Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Michel van Garrel

25. Übungsblatt

Abgabetermin: Mi, 27.06.18, zu Beginn der Vorlesung, Abholung um 8:20 Uhr.

Die erste Aufgabe ist eine S-Aufgabe. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, eine stilistisch perfekte Lösung aufzuschreiben. Die Hälfte der Punkte wird für die Darstellung vergeben.

1.[S] Betrachte den euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^n, \langle -,- \rangle_E)$. Seien $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $D = (\delta_{ij}\mu_i)_{i,j=1,\ldots,n} \in M(n, \mathbb{R})$ die zugehörige Diagonalmatrix.

   (a) Zeigen Sie: D ist positiv semidefinit.

   (b) Sei $S \in M(n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie: $S^t DS$ ist positiv semidefinit.

   (c) Sei $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}^n$ eine Orthonormalbasis für $(\mathbb{R}^n, \langle -,- \rangle_E)$ und $P \in M(n, \mathbb{R})$ die eindeutige Matrix mit $P \cdot w_i = \mu_i \cdot w_i$. Dann gibt es $S \in \mathrm{O}(n)$ mit $P = S^t DS$. Schließen Sie, dass P positiv semidefinit ist (wie im Beweis von Satz 22.9 behauptet). Hinweis: S hängt eng mit $w_1, \ldots, w_n$ zusammen.

   (12 Punkte)

2. Sei V ein endlich-dimensionaler unitärer $\mathbb{C}$-Vektorraum.

   (a) Sei $H \in \mathrm{End}(V)$ hermitisch. Zeigen Sie, dass $E + iH$ invertierbar ist. Hinweis: Verwenden Sie, dass H unitär diagonalisierbar ist und reelle Eigenwerte hat.

   (b) Sei H wie in (a). Setze $U := (E + iH)^{-1} \cdot (E - iH)$. Zeigen Sie, dass U unitär ist.

   Anmerkung: U heißt *Cayley-Transformierte* von H; die Abbildung $H \mapsto U$ induziert eine Bijektion zwischen der Menge der hermiteschen Matrizen und der Menge der unitären Matrizen mit allen Eigenwerten ungleich 1.

   (10 Punkte)

3. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Wir können V auch als $\mathbb{R}$-Vektorraum auffassen. Eine Bilinearform γ auf V als $\mathbb{R}$-Vektorraum (kurz: $\mathbb{R}$-Bilinearform) heiße *i-invariant*, wenn für alle $v, w \in V$ gilt: $\gamma(v, w) = \gamma(iv, iw)$. Hier ist $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit.

   Ist nun $\gamma : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine $\mathbb{R}$-Bilinearform auf V, so definieren wir eine Abbildung $h_\gamma : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ durch

$$h_\gamma(v, w) := \gamma(v, w) + i\gamma(v, iw).$$

   Zeigen Sie: Die Zuordnung $\gamma \to h_\gamma$ liefert eine Bijektion zwischen den i-invarianten Skalarprodukten auf V (als $\mathbb{R}$-Vektorraum) und den unitären Skalarprodukten auf V (als $\mathbb{C}$-Vektorraum).

   (10 Punkte)

Die folgende Aufgabe ist eine *-Aufgabe. Sie kann, muss aber nicht eingereicht werden. Die Punkte zählen nicht zu den Übungspunkten, sondern werden als Extrapunkte vermerkt.

*4. Es gibt einen Gruppenhomomorphismus $\mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{O}(3)$, der einen Isomorphismus

$$\mathrm{SU}(2)/\left\{E, -E\right\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{SO}(3)$$

induziert. In dieser Aufgabe soll dieser Gruppenhomomorphismus konstruiert werden.

(a) Seien

$$\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathrm{M}(2, \mathbb{C}),$$

$$I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \; J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } K := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

wie in der Vorlesung. Sei

$$U := \mathbb{R} \cdot I + \mathbb{R} \cdot J + \mathbb{R} \cdot K \subseteq \mathbb{H}$$

der Untervektorraum der „rein imaginären" Quaternionen. Zeigen Sie: Für $A \in \mathbb{H}$ gilt:

$$A \in U \iff {}^{*}A = -A.$$

(b) Zeigen Sie: Für $T \in \mathrm{SU}(2)$ ist

$$\varphi_T \colon U \longrightarrow U, \quad A \longmapsto TAT^{-1}$$

eine wohldefinierte lineare Abbildung.

(c) Durch das Skalarprodukt

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & -\bar{b'} \\ b' & \bar{a'} \end{pmatrix} \right\rangle := \mathrm{Re}\left(a\bar{a'} + b\bar{b'}\right)$$

wird $\mathbb{H}$ zu einem euklidischen Vektorraum. Zeigen Sie: φ_T bildet die Einheitskugel von U in sich ab. Hinweis: $\|A\|^2 = \det A$ für $A \in \mathbb{H}$.

(d) Durch Identifikation von U mit $\mathbb{R}^3$ erhält man eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{SU}(2) &\longrightarrow \mathrm{O}(3) \\ T &\longmapsto \varphi_T. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Diese Abbildung ist ein Gruppenhomomorphismus.

Nun muss man nur noch zeigen, dass die Abbildung in (d) einen Gruppenisomorphismus $\mathrm{SU}(2)/\left\{E, -E\right\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{SO}(3)$ induziert. Dies sei hier erspart. *(8 Punkte)*