Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Michel van Garrel

20. Übungsblatt

Abgabetermin: Mi, 16.05.18, zu Beginn der Vorlesung, Abholung um 8:20 Uhr.

Die erste Aufgabe ist eine S-Aufgabe. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, eine stilistisch perfekte Lösung aufzuschreiben. Die Hälfte der Punkte wird für die Darstellung vergeben.

1.[S] Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Sei weiterhin $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ mit Minimalpolynom p_φ und charakteristischem Polynom χ_φ. Zeigen Sie: p_φ und χ_φ haben dieselben Nullstellen. *(6 Punkte)*

2. Sei K ein Körper, $n \geq 1$ und $A = (a_{ij}) \in M(n, K)$, sodass

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Zeigen Sie, dass 1 ein Eigenwert von A ist. *(4 Punkte)*

3. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $A = (a_{ij}) \in M(n, K)$. Sei

$$\chi_A = T^n - c_1 T^{n-1} + \cdots + (-1)^n c_n \in K[T]$$

das characteristische Polynom von A. Beweisen Sie:

$$c_1 = \mathrm{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

(6 Punkte)

4. Wir betrachten die lineare Abbildung $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ gegeben durch die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -16 & 29 & -6 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 48 & -105 & 18 & -6 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es darf angenommen werden, dass $\chi_\varphi = T^4 + T^3 - 6T^2$ und dass φ diagonalisierbar ist.

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom p_φ von φ. Hinweis: Es bedarf keiner elaborierten Rechnung.

(b) Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^4$, sodass $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\varphi)$ diagonal ist.

(8 Punkte)

5. Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\gamma : V \times V \to K$ eine nichtentartete symmetrische Bilinearform auf V. Man bezeichne mit Φ_γ die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi_\gamma : V &\longrightarrow V^* \\ v &\longmapsto (w \mapsto \gamma(v,w)) \end{aligned}$$

(vgl. §18.5 der Vorlesung).

Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Wir bezeichnen mit

$$U^\perp := \{v \in V \,\big|\, \forall w \in U : \gamma(v,w) = 0\}$$

den Orthogonalraum (bezüglich γ) zu U. Beweisen Sie:

(a) $\Phi_\gamma(U^\perp) = U^\circ$.

(b) $Z(\Phi_\gamma(U)) = U^\perp$.

(8 Punkte)

Die folgende Aufgabe ist eine *-Aufgabe. Sie kann, muss aber nicht eingereicht werden. Die Punkte zählen nicht zu den Übungspunkten, sondern werden als Extrapunkte vermerkt.

*6. Die Fibonacci-Folge $(F_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \operatorname{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ ist durch die folgenden rekursiven Formeln gegeben:

$$\begin{aligned} F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \\ F_{k+2} = F_{k+1} + F_k, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1}$$

Definiert man nun

$$u_k := \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N},$$

und

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

so läßt sich (1) umschreiben als

$$u_{k+1} = A \cdot u_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

und damit $u_k = A^k u_0$.

(a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

(b) Geben Sie die Fibonaccizahl F_k, $k \in \mathbb{N}$, in der Form $\lambda \cdot \alpha^k + \mu \cdot \beta^k$ an, mit $\lambda, \mu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(8 Punkte)