Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Michel van Garrel

18. Übungsblatt

Abgabetermin: Mi, 02.05.18, zu Beginn der Vorlesung, Abholung um 8:20 Uhr.

Die erste Aufgabe ist eine S-Aufgabe. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, eine stilistisch perfekte Lösung aufzuschreiben. Die Hälfte der Punkte wird für die Darstellung vergeben.

1.[S] Sei $f = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Q}[T]$ und sei $\alpha \in \mathbb{Q}$ eine Wurzel von f. Wir nehmen weiterhin an, dass $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie: $\alpha \in \mathbb{Z}$ und wenn $a_0 \neq 0$, dann $\alpha | a_0$. (Sie dürfen das Analogon des Euklidischen Lemmas, §16.9 Korollar 2 der Vorlesung, in $\mathbb{Z}$ benutzen.) *(8 Punkte)*

2. Seien $g := T^2 - 2T + 1$, $h := T + 1 \in \mathbb{R}[T]$. Bestimmen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus' $p, q \in \mathbb{R}[T]$, so dass

$$1 = p \cdot g + q \cdot h.$$

(8 Punkte)

3. Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Seien $A, B \in M(n, K)$. Zeigen Sie, dass es ein Polynom $f \in K[T]$ mit $\deg(f) \leq n$ gibt mit der Eigenschaft:

$$\forall t \in K \ : \ f(t) = \det(A + tB).$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten von T^n und T^0 von f. *(8 Punkte)*

4. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, und seien $a_1, \dots, a_n \in K$ paarweise verschieden. Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Hinweis: Der Beweis funktioniert mit Hilfe einer Induktion. Tipp für den Induktionsschritt: Substrahieren Sie jeweils das a_1-fache der j-ten Spalte von der $(j+1)$-ten Spalte. *(8 Punkte)*

Die folgende Aufgabe ist eine *-Aufgabe. Sie kann, muss aber nicht eingereicht werden. Die Punkte zählen nicht zu den Übungspunkten, sondern werden als Extrapunkte vermerkt.

*5. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung, so dass $\varphi^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: $\varphi^n = 0$. *(8 Punkte)*