

9. Übungsblatt

Abgabetermin: Mi, 20.12.17, zu Beginn der Vorlesung, Abholung um 8:20 Uhr.

1. Sei $U := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$. Zeigen Sie, dass U ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist, und geben Sie eine Basis von U an. (6 Punkte)
2. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K , sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ Skalare. Zeigen Sie: $\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n$ ist genau dann eine Basis von V , wenn alle λ_i ungleich 0 sind. (8 Punkte)
3. Finden Sie alle $\mathbb{F}_3$ -Unterräume von $\mathbb{F}_3^2$. Geben Sie jeweils alle Elemente jedes Unterraums an, sowohl als auch deren Dimension. Hinweis: Illustrationen sind eventuell hilfreich. (8 Punkte)
4. Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum über einem Körper K , und seien $v_1, v_2, \dots, v_n$ Vektoren in $V \setminus \{0\}$. Für $1 \leq i \leq n$ sei $W_i := L(v_1, v_2, \dots, v_i)$ der Unterraum von V , der von den ersten i Vektoren aufgespannt wird. Die W_i bilden eine Folge von ineinander enthaltenen Unterräumen. Zeigen Sie, dass die folgenden Behauptungen äquivalent sind:
 - (a) $v_1, \dots, v_n$ ist eine Basis von V .
 - (b) Die W_i sind paarweise verschieden.
 - (c) $W_n = V$.
 - (d) $v_{i+1} \notin W_i$ für alle $1 \leq i < n$.
 - (e) $\dim W_i = i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Hinweis: Vergl. Beweis von Satz 8.10.

(10 Punkte)

Die folgende Aufgabe ist eine *-Aufgabe. Sie kann, muss aber nicht eingereicht werden. Die Punkte zählen nicht zu den Übungspunkten, sondern werden als Extrapunkte vermerkt.

- *5. Wir betrachten eine Folge endlichdimensionaler K -Vektorräume V_i und linearer Abbildungen

$$0 \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \xrightarrow{f_n} 0,$$

für die $\operatorname{im}(f_i) = \ker(f_{i+1})$ gilt, $i = 0, \dots, n-1$. Beweisen Sie, dass

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \dim V_i = 0.$$

(8 Punkte)