Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Michel van Garrel

15. Übungsblatt

Abgabetermin: Mi, 11.04.18, zu Beginn der Vorlesung, Abholung um 8:20 Uhr.

Die erste Aufgabe ist eine S-Aufgabe. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, eine stilistisch perfekte Lösung aufzuschreiben. Die Hälfte der Punkte wird für die Darstellung vergeben.

1.[S] Seien $U \subseteq V \subseteq W$ verschachtelte Vektorräume. Um zwischen Elementen von W/U und W/V zu unterscheiden, wird in dieser Aufgabe die Notation $[w]_U$ bzw. $[w]_V$ verwendet.

Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \psi\colon W/U &\longrightarrow W/V \\ [w]_U &\longmapsto [w]_V \end{aligned}$$

ist wohldefiniert und surjektiv. *(8 Punkte)*

2. Mit der gleichen Notation wie in Aufgabe 1:

(a) Bestimmen Sie $\ker(\psi)$.

(b) Zeigen sie, dass ψ einen Isomorphismus

$$(W/U)/(V/U) \simeq W/V$$

induziert.

(6 Punkte)

3. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Sei $r := \dim(V/U)$. Beweisen Sie: Es existieren Linearformen $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in V^*$ mit der Eigenschaft

$$U = \ker(\varphi_1) \cap \dots \cap \ker(\varphi_r).$$

(8 Punkte)

4. Sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis des K-Vektorraums V, sei $(v_1^*, \dots, v_n^*)$ die duale Basis und seien $a_1, \dots, a_n \in K$. Geben Sie eine Basis des Kerns der Linearform

$$\varphi := a_1 v_1^* + \dots + a_n v_n^*$$

an. *(10 Punkte)*

Die folgende Aufgabe ist eine *-Aufgabe. Sie kann, muss aber nicht eingereicht werden. Die Punkte zählen nicht zu den Übungspunkten, sondern werden als Extrapunkte vermerkt.

*5. Seien $U \subseteq W \subseteq V$ verschachtelte Vektorräume und sei W' ein Komplement von W in V. Zeigen Sie: $(U + W')/U$ ist ein Komplement von W/U in V/U. *(8 Punkte)*