

## 8. Übungsblatt

Abgabetermin: Mi, 13.12.17, zu Beginn der Vorlesung, Abholung um 8:20 Uhr.

1. Man betrachte den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $\mathbb{C}^4$  und darin die Vektoren  $v_1 = (1, i, i - 1, 0)$ ,  $v_2 = (0, i + 1, i, 0)$  und  $v_3 = (-i, i, i, 0)$ .
- (a) Sind die Vektoren  $v_1, v_2, v_3$  linear unabhängig?
  - (b) Geben Sie alle Möglichkeiten an, aus  $v_1, v_2, v_3$  eine Basis für  $L(v_1, v_2, v_3)$  auszuwählen.
  - (c) Ergänzen Sie  $v_1, v_2$  zu einer Basis von  $\mathbb{C}^4$ .

(6 Punkte)

2. Wir betrachten den Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen als  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum. Zeigen Sie, dass die Elemente 1 und  $a \in \mathbb{R}$  genau dann linear abhängig sind, wenn  $a \in \mathbb{Q}$ .

(4 Punkte)

3. Man betrachte die Vektoren  $v_1 = (1, 0, e^{i\frac{\pi}{4}})$ ,  $v_2 = (0, 1, e^{-i\frac{\pi}{4}})$  und  $v_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$  im  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $\mathbb{C}^3$ . Desweiteren wird eine lineare Abbildung  $f$  durch

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^3 &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ (z_1, z_2, z_3) &\longmapsto z_1 \cdot v_1 + z_2 \cdot v_2 + z_3 \cdot v_3 \end{aligned}$$

definiert.

- (a) Zeigen Sie, dass  $\ker(f) \simeq \mathbb{C}$ .
- (b) Finden Sie einen Erzeuger von  $\ker(f)$ .
- (c) Finden Sie eine Relation

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

mit  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$  und  $\lambda_i \neq 0$  für mindestens ein  $i$ .

(6 Punkte)

4. Seien  $U_1$  und  $U_2$  die folgenden Unterräume von  $\mathbb{R}^4$ :

$$\begin{aligned} U_1 &:= \mathbb{R} \cdot (0, 1, 2, 0) + \mathbb{R} \cdot (0, 0, 1, 1) \\ U_2 &:= \mathbb{R} \cdot (1, 0, 1, 1) + \mathbb{R} \cdot (-3, 1, 1, -1). \end{aligned}$$

Finden Sie Vektoren  $v, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^4$  so, dass  $U_1 \cap U_2 = \mathbb{R} \cdot v$  und  $U_1 + U_2 = \mathbb{R} \cdot w_1 + \mathbb{R} \cdot w_2 + \mathbb{R} \cdot w_3$ .

(8 Punkte)

5. Sei  $K$  ein Körper und  $U_1$  bzw.  $U_2$  die folgenden Untervektorräume des  $K^3$ :

$$U_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in K^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\},$$

$$U_2 := K \cdot (1, 1, 1) := \{t \cdot (1, 1, 1) \mid t \in K\}.$$

(a) Sei  $K = \mathbb{R}$ . Zeigen Sie: Für jeden Vektor  $v \in \mathbb{R}^3$  gibt es ein  $t \in \mathbb{R}$ , so dass

$$v - t \cdot (1, 1, 1) \in U_1.$$

(b) Zeigen Sie, dass  $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3$ .

(c) Sei nun  $K = \mathbb{F}_3$ . Gilt weiterhin  $U_1 + U_2 = \mathbb{F}_3^3$ ? Begründen Sie, ggf. mit Gegenbeispiel.

(8 Punkte)

---

Die folgende Aufgabe ist eine \*-Aufgabe. Sie kann, muss aber nicht eingereicht werden. Die Punkte zählen nicht zu den Übungspunkten, sondern werden als Extrapunkte vermerkt.

\*6. Im  $\mathbb{R}^4$  seien die Vektoren

$$v_1 = (x, 1, 1, 1) \quad v_2 = (1, x, 1, 1)$$

$$v_3 = (1, 1, x, 1) \quad v_4 = (1, 1, 1, x)$$

gegeben, wobei  $x \in \mathbb{R}$ . Man betrachte den Unterraum

$$L(x) = L(v_1, v_2, v_3, v_4).$$

Es gibt genau 2 Werte von  $x$ , so dass  $L(x) \neq \mathbb{R}^4$ . Finden Sie diese beiden Werte und wählen Sie jeweils eine Basis von  $L(x)$  aus den Vektoren  $v_1, v_2, v_3, v_4$  aus.

(8 Punkte)