Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Michel van Garrel

13. Übungsblatt

Abgabetermin: Mi, 31.01.18, zu Beginn der Vorlesung, Abholung um 8:20 Uhr.

1. Sei $\varphi := A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

definierte lineare Abbildung. Wir bezeichnen mit $\mathcal{B}^* = (u, v, w)$ die durch

$$u = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

gegebene Basis von $(\mathbb{R}^3)^*$ und mit $(\mathcal{B}')^* = (a, b)$ die durch

$$a = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$$

gegebene Basis von $(\mathbb{R}^2)^*$. Bestimmen Sie $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*(\mathcal{B}')^*}(\varphi^*)$. *(6 Punkte)*

2. Sei $U := L(v, w) \subseteq \mathbb{R}^4$ der von $v := (-2, 3, 3, 1)$ und $w := (2, -2, 1, 0)$ erzeugte Unterraum von $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie den Annulator $U^\circ \subseteq (\mathbb{R}^4)^*$. *(6 Punkte)*

3. Seien V und W zwei K-Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

$$\varphi \text{ ist surjektiv } \Longrightarrow \varphi^* \text{ ist injektiv.}$$

(4 Punkte)

4. (a) Sei W ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $U \subseteq W$ ein K-Unterraum. Sei $\alpha : U \to K$ eine Linearform. Zeigen Sie, dass es eine Linearform $\beta : W \to K$ gibt, so dass $\beta(u) = \alpha(u)$ für alle $u \in U$.

   (b) Seien V und W zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

$$\varphi \text{ ist injektiv } \Longrightarrow \varphi^* \text{ ist surjektiv.}$$

Bemerkung für zukünftige Anwendung: Mithilfe des Zornschen Lemmas gilt das Resultat auch in unendlichen Dimensionen. (Es wird aber nicht verlangt, das zu beweisen.) *(8 Punkte)*

5. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zu einer Untermenge $M \subseteq V$ definiert man die *duale Menge*

$$M^\vee := \{\varphi \in V^* \mid \varphi(v) \geq 0 \text{ für alle } v \in M\},$$

und die *polare Menge*

$$M^\circ := \{\varphi \in V^* \mid \varphi(v) \geq -1 \text{ für alle } v \in M\}.$$

(a) Im $V = \mathbb{R}^2$ betrachte man die Mengen (*die Kegel*)

$$C_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, y\},$$
$$C_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x\}.$$

Berechnen und skizzieren Sie die duale Mengen (die dualen Kegel) $C_1^\vee$ und $C_2^\vee$ bezüglich der kanonischen Basis e_1^*, e_2^* von $(\mathbb{R}^2)^*$. Hinweis: C_2 ist der von der Basis $((1,0),(1,1))$ erzeugte Kegel. Was ist die duale Basis?

(b) In $V = \mathbb{R}^3$ betrachte man die Menge (*das konvexe Polytop*)

$$\Xi := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x, y, z \leq 1\}.$$

Berechnen und skizzieren Sie die duale Menge (den polaren Polytop) $\Xi^\circ \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$, wieder bezüglich der kanonischen Basis e_1^*, e_2^*, e_3^*.

(8 Punkte)

Die folgende Aufgabe ist eine Bonusaufgabe. Sie wird nur für Studierende mit weniger als 50% der Gesamtpunktzahl gewertet.

6. Seien U, V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume und φ und ψ lineare Abbildungen $U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W$.

   (a) Zeigen Sie: Ist φ surjektiv, so ist $\operatorname{Rang}(\psi \circ \varphi) = \operatorname{Rang}(\psi)$. Geben Sie ein Gegenbeispiel für die Gleichheit an, wenn φ nicht surjektiv ist.

   (b) Zeigen Sie: Ist ψ injektiv, so ist $\operatorname{Rang}(\psi \circ \varphi) = \operatorname{Rang}(\varphi)$. Geben Sie ein Gegenbeispiel für die Gleichheit an, wenn ψ nicht injektiv ist.

(8 Punkte)

Die folgende Aufgabe ist eine *-Aufgabe. Sie kann, muss aber nicht eingereicht werden. Die Punkte zählen nicht zu den Übungspunkten, sondern werden als Extrapunkte vermerkt.

*7. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei $U \subseteq V$ ein K-Unterraum. Zeigen Sie: $U = Z(U^\circ)$.

(8 Punkte)