Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Michel van Garrel

21. Übungsblatt

Abgabetermin: Mi, 30.05.18, zu Beginn der Vorlesung, Abholung um 8:20 Uhr.

Die erste Aufgabe ist eine S-Aufgabe. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, eine stilistisch perfekte Lösung aufzuschreiben. Die Hälfte der Punkte wird für die Darstellung vergeben.

1.[S] Erinnerung: Die *Spur* einer $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ ist die Summe ihrer Diagonaleinträge: $\mathrm{Spur}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\begin{aligned} M(n,\mathbb{R}) \times M(n,\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (A,B) &\longmapsto \mathrm{Spur}(A \cdot B) \end{aligned}$$

ist eine symmetrische, nicht-entartete Bilinearform auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $M(n,\mathbb{R})$.

(6 Punkte)

2. Die Bilinearform $\gamma\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei bezüglich der Standardbasis durch die Fundamentalmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Geben Sie die Matrix der zugehörigen Abbildung

$$\Phi_\gamma\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \left(\mathbb{R}^2\right)^*$$

bezüglich der Basis $v_1 = (2,3)$, $v_2 = (0,-2)$ und der dualen Basis (v_1^*, v_2^*) an.

(6 Punkte)

3. Sei $q : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ die durch

$$q = (1-4i)X_1^2 + X_2^2 + (1-2i)X_3^2 + 4X_1X_2 + (2-6i)X_1X_3 + 2X_2X_3$$

definierte quadratische Form.

(a) Bestimmen Sie die symmetrische Bilinearform $\gamma \in \mathrm{Bil}(\mathbb{C}^3)$ mit $q(u) = \gamma(u,u)$.

(b) Bestimmen Sie $T = (t_{ij}) \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$, so dass

$$q\left(\sum_{j=1}^3 t_{1j}Y_j, \sum_{j=1}^3 t_{2j}Y_j, \sum_{j=1}^3 t_{3j}Y_j\right) = Y_2^2 + Y_3^2.$$

Hinweis: Benutzen Sie das Verfahren aus Satz 19.4.

(10 Punkte)

4. Seien $r, s, k \in \mathbb{N}$, mit $n := r + s + k \geq 1$. Sei $\gamma \in \mathrm{Bil}(\mathbb{R}^n)$ mit Fundamentalmatrix

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 & 0 \\ 0 & -E_s & 0 \\ 0 & 0 & 0_k \end{pmatrix} \in M(n, \mathbb{R}),$$

wobei $0_k \in M(k, \mathbb{R})$ die Nullmatrix ist. Seien $l := \min\{r, s\}$, $m := \max\{r, s\} - l$.

(a) Zeigen Sie, dass $r + s = 2l + m$.

(b) Geben Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^n$ an, so dass die Fundamentalmatrix von γ bezüglich $\mathcal{B}$ die Form

$$\begin{pmatrix} 0 & E_l & 0 & 0 \\ E_l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0_k \end{pmatrix}$$

hat.

(c) Geben Sie eine Basis $\mathcal{B}'$ von $\mathbb{R}^n$ an, so dass die Fundamentalmatrix von γ bezüglich $\mathcal{B}'$ die Form

$$\begin{pmatrix} H & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0_k \end{pmatrix}$$

hat, wobei $H := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ l-mal vorkommt.

(10 Punkte)

Die folgende Aufgabe ist eine *-Aufgabe. Sie kann, muss aber nicht eingereicht werden. Die Punkte zählen nicht zu den Übungspunkten, sondern werden als Extrapunkte vermerkt.

*5. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei $\gamma : V \times V \to K$ eine Bilinearform auf V mit der folgenden Eigenschaft:

$$\forall v, w \in V \ : \ \Big(\gamma(v, w) = 0 \Longrightarrow \gamma(w, v) = 0\Big).$$

Zeigen Sie, dass γ symmetrisch oder alternierend ist. (Erinnerung: Eine Bilinearform γ heißt alternierend, wenn für alle $v, w \in V$ gilt: $\gamma(v, w) = -\gamma(w, v)$.) *(8 Punkte)*