Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Michel van Garrel

7. Übungsblatt

Abgabetermin: Mi, 06.12.17, zu Beginn der Vorlesung, Abholung um 8:20 Uhr.

1. Man bezeichne mit $\mathbb{F}_2$ den Körper mit zwei Elementen. In welchen der folgenden Beispiele (a)–(h) von Teilmengen $V \subseteq \mathbb{R}^3$ bzw. $V \subseteq \mathbb{F}_2^4$ gilt, dass V ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{F}_2^4$ ist? Prüfen Sie in jedem Fall entweder die Axiome oder finden Sie ein Gegenbeispiel zu einem der Axiome.

   (a) $V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - 3y + 2z = 0 \text{ und } x + y - z = 0\}$.

   (b) $V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z = 1\}$.

   (c) $V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x + 2y + z)^2 = 0\}$.

   (d) $V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x + 2y + z)^2 - 2xy = 0\}$.

   (e) $V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = n,\ y = 2n,\ z = 3n, \text{ mit } n \in \mathbb{Z}\}$.

   (f) $V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = 0 \text{ oder } y = 0 \text{ oder } z = 0\}$.

   (g) $V := \{(0,0,0,0), (1,1,0,0), (0,1,0,1), (1,0,0,1)\} \subseteq \mathbb{F}_2^4$.

   (h) $V := \{(x,y,z,w) \in \mathbb{F}_2^4 \,|\, z^3 = 0 \text{ und } x^3 + y^3 + w^3 = 0\}$.

   (8 Punkte)

2. Welche der folgenden Mengen V mit den entsprechenden Verknüpfungen der Addition $+ : V \times V \to V$ und Multiplikation $\cdot : K \times V \to V$ mit Elementen eines Körpers K (Skalare) sind K-Vektorräume? Begründen Sie mit Beweis oder zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass ein Axiom verletzt wird.

   (a) Für M eine Menge sei $V := \mathrm{Abb}(M, \mathbb{R})$ mit „punktweiser Addition und Skalarmultiplikation" über $K = \mathbb{R}$, d. h.

   $$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x) && \text{für alle } f, g \in V,\ x \in M \\ (\lambda \cdot f)(x) &:= \lambda \cdot f(x) && \text{für alle } f \in V, \lambda \in \mathbb{R},\ x \in M. \end{aligned}$$

   (b) Sei $K = \mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen und $V = \mathbb{Z}$ mit der üblichen Addition als Addition und mit der Skalarmultiplikation definiert durch $0 \cdot z = 0$ und $1 \cdot z = z$ für alle $z \in \mathbb{Z}$.

   (6 Punkte)

3. Sei K ein Körper, seien V und W zwei K-Vektorräume und sei $\Psi : V \to W$ eine lineare Bijektion von K-Vektorräumen (ein Isomorphismus von K-Vektorräumen). Zeigen Sie, dass die Umkehrabbildung Ψ^{-1} auch linear ist.

   (6 Punkte)

4. Sei $M = \{a, b, c\}$. Die Abbildung Ψ sei durch

   $$\begin{aligned} \Psi : \mathrm{Abb}(M, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f &\longmapsto \big(f(a), f(b), f(c)\big) \end{aligned}$$

   definiert.

(a) Zeigen Sie, dass Ψ eine lineare Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie, dass Ψ bijektiv ist.

(6 Punkte)

5. Für $\lambda \in U(1) \subseteq \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$ sei $\varphi_{\lambda,a} \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $z \mapsto \lambda z + a$ (in der Gaußschen Zahlenebene ist dies geometrisch eine Drehung gefolgt von einer Verschiebung).

   Sei $G := \{\varphi_{\lambda,a} \mid \lambda \in U(1), a \in \mathbb{C}\}$ die Menge all dieser Abbildungen.

   (a) Zeigen Sie: Mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen als Verknüpfung wird G zu einer Gruppe.

   (b) Sei $H := \{\varphi_{1,a} \mid a \in \mathbb{C}\}$. Zeigen Sie, dass H eine Untergruppe von G ist. Geben Sie einen Gruppenhomomorphismus f von G nach $U(1)$ an, der H als Kern hat. Wie lässt sich f geometrisch interpretieren?

   (6 Punkte)

Die folgende Aufgabe ist eine *-Aufgabe. Sie kann, muss aber nicht eingereicht werden. Die Punkte zählen nicht zu den Übungspunkten, sondern werden als Extrapunkte vermerkt.

*6. Man betrachte das gleiche G wie in Aufgabe 4. Sei

$$H' := \{\varphi_{\lambda,0} \mid \lambda \in U(1)\} \subseteq G.$$

Zeigen Sie, dass H' eine Untergruppe von G ist. Man könnte erwarten, dass es analog zu 5(b) einen Homomorphismus f' von G nach $\mathbb{C}$ gibt, der H' als Kern hat. Zeigen Sie, dass das nicht stimmt. Genauer: Beweisen Sie, dass es keinen Homomorphismus von G (in irgendeine andere Gruppe G') geben kann, der H' als Kern hat. *(8 Punkte)*