Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Michel van Garrel

12. Übungsblatt

Abgabetermin: Mi, 24.01.18, zu Beginn der Vorlesung, Abholung um 8:20 Uhr.

1. (a) Bestimmen Sie durch Anwendung des Gaußschen Eliminationsverfahren mit Unbestimmter $\lambda \in \mathbb{R}$ für welche Werte von λ die reelle Matrix
$$A_\lambda := \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$
invertierbar ist. Für diese λ berechnen Sie die inverse Matrix A_λ^{-1}.

   (b) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass A_λ invertierbar ist. Zerlegen Sie die Matrizen A_λ und A_λ^{-1} in Produkte von Elementarmatrizen.

(8 Punkte)

2. Die Matrix
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ -4 & -2 & -6 & -6 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M(5 \times 4, \mathbb{R})$$
läßt sich auf die folgende Zeilenstufenform bringen
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestimmen Sie eine Basis von $\ker(A)$ und ergänzen Sie diese Basis durch Elemente $e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}$ der Standardbasis zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$. (Begründung!)

   (b) Ergänzen Sie die Vektoren $Ae_{j_1}, \ldots, Ae_{j_k}$ explizit zu einer Basis des $\mathbb{R}^5$.

   (c) Bestimmen Sie Matrizen $T \in \mathrm{GL}(5, \mathbb{R})$ und $S \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$, so dass $T^{-1}AS$ Smith-Normalform hat.

(9 Punkte)

3. Sei $A \in M(m \times n, K)$ eine Matrix. Zeigen Sie: Es gibt eine Matrix $B \in M(n \times m, K)$, so dass $BAB = B$ und $ABA = A$ gilt.

   Hinweis: Wenden Sie den Rangsatz an.

(6 Punkte)

4. Sei K ein Körper. Seien V und W K-Vektorräume und sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in M(m \times n, K)$. Es seien weiterhin lineare Abbildungen $S : K^n \to V$ und $T : K^m \to W$ gegeben, die das Diagramm
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] & W \\ K^n \arrow[u, "S"] \arrow[r, "A"] & K^m \arrow[u, "T"'] \end{tikzcd},$$
kommutativ machen. Es gilt also $\varphi \circ S = T \circ A$ als Abbildungen $K^n \to W$.

   Zeigen Sie:

(a) Wenn S surjektiv ist und T injektiv, dann gilt $S(\ker A) = \ker\varphi$.

(b) Wenn S surjektiv ist, dann gilt $T(\operatorname{im} A) = \operatorname{im}\varphi$.

(c) Wenn S und T Isomorphismen sind, dann gilt $\dim\ker A = \dim\ker\varphi$ und $\dim\operatorname{im} A = \dim\operatorname{im}\varphi$.

(9 Punkte)

Die folgende Aufgabe ist eine Bonusaufgabe. Sie wird nur für Studierende mit weniger als 50% der Gesamtpunktzahl gewertet.

5. (a) Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 8 & 15 \\ 0 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_4 := \begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 \end{pmatrix}$$

Welche der Produkte $A_i \cdot A_j$ für $1 \leq i, j \leq 4$ sind definiert? Berechnen Sie diese.

(b) Gibt es invertierbare Matrizen S und T, so dass $B_1 = T^{-1}B_2S$? (S und T müssen nicht angegeben werden.)

$$B_1 := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad B_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(8 Punkte)

Die folgende Aufgabe ist eine *-Aufgabe. Sie kann, muss aber nicht eingereicht werden. Die Punkte zählen nicht zu den Übungspunkten, sondern werden als Extrapunkte vermerkt.

*6. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^{11}$ ein 4-dimensionaler Unterraum. Man betrachte

$$V := \{\varphi : \mathbb{R}^{11} \to \mathbb{R}^9 \text{ lineare Abbildung} \mid U \subseteq \ker(\varphi)\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass V ein Vektorraum ist. (Eventuell hilft es, V als einen Unterraum eines gewissen Vektorraumes zu identifizieren.)

(b) Berechnen Sie die Dimension von V.

(8 Punkte)