Lineare Algebra und Analytische Geometrie
SoSe 2017/2018

Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Michel van Garrel

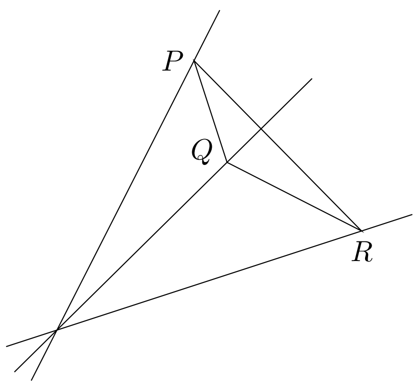
22. Übungsblatt

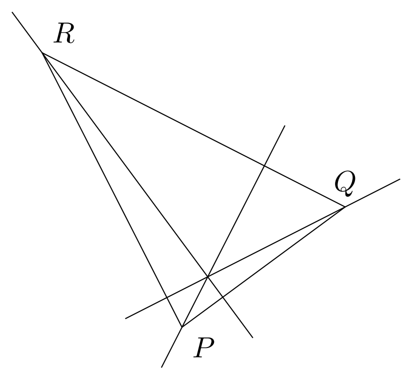
Abgabetermin: Mi, 06.06.18, zu Beginn der Vorlesung, Abholung um 8:20 Uhr.

Die erste Aufgabe ist eine S-Aufgabe. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, eine stilistisch perfekte Lösung aufzuschreiben. Die Hälfte der Punkte wird für die Darstellung vergeben.

Eine *Gerade* G im Vektorraum V ist ein affiner Unterraum der Dimension 1, d.h. es gibt $v \in V$, so dass $v + G$ ein eindimensionaler Unterraum von V ist.

1.^{S} Sei Δ das Dreieck im euklidischen Raum $(\mathbb{R}^2, \langle\text{-},\text{-}\rangle_E)$ mit Eckpunkten P, Q, R. Eine Höhe in Δ ist eine Gerade, die einen Eckpunkt von Δ enthält und orthogonal zur gegenüberliegende Seite von Δ ist. Zeigen sie, dass sich die Höhen von Δ in einem Punkt schneiden.





(8 Punkte)

2. Seien P, Q zwei Punkte im euklidischen Raum $(\mathbb{R}^2, \langle\text{-},\text{-}\rangle_E)$. Sei

$$G := \left\{ R \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; ||P - R|| = ||Q - R|| \right\}$$

und sei $O := P + \frac{1}{2}(Q - P)$. Zeigen Sie:

$$R \in G \iff \big\langle R - O, P - Q \big\rangle_E = 0.$$

Schließen Sie daraus, dass G eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ ist. *(8 Punkte)*

3. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in M(3, \mathbb{Q}).$$

Finden Sie eine obere Dreiecksmatrix $T \in M(3, \mathbb{Q})$, so dass $A = T^t \cdot T$. *(8 Punkte)*

4. *Legendre Polynome:* Sei $U \subseteq \mathbb{R}[X]$ der von $1, X, X^2, X^3$ erzeugte Unterraum. Sei $\langle$-,-$\rangle$ das durch

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$$

definierte Skalarprodukt auf U. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U, indem Sie das Gram-Schmidtsche Orthonormierungsverfahren auf die Basis $(1, X, X^2, X^3)$ anwenden.

(8 Punkte)

Die folgende Aufgabe ist eine *-Aufgabe. Sie kann, muss aber nicht eingereicht werden. Die Punkte zählen nicht zu den Übungspunkten, sondern werden als Extrapunkte vermerkt.

*5. Sei q eine quadratische Form auf $\mathbb{R}^3$ und γ die zugehörige symmetrische Bilinearform.

(a) Zeigen Sie: Wenn q auf einem zweidimensionalen Untervektorraum U von $\mathbb{R}^3$ verschwindet, ist γ entartet.

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine quadratische Form q auf $\mathbb{R}^3$ an, die auf einem eindimensionalen Unterraum verschwindet, bei der die zugehörige Bilinearform jedoch nicht-entartet ist.

(8 Punkte)