Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Michel van Garrel

6. Übungsblatt

Abgabetermin: Mi, 29.11.17, zu Beginn der Vorlesung, Abholung um 8:20 Uhr.

1. Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $\lambda + i\mu$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\frac{(1+2i)\,(1-i)}{(1+i)^2}, \quad \frac{|2+i|\,(1-3i)}{\overline{(1+i)}}, \quad (1+i)^8 \text{ und } \sum_{\nu=0}^{13247} i^\nu.$$

(6 Punkte)

2. (a) Sei $z = \lambda + i\mu \in \mathbb{C}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:
   (1) $\overline{\overline{z}} = z$ und $z\,\overline{z} = \lambda^2 + \mu^2$.
   (2) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ und $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.
   (3) $-|z| \le \mathrm{Re}(z) \le |z|$ und $-|z| \le \mathrm{Im}(z) \le |z|$.

   (b) Skizzieren Sie (mit Begründung) in der Gaußschen Zahlenebene die folgenden Mengen:

$$A_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z = |z|\}, \quad A_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z = -|z|\},$$
$$A_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z = |z|\}, \quad A_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z = -|z|\}.$$

   (c) Es seien $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$, sodass

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = 0$$

   gilt. Zeigen Sie, dass dann auch

$$a_0 + a_1 \overline{z} + a_2 \overline{z}^2 + \cdots + a_n \overline{z}^n = 0$$

   gilt.

(8 Punkte)

3. Skizzieren Sie (mit Begründung) in der Gaußschen Zahlenebene die Menge derjenigen $z \in \mathbb{C}$, für die gilt:
   (a) $0 < \mathrm{Re}(e^{i\frac{\pi}{4}} z) < 1$.
   (b) $|z| = \mathrm{Re}(z) + 1$.
   (c) $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z-i}{z-1}\right) = 0$.
   (d) $\left|\dfrac{z-i}{z-1}\right| = 1$.

(10 Punkte)

4. Sei L ein Körper und $K \subseteq L$ ein Unterkörper. Das bedeutet, dass K eine Untergruppe von L bezüglich der Addition ist und dass $K \setminus \{0\}$ eine Untergruppe von $L \setminus \{0\}$ bezüglich der Multiplikation ist. Ein (Körper-) Isomorphismus $f : L \to L$ wird auch *Automorphismus von* L genannt. Ein Automorphismus f von L mit $f(x) = x$ für alle $x \in K$ heißt *Automorphismus von* L *über* K.

(a) Man betrachte auf $\mathbb{C}$ die Abbildung

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \overline{z}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass τ ein Automorphismus von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathrm{Aut}(L/K) = \big\{ f : L \to L \text{ Automorphismus von } L \text{ über K} \big\}$$

mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung eine Gruppe ist.

(8 Punkte)

Die folgende Aufgabe ist eine *-Aufgabe. Sie kann, muss aber nicht eingereicht werden. Die Punkte zählen nicht zu den Übungspunkten, sondern werden als Extrapunkte vermerkt.

5. (a) Beweisen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ isomorph zur Gruppe $\mathbb{Z}/2$ ist.

   (b) Man betrachte den Körper $\mathbb{Q}[\sqrt{8}]$ von Blatt 4, Aufgabe 2. Es gilt nach Konstruktion, dass $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{8}]$ ein Unterkörper ist. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}[\sqrt{8}]/\mathbb{Q})$ isomorph zu $\mathbb{Z}/2$ ist.

(8 Punkte)