Lineare Algebra und Analytische Geometrie
WiSe 2017/2018

Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Michel van Garrel

5. Übungsblatt

Abgabetermin: Mi, 22.11.17, zu Beginn der Vorlesung, Abholung um 8:20 Uhr.

1. (Vgl. Bröcker, Aufg. I.2) Welche der folgenden Mengen G werden mit der Verknüpfung $*$ zu einer Gruppe? Was ist ggf. das neutrale Element?

   (a) $G = \mathbb{R}$, $x * y = x + y + 3$.

   (b) $G = \mathbb{R}$, $x * y = 3x + 4y$.

   (c) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\}$, $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$.

   (d) $G = \mathbb{Z} \times S_{42}$, $(a, \sigma) * (b, \tau) = (a + b, \sigma \circ \tau)$.

   (8 Punkte)

2. Es seien $\sigma, \tau \in S_3$ die folgenden Permutationen:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \ \tau := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass $S_3 = \{e, \sigma, \sigma^2, \tau, \tau \circ \sigma, \tau \circ \sigma^2\}$.

   (b) Bestimmen Sie alle Gruppenhomomorphismen $\mathbb{Z}/2 \to S_3$, bzw. $S_3 \to \mathbb{Z}/2$.

   (8 Punkte)

3. (a) Sei $(G, *, e)$ eine Gruppe mit der Eigenschaft, dass für jedes $g \in G$, $g * g = e$ gilt. Zeigen Sie, dass G abelsch ist. Hinweis: Es bedarf nicht mehr als zwei Zeilen.

   (b) Ist eine Gruppe mit 2 Elementen notwendigerweise abelsch? Gilt das gleiche für eine Gruppe mit 3 Elementen? Begründen Sie.

   (8 Punkte)

4. Es gibt einen Körper $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, a, b\}$ mit vier Elementen. (Dessen Existenz wird hier ohne Beweis angenommen.) Die Addition und die Multiplikation werden festgelegt durch:

$$\begin{aligned} 0 + x &= x \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{F}_4 \\ 1 \cdot x &= x \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{F}_4 \setminus \{0\} \\ 1 + 1 &= 0 \\ a + 1 &= b \\ a \cdot a &= b. \end{aligned}$$

   (a) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke in $\mathbb{F}_4$: (Welche Körperaxiome wurden verwendet?)

$$a + a, \qquad a^5, \qquad b \cdot (b + 1)^{-1}.$$

   (b) Zeigen Sie, dass für $x, y \in \mathbb{F}_4$ die „vereinfachte binomische Formel" gilt:

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2.$$

   (8 Punkte)

Die folgende Aufgabe ist eine *-Aufgabe. Sie kann, muss aber nicht eingereicht werden. Die Punkte zählen nicht zu den Übungspunkten, sondern werden als Extrapunkte vermerkt.

*5. Eine Teilmenge $H \subseteq G$ heißt Untergruppe einer Gruppe G, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) $e \in H$,

(2) $x, y \in H \Rightarrow xy \in H$,

(3) $x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$.

Sei G eine Gruppe und $g \in G$. Man betrachte die Menge

$$\langle g \rangle := \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\langle g \rangle$ eine Untergruppe von G ist.

(b) Ist $\langle g \rangle$ abelsch? Begründen Sie.

(c) Zeigen Sie, dass $\langle g \rangle$ isomorph ist zu entweder $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/m$ für $m \geq 1$. Wenn $m = 1$, was lässt sich über g schliessen?

(8 Punkte)