalierten Problem (2.0.40) $\alpha = 0$ setzen und erhält

$$\frac{d^2\theta}{dt_1^2} + \frac{d\theta}{dt_1} = 0, \qquad \theta(0) = 1, \qquad \frac{d\theta(0)}{dt_1} = 0, \tag{3.0.54}$$

mit der (nicht sehr aussagekräftigen) Lösung $\theta(t_1) = 1$. In diesem Grenzfall ist die Dämpfung so stark, dass sich das Pendel nicht mehr vom Anfangsdatum wegbewegt.

3.1 Landau'sche Ordnungssymbole

Um den Begriff "klein" etwas zu präzisieren, verwenden wir folgende Definitionen.
Definiton
Es seien die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ in eine Umgebung von $x = x_0$ definiert.
i) Wir schreiben

$$f = O(g) \qquad \textit{für} \qquad x \to x_0, \tag{3.1.1}$$

falls in einer Umbebung von x_0 eine (von x unabhängige) Konstante C exisitiert mit

$$|f(x)| \leq C|g(x)|. \tag{3.1.2}$$

ii) Wir schreiben

$$f = o(g) \qquad \textit{für} \qquad x \to x_0, \tag{3.1.3}$$

falls

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0 \tag{3.1.4}$$

gilt. Man verwendet auch die Notation $f \ll g$.

Beispiele:
Es gilt

$$
\begin{aligned}
\sin x &= O(x) && \text{für} && x \to 0, \\
e^{-x} &= O(1) && \text{für} && x \to 0, \\
\frac{x}{1+x^2} &= O(\frac{1}{x}) && \text{für} && x \to \infty, \\
\ln\cosh x &= O(x) && \text{für} && x \to \infty,
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
x^2 &= o(x) && \text{für} && x \to 0, \\
x &= o(x^2) && \text{für} && x \to \infty, \\
\ln x &= o(x) && \text{für} && x \to \infty.
\end{aligned}
$$

3.2 Asymptotische Entwicklungen

Definiton
f_ϵ und g_ϵ seinen für ϵ in einer Umgebung von ϵ_0 Elemente eines normierten Raumes $(B, ||\cdot||)$. f_ϵ und g_ϵ werden asymptotisch äquivalent genannt falls

$$||f_\epsilon - g_\epsilon|| = o(||f_\epsilon||) \qquad \textit{für} \qquad \epsilon \to \epsilon_0 \tag{3.2.1}$$

gilt.
Man beachte, dass die Definition symmetrisch ist, d.h. die Folgerung

$$||f_\epsilon - g_\epsilon|| = o(||g_\epsilon||) \qquad \text{für} \qquad \epsilon \to \epsilon_0 \tag{3.2.2}$$

ist äquivalent.

Beispiele:
Asymptotisch äquivalent sind in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ (für $\epsilon \to 0$)

$$
\begin{aligned}
3+\epsilon &\qquad \text{und} \qquad && 3-\epsilon^2, \\
\frac{1}{\epsilon} &\qquad \text{und} \qquad && \frac{1}{\epsilon}, \\
(1+\sqrt{\epsilon})\sin\frac{1}{\epsilon} &\qquad \text{und} \qquad && \sin\frac{1}{\epsilon},
\end{aligned}
$$

jedoch nicht

$$\sin\frac{1+\epsilon\pi}{\epsilon} \qquad \text{und} \qquad \sin\frac{1}{\epsilon}.$$

Ausserdem ist asymptotische Äquivalenz natürlich von dem normierten Raum abhängig. Betrachtet man

$$f_\epsilon(x) = e^{-\frac{x}{\epsilon}} + x \qquad \text{und} \qquad f_0(x) = x \tag{3.2.3}$$

als Elemente des (Banach-)Raumes $C[0,1]$ (versehen mit der Maximumsnorm), so sind f_ϵ und f_0 nicht asymptotisch äquivalent. Hingegen sind sie es im Raum $L^p(0,1)$, $p \in [1,\infty)$, da

$$||f_\epsilon - f_0||_p = \left(\int_0^1 e^{-\frac{px}{\epsilon}} dx\right)^{1/p} = \left(\frac{\epsilon}{p}(1-e^{-\frac{p}{\epsilon}})\right)^{1/p} = o(1) \tag{3.2.4}$$

gilt.

Wir definieren nun den Begriff der asymptotischen Entwicklung.

Definiton

Seien $f_\epsilon, f_k \in B$ und $f_k = O(1)$ für $k = 0,1,\dots$. Dann nennt man die (formale) Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \epsilon^k \tag{3.2.5}$$

asymptotische Entwicklung nach Potenzen ϵ für f_ϵ , falls

$$||f_\epsilon - \sum_{k=0}^{n} f_k \epsilon^k|| = o(\epsilon^n), \qquad n = 0,1,\dots, \qquad \text{für} \qquad \epsilon \to 0. \tag{3.2.6}$$

Eine Notation ist $f_\epsilon \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k \epsilon^k$. Gilt (3.2.6) nur für $n = 0,1,\dots,N$, so spricht man von einer asymptotischen Entwicklung der Ordnung N .

Manchmal wird die Defintion auch noch allgemeiner gefasst, indem man nicht nach Potenzen von ϵ entwickelt, sondern allgemein nach Funktionen $f_{k\epsilon}$ mit der Eigenschaft $f_{(k+1)\epsilon} = o(f_{k\epsilon})$. Ist die Funktion f_ϵ um $\epsilon = 0$ in eine Taylorreihe entwickelbar, so stellt die Taylorreihe eine asymptotische Entwicklung dar. Man hat dann in (3.2.6) an Stelle von $o(\epsilon^n)$ sogar die bessere Aussage $O(\epsilon^{n+1})$.

Der Hauptunterschied zwischen asymptotischer und Taylor-Entwicklung liegt in der Tatsache, dass bei Taylorentwicklungen die Frage der Konvergenz der unendlichen Reihe bei festem ϵ gestellt wird, hingegen interessiert bei der asymptotischen Entwicklung die Konvergenz in ϵ bei festem N .

Beispiel:

Wir betrachten das Problem

$$\frac{dy}{dx} + y = -\frac{1}{x}, \qquad \lim_{x\to\infty} |y(x)| < \infty \tag{3.2.7}$$

und interessieren uns speziell für das Verhalten der Lösung(en) für $x \to \infty$. Die (beschränkte) Lösung dieser Gleichung ist durch

$$y(x) = e^x \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt \tag{3.2.8}$$

gegeben (die Lösung des homogenen Problems liefert keinen Beitrag, das sie für $x \to \infty$ divergiert). Interessiert man sich also für das Verhalten für $x \to \infty$, so ist eine Umbenennung $x = \frac{1}{\epsilon}$ vorteilhaft. Gesucht ist dann also eine asymptotische Entwicklung des Integrals

$$E(\epsilon) = e^{\frac{1}{\epsilon}} \int_{\frac{1}{\epsilon}}^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt \qquad \text{für} \qquad \epsilon \to 0. \tag{3.2.9}$$

Wir intergieren partiell und erkennen

$$\begin{aligned}
E(\epsilon) &= e^{\frac{1}{\epsilon}} \int_{\frac{1}{\epsilon}}^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt \\
&= \epsilon - e^{\frac{1}{\epsilon}} \int_{\frac{1}{\epsilon}}^\infty \frac{e^{-t}}{t^2}\, dt \\
&= \epsilon - \epsilon^2 + 2e^{\frac{1}{\epsilon}} \int_{\frac{1}{\epsilon}}^\infty \frac{e^{-t}}{t^3}\, dt \\
&= [\epsilon - \epsilon^2 + \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)!\epsilon^n] + (-1)^n n!\, e^{\frac{1}{\epsilon}} \int_{\frac{1}{\epsilon}}^\infty \frac{e^{-t}}{t^{n+1}}\, dt \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}(k-1)!\, \epsilon^k + (-1)^n n! e^{\frac{1}{\epsilon}} \int_{\frac{1}{\epsilon}}^\infty \frac{e^{-t}}{t^{n+1}}\, dt.
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Wir vermuten also die asymptotische Reihe

$$E(\epsilon) = e^{\frac{1}{\epsilon}} \int_{\frac{1}{\epsilon}}^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt \qquad \sim \qquad \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1}(k-1)!\, \epsilon^k \qquad \text{für} \qquad \epsilon \to 0. \tag{3.2.11}$$

Diese Reihe ist offensichtlich divergent. Bleibt die Vermutung, dass es sich um eine asymptotische Reihe (in $\mathbb{R}$) handelt. Dazu müssen wir zeigen, dass

$$|E(\epsilon) - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}(k-1)!\, \epsilon^k| = o(\epsilon^n) \tag{3.2.12}$$

gilt. Das ist durch (mit Verwendung der Substitution $t = \frac{1}{\epsilon}(1+v)$)

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \to 0} \frac{|(-1)^n n! e^{\frac{1}{\epsilon}} \int_{\frac{1}{\epsilon}}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}}\, dt|}{|\epsilon^n|} &= \lim_{\epsilon \to 0} n! \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{v}{\epsilon}}}{(1+v)^{n+1}}\, dv \\
&\leq \lim_{\epsilon \to 0} n! \int_0^{\infty} e^{-\frac{v}{\epsilon}}\, dv \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} n! \epsilon \\
&= 0 \qquad (3.2.13)
\end{aligned}$$

gegeben. Das bedeutet, dass wir für jedes (feste) n eine Approximation des Integrals für $\epsilon \to 0$ vorliegen haben.

3.3 Regulär gestörte Probleme

Wie wir bisher gesehen haben, sind die mathematische Probleme ur in den seltensten Fällen explizit lösbar. Vielfach gibt es jedoch einen oder mehrere kleine Parameter in dem Problem. Das legt den versuch nahe, die Lösung durch eine asymptotische Reihe zu beschreiben, welche dann in einer bestimmten Ordnung die Lösung approximiert.

Die Problemstellung für die gesuchte Lösung y_ϵ lautet also ganz allgemein

$$F(y_\epsilon, \epsilon) = 0. \qquad (3.3.1)$$

Wir bezeichen

$$F(y_0, 0) = 0 \qquad (3.3.2)$$

als reduziertes Problem und hoffen, dass y_0 bereits eine Nährung für die Lösung y_ϵ darstellt. Gilt

$$\lim_{\epsilon \to 0} y_\epsilon = y_0, \qquad (3.3.3)$$

so sprechen wir von Konvergenz. Gilt für das Residuum $r_\epsilon = F(y_0, \epsilon)$

$$\lim_{\epsilon \to 0} r_\epsilon = 0, \qquad (3.3.4)$$

so wird y_0 konsistent genannt. Vielfach ist die Frage nach der Konvergenz nicht rigoros zu beantworten., Ist (nur) Konsistenz gegeben, so spricht man von formaler asymptotischer Entwicklung.

Um eine Verbesserung der Nährung y_0 zu erreichen, setzt man eine asymptotische Entwicklung der Form

$$y_\epsilon = \sum_{k=0}^{\infty} y_k \epsilon^k \tag{3.3.5}$$

an. Gleichzeitig entwickelt man $F(y_\epsilon, \epsilon)$

$$F(y, \epsilon) = \sum_{k=0}^{N} F_k(y)\epsilon^k + O(\epsilon^{N+1}). \tag{3.3.6}$$

Entwickelt man dann auch noch die Funktionen $F_k(y)$, $k = 0, 1, ...$ so erhält man nach Vergleich der Koeffizienten der Potenzen von $\epsilon^0, \epsilon^1, \epsilon^2$ die Probleme

$$\begin{aligned} F(y_0, 0) &= 0, && (3.3.7)\\ DF_0(y_0)\, y_1 + F_1(y_0) &= 0, && (3.3.8)\\ DF_0(y_0)\, y_2 + \frac{1}{2} y_1 D^2 F_0(y_0)\, y_1 + DF_1(y_0)\ y_1 + F_2(y_0) &= 0, && (3.3.9)\\ &\dots \end{aligned}$$

wobei DF_0 , D^2F_0 die erste und zweite "Ableitung" bedeuten. Man hat also eine rekursive Folge von Problemen für die unbekannten y_0 , y_1 , y_2 usw. Generell kann man sagen, dass sich y_k rekursiv durch

$$DF_0(y_0)\, y_k + G(y_0, \dots, y_{k-1}) = 0, \qquad k = 1, 2, \dots \tag{3.3.10}$$

bestimmen lässt.

Probleme, für die solche formale asymptotische Entwicklungen konstruiert werden können, nennt man regulär gestört. Das ist keine sehr präzise Definition von "regulär gestört" und erst recht keine mathematische Defintion. Typische Merkmale, an denen man regulär gestörte Probleme erkennt, sind:

- Der direkte Ansatz führt zum Ziel, d.h. es gibt keine offensichtlichen Widersprüche oder Inkompatibilitäten mit dem vollen Problem.
- Die Approximation ist "gleichmässig".
- Das reduzierte Problem und die Nährungsprobleme für die höheren Approximationen sind vom selben Typ wie das volle Problem.

Ist ein Problem nicht regulär gestört spricht man von einem singulär gestörtem Problem.

Beispiel 2:
Wir kehren auf unser Problem (x_2 und t_2 werden nun einfach x und t genannt)

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{1}{(\epsilon x + 1)^2}, \qquad x(0) = 0, \qquad \frac{dx(0)}{dt} = 1, \tag{3.3.11}$$

zurück. Die in (3.0.50) angebene (formale) Nährungslösung ist ja gerade die Lösung des reduzierten Problems. Setzt man allgemein

$$x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + O(\epsilon^3), \tag{3.3.12}$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}(x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + O(\epsilon^3)) &= -\frac{1}{(\epsilon(x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + O(\epsilon^3)) + 1)^2} \\
&= -1 + \epsilon 2x_0 + \epsilon^2(2x_1 - 3x_0^2) + O(\epsilon^3), \\
x_0(0) + \epsilon x_1(0) + \epsilon^2 x_2(0) + O(\epsilon^3) &= 0, \\
\frac{d}{dt}(x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + O(\epsilon^3))(0) &= 1. \qquad (3.3.13)
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert also die Probleme für $x_k, k = 0, 1, 2, \ldots$.
Koeffizienten von ϵ^0 :

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = -1, \qquad x_0(0) = 0, \qquad \frac{dx_0(0)}{dt} = 1, \tag{3.3.14}$$

Koeffizienten von ϵ^1 :

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -2x_0, \qquad x_1(0) = 0, \qquad \frac{dx_1(0)}{dt} = 0, \tag{3.3.15}$$

Koeffizienten von ϵ^2 :

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = 2x_1 - 3x_0^2, \qquad x_2(0) = 0, \qquad \frac{dx_2(0)}{dt} = 0, \tag{3.3.16}$$

Die entsprechenden Lösungen lauten

$$\begin{aligned}
x_0(t) &= t - \frac{t^2}{2}, && (3.3.17) \\
x_1(t) &= \frac{t^3}{3}\left(1 - \frac{1}{4}t\right), && (3.3.18) \\
x_2(t) &= -\frac{t^4}{4}\left(1 - \frac{11}{15}t + \frac{11}{90}t^2\right) && (3.3.19)
\end{aligned}$$

und daher

$$x(t) = t - \frac{t^2}{2} + \epsilon\frac{t^3}{3}\left(1 - \frac{1}{4}t\right) - \epsilon^2\frac{t^4}{4}\left(1 - \frac{11}{15}t + \frac{11}{90}t^2\right) + O(\epsilon^3) \quad (3.3.20)$$

Damit wird natürlich die Wiederaufprallzeit auch korrigiert. Sie ist dann durch die Gleichung

$$0 = T - \frac{T^2}{2} + \epsilon\frac{T^3}{3}\left(1 - \frac{1}{4}T\right) - \epsilon^2\frac{T^4}{4}\left(1 - \frac{11}{15}T + \frac{11}{90}T^2\right) + O(\epsilon^3) \quad (3.3.21)$$

gegeben. Wir haben allerdings nicht gezeigt, dass die Entwicklung der Lösung tatsächlich eine Approximation der Lösung des ursprünglichen Problems ist.

Bei Beispiel 4 war ja die Frage nach der Wiederaufprallzeit im Mittelpunkt. Interessiert man sich jedoch für das Langzeitverhalten $t \to \infty$ so kann man manchmal bereits in der formalen Entwicklung die Probleme erkennen.

Beispiel 4:
Die Lösung des reduzierten Problems ist im Falle des Problems (t_1 wird nun wieder t genannt und $\epsilon = \frac{1}{\alpha}$)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{dt} + \epsilon^2\beta\sin(\theta_0\theta) = 0, \qquad \theta(0) = 1, \qquad \frac{d\theta(0)}{dt} = \epsilon, \quad (3.3.22)$$

durch $\theta_0(t) = 1$ gegeben. Führt man die Entwicklung weiter, also setzt man $\theta(t) = \theta_0(t) + \epsilon\theta_1(t) + O(\epsilon^2)$, so ergibt sich für die Lösung

$$\theta(t) = 1 + \epsilon(1 - e^{-t}) + O(\epsilon^2). \quad (3.3.23)$$

Die Lösung ist aber auch nicht sehr realistisch, da sich das Pendel nicht in die bekannte stabile Ruheposition mit $\theta = 0$ bewegt. Das ist nicht verwunderlich, da die erste Ordnung den Gravitationsterm immer noch nicht enthält. Ausserdem kann eine Approximation von höherer Ordnung das nicht mehr leisten, da eine Korrektur der reduzierten Lösung von der Grössenordnung Eins notwendig wäre.

3.4 Singulär gestörte Probleme

Wir starten mit der van der Pol Gleichung

$$\ddot{y}_\epsilon + y_\epsilon = \epsilon(1 - y_\epsilon^2)\dot{y}_\epsilon, \qquad y_\epsilon(0) = \overline{y}, \qquad \dot{y}_\epsilon(0) = 0, \qquad \epsilon \ll 1, \quad (3.4.1)$$

und möchten das Langzeitverhalten untersuchen. Die Gleichung beschreibt die Spannung in einem Schwingkreis, der über eine Induktivität und eine Triode mit

einem äusseren Schwingkreis gekoppelt ist (Details und Entdimensionalisierung in der Übung). Der Ansatz einer asymptotischen Entwicklung $y_\epsilon(t) = y_0(t) + \epsilon y_1(t) + O(\epsilon^2)$ führt auf folgende Hierarchie von Problemen.
Koeffizienten von ϵ^0:

$$\ddot{y}_0 + y_0 = 0, \qquad y_0(0) = \overline{y}, \qquad \dot{y}_0(0) = 0, \tag{3.4.2}$$

Koeffizienten von ϵ^1:

$$\ddot{y}_1 + y_1 = (1 - y_0^2)\dot{y}_0, \qquad y_1(0) = 0, \qquad \dot{y}_0(0) = 0, \tag{3.4.3}$$

mit den Lösungen (lineare Probleme mit konstanten Koeffizienten)

$$y_0(t) = \overline{y}\cos t \tag{3.4.4}$$

und nach Einsetzen dieser Lösung in (3.4.3)

$$y_1(t) = \frac{\overline{y}}{2}\left(1 - \frac{\overline{y}^2}{4}\right)(t\cos t - \sin t) + \frac{\overline{y}^3}{32}(3\sin t - \sin 3t). \tag{3.4.5}$$

Offensichtlich hat man es hier mit Resonanz zu tun. Diese Lösung ist also im Zeitintervall $t \in [0, \infty)$ unbeschränkt. Daher fällt dieses Problem in die Klasse der singulär gestörten Probleme. Die Entwicklung ist also auf $t \in [0, \infty)$ unbeschränkt und nach Zeiten der Grössenordnung $\frac{1}{\epsilon}$ nicht mehr sinnvoll (da dann der Term, welcher formal von Ordnung ϵ ist, von der Grössenordnung 1 wird). Zudem muss man klären, ob denn tatsächlich unbeschränkte Lösungen in diesem Problem auftreten oder ob dies nur ein Problem dieser Entwicklung ist.

Bevor wir uns diesen offenen Fragen zuwenden noch ein vereinfachtes (explizit lösbares) Problem von ähnlichem Typ.
Beispiel 5:
Das Problem

$$\ddot{y}_\epsilon + y_\epsilon = -2\epsilon\dot{y}_\epsilon, \qquad y_\epsilon(0) = \overline{y}, \qquad \dot{y}_\epsilon(0) = 0, \qquad \epsilon \ll 1, \tag{3.4.6}$$

hat die Lösung

$$y_\epsilon(t) = \overline{y}e^{-\epsilon t}\cos(\sqrt{1-\epsilon^2}t). \tag{3.4.7}$$

Die Lösung hat also einen schwingenden Anteil und einen abklingenden Anteil. Der abklingende Anteil geht sehr langsam vor sich. Anders ausgedrückt könnte man sagen, dass das Abklingen auf einer Zeitskala ϵt stattfindet und die Schwingung hingegen auf der t Zeitskala. Würde man hier den naiven Ansatz einer asymptotischen Entwicklung machen, so wäre die Lösung des reduzierten

Problems wie vorhin eine reine Schwingung ohne Abklingverhalten. Das auf der "langen Zeitskala" stattfindende Abklingen scheint in dieser Asymptotik verloren zu gehen.

Eine Methode, welche dem unterschiedlichen Verhalten auf mehreren Zeitskalen Rechnung trägt ist die **Methode der mehrfachen Skalierungen**. Man setzt nach wie vor eine Entwicklung der Form

$$y_\epsilon = y_0 + \epsilon y_1 + O(\epsilon^2) \tag{3.4.8}$$

an, wobei allerdings die Funktionen $y_i, i = 0, 1, \ldots$ vom Typ

$$y_i = y_i(T_0, T_1), \qquad T_0 = t, \qquad T_1 = \epsilon t, \qquad i = 0, 1, \ldots \tag{3.4.9}$$

sind. Damit ergeben sich die Ableitungsoperatoren zu

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + O(\epsilon^2) \tag{3.4.10}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + O(\epsilon^2). \tag{3.4.11}$$

Die van der Pol Gleichung liest sich dann

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 y_0}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{\partial^2 y_1}{\partial T_0^2} + y_0 + \epsilon y_1 == \epsilon(1 - y_0^2) \frac{\partial y_0}{\partial T_0} + O(\epsilon^2). \tag{3.4.12}$$

Nach Koeffizientenvergleich hat man also die Probleme

$$\frac{\partial^2 y_0}{\partial T_0^2} + y_0 = 0 \tag{3.4.13}$$

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial T_0^2} + y_1 = -2 \frac{\partial^2 y_0}{\partial T_0 \partial T_1} + (1 - y_0^2) \frac{\partial y_0}{\partial T_0} \tag{3.4.14}$$

Die Lösung der ersten Gleichung ist

$$y_0(T_0, T_1) = a(T_1) \cos(T_0 + b(T_1)), \qquad a(0) = \overline{y}, \qquad b(0) = 0. \tag{3.4.15}$$

Damit ergibt sich die rechte Seite der zweiten Gleichung in (3.4.14) mit $\phi(T_0, T_1) = T_0 + b(T_1)$ zu

$$\begin{aligned} & 2\frac{\partial a}{\partial T_1} \sin\phi + 2a \frac{\partial b}{\partial T_1} \cos\phi - a \sin\phi (1 - a^2 \cos^2\phi) \\ = & \left(2\frac{\partial a}{\partial T_1} - a + \frac{a^3}{4} \right) \sin\phi + 2a \frac{\partial b}{\partial T_1} \cos\phi + \frac{a^3}{4} \sin 3\phi \end{aligned} \tag{3.4.16}$$

Nun hat man den grossen Vorteil, dass man Resonanz (und damit Unbeschränktheit in y_1) vermeiden kann, wenn man nur

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial T_1} &= \frac{a}{8}(4-a^2), \qquad a(0)=\overline{y} && (3.4.17)\\ \frac{\partial b}{\partial T_1} &= 0, \qquad b(0)=0 && (3.4.18)\end{aligned}$$

wählt. Die Lösungen der beiden Gleichungen sind durch (man betrachte die erste Gleichung am besten als Bernoullsche Differentialgleichung)

$$a(T_1)=\frac{2\overline{y}}{\sqrt{\overline{y}^2-(\overline{y}^2-4)e^{-T_1}}}, \qquad b(T_1)=0. \tag{3.4.19}$$

gegeben. Damit ergibt sich die Lösung in führender Ordnung zu

$$y(t)=\frac{2\overline{y}}{\sqrt{\overline{y}^2-(\overline{y}^2-4)e^{-\epsilon t}}}\cos t, \tag{3.4.20}$$

also nun tatsächlich eine Schwingung mit Abklingverhalten mit der Eigenschaft

$$y(t)\approx 2\cos t \qquad \text{für} \qquad t\to\infty. \tag{3.4.21}$$

Es bleibt nun nach wie vor offen, inwieweit diese Asymptotik die tatsächlichen Lösungen der van der Pol Gleichung approximiert. Zumindest gibt es nicht mehr das Problem der Unbeschränktheit auf dem Intervall $t\in[0,\infty)$.

Wir kehren also nochmals zur van der Pol Gleichung zurück und versuchen einen primitiven **Energiemethode**-Ansatz. Wir multiplizieren die van der Pol Gleichung mit $\dot{y}_\epsilon$ und erkennen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}_\epsilon^2}{2}+\frac{y_\epsilon^2}{2}\right)=\epsilon(1-y_\epsilon^2)\dot{y}_\epsilon^2, \tag{3.4.22}$$

also die "Energie" des Systems $\frac{\dot{y}_\epsilon^2}{2}+\frac{y_\epsilon^2}{2}$ nimmt für $|y_\epsilon|>1$ ab und für $|y_\epsilon|<1$ zu. Das reicht aber noch nicht um die Beschränktheit der Lösung zu zeigen.

Dazu schreiben wir das allgemeinere Problem

$$\ddot{y}+g(y)\dot{y}+y=0 \tag{3.4.23}$$

um in eine autonomes System erster Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{y} &= z+G(y) && (3.4.24)\\ \dot{z} &= -y. && (3.4.25)\end{aligned}$$

Dabei sei $G(y)=\int_0^y g(s)ds$ und habe die Eigenschaften

- $G(y) = -G(-y)$
- $\lim_{y\to\infty} G(y) = +\infty$
- $\exists\alpha > 0$, so dass $G(y) < 0$ für $0 < y < \alpha$ und $G(y) > 0$ und monoton für $\alpha > 0$.

Man erkennt sofort, dass im Falle der van der Pol Gleichung die Funktion $G(y) = -\epsilon(y - \frac{y^3}{3})$ eine kubische Parabel ist und die genannten Eigenschaften erfüllt.

Wir erkennen, dass $\dot{z} = 0$ bei $y = 0$ und $\dot{y} = 0$ auf der Kurve $z = G(y)$ gilt. Ausserdem ist oberhalb der Kurve $\dot{y} > 0$ und unterhalb $\dot{y} < 0$. Analog gilt $\dot{z} > 0$ für $y < 0$ und $\dot{z} < 0$ für $y < 0$. Es gibt einen stationären Punkt bei $(y, z) = (0, 0)$. Die Linearisierung um diesen Punkt ergibt Eigenwerte der

$$\lambda_{1/2} = \frac{\epsilon}{2} \pm i\sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}} \tag{3.4.26}$$

für die entsprechende Matrix. Also handelt es sich um einen instabilen Wirbelpunkt. Man beachte auch, dass mit einer Lösung (y, z) auch $(-y, -z)$ Lösung des Systems ist, also Spiegelung einer Lösung um den Ursprung im Phasenraum ergibt wieder eine Lösung. Eine Lösung, welche bei $(0, z_0)$ startet, erreicht nach einiger Zeit notgedrungen die $y = 0$ Achse im $z < 0$ Bereich. Diesen Punkt nennen wir $(0, -z_1)$. Wir haben dann drei Dinge zu zeigen:

- $z_0 > z_1$ für z_0 gross genug.
- Es existiert mindestens eine periodische Lösung um den Ursprung.
- Es existiert genau eine periodische Lösung.

Nehmen wir an der erste Punkt sei gezeigt. Dann impliziert die Punktsymmetrie, dass man entlang dieser Lösung über den dritten und vierten Quadranten wieder zu poisitiven $z-$ Achse zurückkehrt, und zwar an einer Stelle $z_2 < z_0$. Die Lösung von $(0, z_0)$ bis $(0, z_2)$ und das Teilstück von z_2 nach z_1 auf der $z-$ Achse begrenzen eine Bereich im Phasenraum, in den Lösungen nur hineinwandern (eben durch das Teilstück von z_2 nach z_1) und der nur einen abstossenden Fixpunkt enthällt. Dann liefert das Theorem von Poincare-Bendixon die Existenz von mindestens einem periodischem Orbit in dem genannten Bereich.

Nun zurück zum Beweis des ersten Punktes. Dies kann man mit Hilfe der "Energie"

$$E = \frac{1}{2}(z^2 + y^2), \tag{3.4.27}$$

gemacht werden, welche die folgenden Eigenschaften entlang der Lösung hat

$$\dot{E} = -yG(y) \tag{3.4.28}$$

$$\frac{dE}{dy} = \frac{-yG(y)}{z - G(y)} \tag{3.4.29}$$

$$\frac{dE}{dz} = G(y). \tag{3.4.30}$$

Bezeichnet man nun $A = (0, z_0)$, B, C die Schnittpunkte der Geraden $y = \alpha$ mit der Lösung im $z > 0$ und im $z < 0$ Bereich und $D = (0, z_2)$. $E = (y_0, 0)$ sei der Schnittpunkt der Lösung mit der (positiven) y-Achse. F, J, K seien die Schnittpunkte einer Gerade $y = \beta, \alpha < \beta < y_0$ mit der y-Achse, mit $G(y)$ und mit der Lösung im $z > 0$ Bereich. Nun ist die Änderung der "Energie" entlang der Lösung von A nach D durch

$$\begin{aligned} E(D) - E(A) &= \int_A^B \frac{dE}{dy} dy + \int_C^D \frac{dE}{dy} dy + \int_B^C \frac{dE}{dz} dz \\ &= (\int_A^B - \int_D^C) \frac{-yG(y)}{z - G(y)} dy + \int_B^C G(y) dz. \end{aligned} \tag{3.4.31}$$

Man sieht, dass der Intergand im ersten Integral von A nach B nicht negativ ist, monoton fällt (als Funktion von z_0) und für $z_0 \to \infty$ verschwindet. Entsprechendes gilt für den negativen Integranden von D nach C. Das letzte Integral kann man folgendermassen abschätzen (von B nach C ist $G(y) \geq 0$)

$$\begin{aligned} -\int_B^C G(y) dz &= \int_C^B G(y) dz \\ &> \int_E^K G(y) dz \\ &> l(E, K) \min_{(E,K)} G(y) \\ &> l(F, K)\, l(F, J) \to \infty \text{ für } z_0 \to \infty, \end{aligned} \tag{3.4.32}$$

wobei z.B. $l(F, K)$ die Länge der Strecke von F nach K bezeichnet. Ausserdem ist dieses Integral $\int_B^C G(y) dz$ monoton fallend als Funktion von z_0. Da nun also

$$\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_0^2}{2} = E(D) - E(A) \to -\infty \text{ für } z_0 \to \infty., \tag{3.4.33}$$

ist auch der erste Punkt gezeigt.

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, bemerken wir zunächst, dass für Lösungen mit $z_0 < \alpha$ die entsprechende Energie zunimmt, also

$$\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_0^2}{2} = E(D) - E(A) > 0 \text{ für } z_0 < \alpha. \tag{3.4.34}$$

Damit ist die Änderung der Energie $E(D)-E(A)$ als Funktion von z_0 für kleine z_0 positiv und für grosse z_0 ist sie entsprechend (3.4.34) negativ unbeschränkt. Ausserdem kann man an Hand der bereits diskutierten Eigenschaften der Integrale in (3.4.31) schliessen, dass die Abhängigkeit monoton fallend ist. Daher gibt es genau einen Wert $z_0^\star$ mit verschwindender Energieänderung und damit $z_0^\star = z_1^\star$ (was gleichbedeutend mit der Periodizität der Lösung ist). Die Stabilität dieser eindeutigen periodischen Lösung ist nach unserem bishergen Wissen offensichtlich.

Damit haben wir also nun tatsächlich die Existenz einer periodischen Lösung gezeigt. Das bedeutet, dass tatsächlich aller Lösungen beschränkt bleiben. Die Methode der mehrfachen Skalierung war im Gegensatz zur direkten Methode also tatsächlich die geeignete asymptotische Methode.

3.5 Grenzschichten

Wir beginnen mit der Differentialgleichung

$$\epsilon y_\epsilon' = -y_\epsilon + x + \epsilon, \qquad y_\epsilon(0) = 1. \tag{3.5.1}$$

Das reduzierte Problem liefert den Widerspruch

$$y_0 = x, \qquad y_0(0) = 0 \neq 1. \tag{3.5.2}$$

Betrachtet man hingegen die Lösung der obigen Gleichung

$$y_\epsilon(x) = e^{-\frac{x}{\epsilon}} + x, \tag{3.5.3}$$

so sieht man, dass die reduzierte Lösung $y_0 = x$ zwar die Anfangsbedingung nicht erfüllt, aber ansonsten die Lösung – vor allem für grosse x – gut beschreibt. Nur in der Nähe von $x = 0$ ist die Approximation nicht akzeptabel. Die vollständige Lösung hat in der Nähe von $x = 0$ eine Korrektur auf einer Skala $\xi = \frac{x}{\epsilon}$. Daher scheint es sinnvoll zu sein, das ursprüngliche Problem auf dieser "kurzen" Skala zu betrachten. Also, mit $Y_\epsilon(\xi) = y_\epsilon(\epsilon\xi)$ liest sich (3.5.1)

$$\frac{dY_\epsilon}{d\xi} = -Y_\epsilon + \epsilon\xi + \epsilon, \qquad Y_\epsilon(0) = 1. \tag{3.5.4}$$

Das zu diesem Problem gehörige reduzierte Problem ist

$$\frac{dY_0}{d\xi} = -Y_0, \qquad Y_0(0) = 1. \tag{3.5.5}$$

und hat die Lösung $Y_0 = e^{-\xi} = e^{-\frac{x}{\epsilon}}$. Es beschreibt also genau das wesentliche Verhalten um $x = 0$. Je kleiner ϵ, desto kürzer ist die $\frac{x}{\epsilon}$ Skala, umso schärfer ist ist die Änderung der Lösung nahe $x = 0$. Man spricht hier von einer **Grenzschicht** bei $x = 0$.

Eine Funktion hat also Grenzschichtverhalten an eine Stelle, falls sie in nicht gleichmässig gegen eine entsprechende Grenzfunktion konvergiert. Allerdings spricht man nur dann von Grenzschichtverhalten, wenn die gleichmässige Konvergenz nur an Mannigfaltigkeiten mit niedrigerer Dimension als die des betrachteten Raumes verletzt ist (also z.B. wie oben an isolierten Punkten im $\mathbb{R}^1$).

Die generelle Vorgangsweise ist nun folgende. Die $n - k$ dimensionale Mannigfaltigkeit S im $\mathbb{R}^n$, an der das Grenzschichtverhalten auftritt, sei durch $s = \{x | z_1(x) = \cdots = z_k(x) = 0\}$ gegeben. Dann führe man in einer Umgebung von S lokale Koordinaten ξ vom Typ

$$\begin{aligned} \xi_i &= z_i \epsilon^{-\alpha_i}, \quad \alpha_i > 0, && i = 1, \ldots, k, \\ \xi_i &= z_i, && i = k+1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

ein. Ist das Grenzschichtverhalten in der Funktion $f_\epsilon(x)$ aufgetreten, dann sollte die Funktion

$$F_\epsilon(\xi) = f_\epsilon(x(\xi, \epsilon)) \tag{3.5.7}$$

an S kein Grenzschichtverhalten mehr aufweisen. Die Grenzschicht wird also mit Hilfe der neuen Koordinaten in einer kleinen Umgebung mit einer Lupe betrachtet. Nun zur Wahl der Exponenten $\alpha_i, i = 1, \ldots, k$.

Führt man in dem obigen Beispiel in der Funktion (3.5.3) an der Stelle $x = 0$ lokale Variable vom Typ $\xi = x\epsilon^{-\alpha}$ ein, so ergibt sich

$$Y_\epsilon(\xi) = e^{-\xi\epsilon^{\alpha-1}} + \epsilon^\alpha \xi, \tag{3.5.8}$$

und damit in $\xi \in [0, \infty)$

$$\lim_{\epsilon \to 0} Y_\epsilon(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha > 1 \\ e^{-\xi} & \text{für } \alpha = 1 \\ \text{keine stetige Grenzfunktion} & \text{für } 0 < \alpha < 1. \end{cases} \tag{3.5.9}$$

Der Parameter $\alpha = 1$ scheint doch eine besondere Funktion zu haben, da der entsprechende Grenzwert insofern besonders ist als dass er den Grenzwert 1 auch enthält (im Limes $\xi \to 0$). In diesem Falle sagt man, der Grenzwert der Funktion Y_ϵ für Variable mit $\alpha > 1$ ist in dem Grenzwert für $\alpha = 1$ enthalten. Man nennt Variable **signifikant**, falls der entsprechende Grenzwert in keinem anderen enthalten ist. Die interessanten Grenzschichtvariablen sind nur die signifikanten.

Signifikante Grenzschichtvariablen müssen nicht eindeutig sein. Die Funktion

$$y_\epsilon = x(\frac{e^{-\frac{x}{\epsilon}}}{x+\epsilon^2}+1) \tag{3.5.10}$$

hat zwei signifikante Grenzschichtvariable, nämlich $\xi_1 = \frac{x}{\epsilon}$ (mit Grenzwert $e^{-\xi_1}$) und $\xi_2 = \frac{x}{\epsilon^2}$ (mit Grenzwert $\frac{\xi_2}{1+\xi_2}$).

Die Transformation auf lokale Variable ist aber nicht immer erfolgreich, was an dem Beispiel der Funktion

$$y_\epsilon(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\epsilon}{x}}\sin\frac{1}{x} & \text{für } x>0 \\ 0 & \text{für } x=0. \end{cases} \tag{3.5.11}$$

an der Stelle $x = 0$ gezeigt werden soll. Der (punktweise) Grenzwert ist durch die Funktion

$$y_0(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{für } x>0 \\ 0 & \text{für } x=0. \end{cases} \tag{3.5.12}$$

gegeben. Führt man allgemein Grenzschichtvariable $\xi = x\epsilon^{-\alpha}$ ein, so erhält man

$$Y_\epsilon(\xi) = \begin{cases} e^{-\frac{\epsilon^{1-\alpha}}{\xi}}\sin\frac{1}{\epsilon^\alpha\xi} & \text{für } \xi>0 \\ 0 & \text{für } \xi=0. \end{cases} \tag{3.5.13}$$

Nur für $\alpha > 1$ ist ein Grenzwert $\lim_{\epsilon\to 0} Y_\epsilon(\xi) = 0$ möglich. Dieser ist allerdings nicht interessant und enthält keine für das Verhalten an $x = 0$ relevanten Informationen.

Die bisherige Vorgehensweise legt die folgende Approximation eine Funktion mit Grenzschichtverhalten nahe. Sei ξ die eindeutige Grenzschichtvariable, so ist mit der Bezeichnungweise $(\lim_\xi y_\epsilon)(\xi) = \lim_{\epsilon\to 0} y_\epsilon(x(\xi,\epsilon))$

$$y_0(x) + \lim_\xi(y_\epsilon - y_0) \tag{3.5.14}$$

eine Approximation für die Funktion y_ϵ in Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon)$. Bei mehrdeutigen signifikanten Grenzschichtvariablen kann man suksessive vorgehen

$$y_0(x) + \lim_{\xi_1}(y_\epsilon - y_0) + \lim_{\xi_2}(y_\epsilon - y_0 - \lim_{\xi_1}(y_\epsilon - y_0)) \tag{3.5.15}$$

Wir wollen nun dieses Wissen auf Randwertprobleme anwenden. Betrachten wir

$$-\epsilon y_\epsilon'' + y_\epsilon' + y_\epsilon = 0, \qquad y_\epsilon(0) = 1, \qquad y_\epsilon(1) = 0, \qquad \epsilon \ll 1. \tag{3.5.16}$$

Wir sind an einer approximativen Lösung des Problems interessiert. Die reduzierte Gleichung

$$y_0' + y_0 = 0, \tag{3.5.17}$$

mit der Lösung $y_0(x) = c_0 e^{-x}$ kann die beiden Randbedingungen nicht erfüllen. Wir vermuten, dass die Lösung der reduzierten Gleichung die Lösung im inneren des Intervalls $(0, 1)$ gut beschreibt und eventuell auch eine Randbedingung erfüllt. Dann müsste aber an dem anderen Rand eine Grenzschicht in der exakten Lösung auftreten.

Die gängige Annahme ist, dass Grenzschichten nur dort auftreten, wo Zusatzbedingungen (z.B. Randbedingungen) formuliert sind oder wo ein Verlust an Glattheit der Lösung zu erwarten ist (z.B. an Stellen, wo in der Gleichung auftretende Funktionen Unstetigkeiten haben). An den möglichen Stellen führt man dann lokale Variable ein und transformiert den Differentialoperator bzw. die Differentialgleichung auf die neuen Variablen. Dann betrachtet man die signifikanten Degenerationen der transformierten Differentialgleichung (sprich jene Grenz-Differentialgleichungen, welche nicht in anderen enthalten sind). Ein vielfach akzeptierte Regel besagt, dass signifikate Degeneration dann vorliegt, wenn die meisten Terme des Differentialoperators vorhanden sind, mindestens jedoch zwei.

Führt man also in unserem Beispiel bei $x = 0$ lokale Variable $\xi = x\epsilon^{-\alpha}$ ein, so folgt mit $Y_\epsilon(\xi) = y_\epsilon(\epsilon^\alpha \xi)$ und $\dot{()} = \frac{d}{d\xi}$

$$-\epsilon^{1-2\alpha}\ddot{Y}_\epsilon + \epsilon^{-\alpha}\dot{Y}_\epsilon + Y_\epsilon = 0. \tag{3.5.18}$$

Es gilt also im Grenzwert $\epsilon \to 0$

$$\begin{aligned} \dot{Y}_0 &= 0, \quad \text{für} \quad 0 < \alpha < 1 \\ -\ddot{Y}_0 + \dot{Y}_0 &= 0, \quad \text{für} \quad \alpha = 1 \\ -\ddot{Y}_0 &= 0, \quad \text{für} \quad \alpha > 1. \end{aligned} \tag{3.5.19}$$

Die signifikante Degeneration liegt also für $\alpha = 1$ vor. Die entsprechende Lösung lautet

$$Y_0(\xi) = c_1 + c_2 e^{\xi}. \tag{3.5.20}$$

Die Lösung ist also konstant oder für grosse ξ unbeschränkt. Daher kann also die natürliche Forderung $\lim_{\xi\to\infty} Y_0(\xi) = 0$ nicht erfüllt werden und es kann keine Grenzschicht bei $x = 0$ geben.

Führt man bei $x = 1$ Grenzschichtvariable $\eta = (1 - x)\epsilon^{-\alpha}$ ein, so ergibt sich die signifikante Degeneration wieder für $\alpha = 1$ als

$$-\ddot{Z}_0 - \dot{Z}_0 = 0 \tag{3.5.21}$$

(das Minuszeichen entsteht durch die Wahl der Grenzschichtvariable) mit der Lösung

$$Z_0(\eta) = c_3 + c_4 e^{-\eta}. \tag{3.5.22}$$

Da ja nun keine Grenzschicht bei $x = 0$ vorliegt, muss also die Lösung $y_0(x)$ die Randbedingung bei $x = 0$ erfüllen, also muss $c_0 = 1$ gelten. Andererseits muss die Lösung bei $x = 1$ die Randbedingung erfüllen, also muss $y_0(1) + Z_0(0) = 0$ und daher $c_3 + c_4 = -\frac{1}{e}$ gelten. Als letzte Bedingung muss dann $\lim_{\eta\to\infty} Z_0(\eta) = 0$ sein, was $c_3 = 0$ und $c_4 = -\frac{1}{e}$ impliziert. Daher lautet die Nährungslösung

$$y_\epsilon(x) \approx e^{-x} - e^{\frac{1-x}{\epsilon} - 1}. \tag{3.5.23}$$

Im Vergleich dazu lautet die exakte Lösung

$$y_\epsilon(x) = \frac{e^{\frac{1}{2\epsilon}(1+\sqrt{1-4\epsilon})} e^{\frac{1}{2\epsilon}(1-\sqrt{1-4\epsilon})x} - e^{\frac{1}{2\epsilon}(1-\sqrt{1-4\epsilon})} e^{\frac{1}{2\epsilon}(1+\sqrt{1-4\epsilon})x}}{e^{\frac{1}{2\epsilon}(1+\sqrt{1-4\epsilon})} - e^{\frac{1}{2\epsilon}(1-\sqrt{1-4\epsilon})}}. \tag{3.5.24}$$