17. Übungsblatt

Abgabetermin: Mi, 25.04.18, zu Beginn der Vorlesung, Abholung um 8:20 Uhr.

Die erste Aufgabe ist eine *S*-Aufgabe. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, eine stilistisch perfekte Lösung aufzuschreiben. Die Hälfte der Punkte wird für die Darstellung vergeben.

1.^S Sei $\sigma \in S_n$. Die *Ordnung* $\text{ord}(\sigma)$ von σ ist die kleinste natürliche Zahl k mit $\sigma^k = e$. Hinweis: Für die Formulierung der Lösung eignet sich die Zykelschreibweise **schlecht**.

- (a) Zeigen Sie: $\text{ord}(\sigma)$ ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Zykellängen von σ .
- (b) Zeigen Sie: Wenn $\text{ord}(\sigma)$ ungerade ist, ist $\text{sgn}(\sigma) = 1$.
- (c) Wenn $\text{ord}(\sigma)$ gerade ist, gilt dass $\text{sgn}(\sigma) = -1$? (Beweisen Sie es oder bestimmen Sie ein Gegenbeispiel.)

(8 Punkte)

2. Sei $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 7 & 5 & 1 & 3 & 6 & 2 & 10 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

- (a) Schreiben Sie σ und σ^{-1} in Zykelschreibweise.
- (b) Schreiben Sie σ und σ^{-1} als Produkt von Transpositionen.
- (c) Bestimmen Sie die Ordnung und das Signum von σ und σ^{-1} .

(8 Punkte)

3. (a) Sei A eine $m \times m$ -Matrix und D eine $n \times n$ -Matrix. Sei

$$M := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

die aus diesen „Blöcken“ zusammengesetzte Matrix. Zeigen Sie, dass $\det M = \det A \cdot \det D$.

(b) Sei A eine $m \times m$ -Matrix, B eine $m \times n$ -Matrix und D eine $n \times n$ -Matrix. Sei

$$M := \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\det M = \det A \cdot \det D$.

(c) Seien A, B, C, D $n \times n$ -Matrizen, und sei

$$M := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Gilt stets $\det M = \det A \cdot \det D - \det B \cdot \det C$?

(8 Punkte)

4. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M(4, \mathbb{R}).$$

Berechnen Sie $\det(A)$ mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes durch Entwicklung nach der 2-ten Spalte. Bestimmen Sie, falls möglich, die Inverse von A mit Hilfe der Adjunkten.

(8 Punkte)

Die folgende Aufgabe ist eine *-Aufgabe. Sie kann, muss aber nicht eingereicht werden. Die Punkte zählen nicht zu den Übungspunkten, sondern werden als Extrapunkte vermerkt.

*5. Sei K ein Körper, seien $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und sei $A \in M(p \times q, K)$. Für $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ heißt

$$B = (b_{\mu\nu})_{\mu,\nu} \in M(r, K)$$

eine $r \times r$ -Untermatrix von A , wenn durch Streichen von $p - r$ Zeilen und $q - r$ Spalten aus A besteht. Formal heißt dies, dass $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_r \in \mathbb{N}$, existieren mit $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq p$, $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq q$ und

$$\forall \mu, \nu : b_{\mu\nu} = a_{i_\mu j_\nu}.$$

Betrachte die (möglicherweise leere) Teilmenge $R(A) \subseteq \{1, \dots, \max(p, q)\}$ mit

$$R(A) := \{r \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid \text{es gibt eine } r \times r \text{ Untermatrix } B \text{ von } A \text{ mit } \det(B) \neq 0\},$$

und es sei

$$k(A) := \max(\{0\} \cup R(A)).$$

Zeigen Sie: $k(A) = \text{rk}(A)$.

(8 Punkte)