16. Übungsblatt

Abgabetermin: Mi, 18.04.18, zu Beginn der Vorlesung, Abholung um 8:20 Uhr.

Die erste Aufgabe ist eine S -Aufgabe. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, eine stilistisch perfekte Lösung aufzuschreiben. Die Hälfte der Punkte wird für die Darstellung vergeben.

1^S Seien

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, K), \quad B := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in M(3, K).$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Leibnizformel (§13.11 der Vorlesung)

$$\det A = ad - bc$$

und

$$\det B = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1.$$

(8 Punkte)

2. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, die Wirkung von Elementarmatrizen (§10.7) auf die Determinante zu untersuchen. Benutzen Sie dazu die Definition §13.10 der Determinante als das durch $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$ eindeutig gegebene Element von $\text{Alt}^n(K^n)$. Sei $A \in M(n, K)$ jeweils eine beliebige $n \times n$ Matrix.

(a) Für $\lambda \in K$ und $k \in \{1, \dots, n\}$, sei $A_{\lambda, k} := (a_{ij}) \in M(n, K)$ die Matrix mit Einträgen

$$a_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j, \\ 1 & \text{für } i = j \neq k, \\ \lambda & \text{für } i = j = k. \end{cases}$$

(Wenn $\lambda \neq 0$, dann ist $A_{\lambda, k}$ eine Elementarmatrix vom Typ I.) Zeigen Sie, dass

$$\det(A \cdot A_{\lambda, k}) = \lambda \cdot \det(A).$$

(b) Sei $B \in M(n, K)$ eine Elementarmatrix vom Typ II. Zeigen Sie, dass

$$\det(A \cdot B) = \det(A).$$

(c) Sei $C \in M(n, K)$ eine Elementarmatrix vom Typ III. Zeigen Sie, dass

$$\det(A \cdot C) = -\det(A). \quad (8 \text{ Punkte})$$

3. Sei $A = (a_{ij}) \in M(n, K)$. Dann gilt für die Determinante von A die Leibnizformel (§13.11):

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

Zeigen Sie, dass auch die folgende Formel zutrifft:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Sie haben somit gezeigt, dass $\det A = \det A^t$.

(8 Punkte)

4. (a) Geben Sie eine Zykeldarstellung von jedem der 24 Elemente von S_4 an und berechnen Sie jeweils das Signum.
- (b) Berechnen Sie durch explizites Anwenden der Leibnizformel die Determinante der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(8 Punkte)

Die folgende Aufgabe ist eine *-Aufgabe. Sie kann, muss aber nicht eingereicht werden. Die Punkte zählen nicht zu den Übungspunkten, sondern werden als Extrapunkte vermerkt.

- *5. Sei M die endliche Menge der 4×4 Matrizen A , deren Einträge ausschließlich 1 oder -1 sind. Wir betrachten die Einschränkung der Determinante als Abbildung auf M :

$$\det : M \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Finden Sie $A \in M$ so, dass $\det A$ maximal ist. (So ein A existiert, da M endlich ist). Hinweis: Verwenden Sie die geometrische Interpretation der Determinante.

(8 Punkte)