

23. Übungsblatt

Abgabetermin: Mi, 13.06.18, zu Beginn der Vorlesung, Abholung um 8:20 Uhr.

Die erste Aufgabe ist eine *S*-Aufgabe. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, eine stilistisch perfekte Lösung aufzuschreiben. Die Hälfte der Punkte wird für die Darstellung vergeben.

- 1.^S Sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Raum und seien $v_1, \dots, v_n \in V$. Die Matrix $A \in M(n, \mathbb{R})$ mit Einträgen $a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ heißt *Gramsche Matrix von $v_1, \dots, v_n$* . Zeigen Sie: Die Determinante $\det(A)$ der Gramschen Matrix verschwindet genau dann, wenn $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig sind. (6 Punkte)

2. Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie: Die oberen Dreiecksmatrizen mit positiver Diagonale

$$Q(n) := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \mid \lambda_i > 0 \text{ für } i = 1, \dots, n \right\} \subseteq \text{GL}(n, \mathbb{R}).$$

bilden eine Untergruppe, und die Abbildung

$$Q(n) \times O(n) \longrightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R}), \quad (A, B) \longmapsto A \cdot B$$

ist bijektiv. (8 Punkte)

3. (a) Sei $L \in \text{SO}(3) \setminus \{E\}$. Ein eindimensionaler Vektorraum $\mathbb{R} \cdot v$ heißt *Drehachse von L* , wenn $Lv = v$. Zeigen Sie, dass die Drehachse von L eindeutig bestimmt ist.
- (b) Seien $L_1, L_2 \in \text{SO}(3) \setminus \{E\}$. Zeigen Sie: $L_1 L_2 = L_2 L_1$ gilt genau dann, wenn die Drehachsen von L_1 und L_2 gleich sind oder wenn die Drehachsen orthogonal sind und beide Drehungen Halbdrehungen sind.

Dabei nennen wir $L \in \text{SO}(3)$ eine *Halbdrehung* wenn L diagonalisierbar ist und als Eigenwerte einmal 1 und zweimal -1 hat. (8 Punkte)

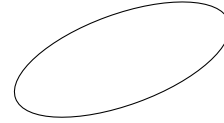
4. Eine Ellipse ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ der Form $\{v \in \mathbb{R}^2 \mid q(v) = 1\}$ wobei q eine positive quadratische Form ist, das heißt

$$q(v) = v^t A v = \langle v, A v \rangle_E = \langle A v, v \rangle_E$$

für eine positiv definite Matrix $A = A^t \in M(2, \mathbb{R})$.

- (a) Anschaulich stellt man sich unter einer Ellipse einen verzerrten Kreis vor, also

$$\{T((\sin t, \cos t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$$



für $T \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass diese Definitionen äquivalent sind.

- (b) Sei v ein Eigenvektor von A . Zeigen Sie: Die durch q definierte Ellipse ist symmetrisch bezüglich der Spiegelachse $L(v)^\perp$.
- (c) Zeigen Sie die Rückrichtung von (b): Wenn die Ellipse symmetrisch bezüglich einer Spiegelachse $L(v)^\perp$ für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist, ist v ein Eigenvektor von A .

(10 Punkte)

Die folgende Aufgabe ist eine *-Aufgabe. Sie kann, muss aber nicht eingereicht werden. Die Punkte zählen nicht zu den Übungspunkten, sondern werden als Extrapunkte vermerkt.

- *5. Sei $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ und sei $A^k \in \text{O}(n)$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: A ist zu einem Element aus $\text{O}(n)$ konjugiert.

Hinweis: Sei

$$\gamma(v, w) := \langle v, w \rangle + \langle A v, A w \rangle + \cdots + \langle A^{k-1} v, A^{k-1} w \rangle.$$

Zeigen Sie, dass γ positiv definit ist und $\gamma(v, w) = \gamma(A v, A w)$. Benutzen Sie dann den Satz über die Existenz orthonormaler Basen.

(8 Punkte)