

3. Übungsblatt

Abgabetermin: Mi, 08.11.17, zu Beginn der Vorlesung, Abholung um 8:20 Uhr.

1. Welche der folgenden Relationen auf der Menge der Menschen sind Äquivalenzrelationen? (Begründung!) Bei denen, die keine Äquivalenzrelationen sind: Welches Axiom ist verletzt?

- (a) $x \diamond y$ genau dann, wenn x und y sich kennen.
- (b) $x \smile y$ genau dann, wenn x und y dieselbe Person ist oder wenn beide eine Katze besitzen.
- (c) $x \succ y$ genau dann, wenn x mindestens so oft in der Mensa gegessen hat wie y .

(6 Punkte)

2. (a) Sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung. Man betrachte die Relation

$$R_f := \{(x, y) \in M \times M \mid f(x) = f(y)\}.$$

Zeigen Sie, dass R_f eine Äquivalenzrelation ist.

- (b) Sei P eine Partition einer nichtleeren Menge M . Die durch P induzierte Relation ist definiert als

$$R_P := \{(x, y) \mid \exists A \in P : \{x, y\} \subset A\}.$$

Zeigen Sie, dass R_P eine Äquivalenzrelation ist.

- (c) Sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung. Finden Sie eine Partition P von M , so dass $R_f = R_P$ gilt. Die Elemente von P werden auch die *Fasern* von f genannt.

(6 Punkte)

3. Eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M kann auf drei verschiedene Weisen beschrieben werden:

- (1) durch eine Teilmenge $R \subset M \times M$,
- (2) durch eine Partition $P \subset \mathcal{P}(M)$ von M ,
- (3) durch eine surjektive Abbildung $q : M \rightarrow N$ (siehe Aufgabe 2).

Bestimmen Sie für die folgenden Äquivalenzrelationen die beiden fehlenden Beschreibungen:

- (a) $M := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und

$$R := \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,2), (2,1), (1,4), (4,1), \\ (1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (2,5), (5,2), (4,5), (5,4) \end{array} \right\}.$$

- (b) $M := \mathbb{Z}$ und $P := \{M_0, M_1, M_2, M_3\}$, wobei M_i für $i = 0, 1, 2, 3$ wie folgt definiert ist:

$$M_i := \{4 \cdot k + i \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

(8 Punkte)

4. Sei M eine Menge und $N \subset M$. Für $A, B \in \mathcal{P}(M)$ sei

$$A \sim B \iff (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset N.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}(M)$ definiert und bestimmen Sie die Äquivalenzklasse der leeren Menge $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$. (6 Punkte)

5. Sei R eine Äquivalenzrelation auf der nichtleeren Menge M .

- (a) Zeigen Sie, dass durch

$$(x, y) \sim_S (u, v) \iff (x \sim_R u) \wedge (y \sim_R v)$$

eine Äquivalenzrelation S auf $M \times M$ definiert wird.

- (b) Zeigen Sie, dass für die Äquivalenzklassen gilt:

$$[(x, y)]_S = [x]_R \times [y]_R := \{(u, v) \in M \times M \mid u \in [x]_R, v \in [y]_R\}.$$

- (c) Sei P_R die von R induzierte Partition von M . Beschreiben Sie die Partition P_S als Teilmenge von $\mathcal{P}(M \times M)$ in Abhängigkeit von P_R . (6 Punkte)