

11. Übungsblatt

Abgabetermin: Mi, 17.01.18, zu Beginn der Vorlesung, Abholung um 8:20 Uhr.

1. Es seien m lineare Gleichungen in n Variablen gegeben, geschrieben in der Form $Ax = b$. Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel zu jeder der folgenden Aussagen:

- (a) Wenn $n = m$, dann gibt es maximal eine Lösung.
- (b) Wenn $n > m$, dann gibt es immer eine Lösung.
- (c) Wenn $n > m$, dann gilt $\dim \ker A > 0$.
- (d) Wenn $n < m$, dann gibt es immer ein b' , so dass $Ax = b'$ keine Lösung hat.
- (e) Wenn $n < m$, dann besteht die einzige Lösung von $Ax = 0$ aus $x = 0$.

(8 Punkte)

2. Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ gegeben durch die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 8 & 15 & 22 \\ 11 & 21 & 30 \\ 13 & 25 & 35 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten weiterhin die Basen $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ von $\mathbb{R}^3$ und $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ von $\mathbb{R}^4$ mit

$$\begin{aligned} v_1 &:= (2, -1, 0), \quad v_2 := (-1, 2, -1), \quad v_3 := (0, -1, 1) \in \mathbb{R}^3, \\ w_1 &:= (1, 1, 1, 1), \quad w_2 := (1, 2, 2, 2), \quad w_3 := (1, 2, 3, 3), \quad w_4 := (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Matrix $\text{Mat}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\varphi)$ von φ bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$. (*Bemerkung:* Es wird hier nicht verlangt zu zeigen, dass $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ Basen sind.)

(8 Punkte)

3. Sei K ein beliebiger Körper und seien $m, n, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sei $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, K)$ und $B = (b_{jk}) \in M(n \times p, K)$. Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t.$$

(b) Sei nun $K = \mathbb{C}$, $n = 2$ und

$$A := \begin{pmatrix} i+1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Basis für $\ker(\psi)$ an.

(8 Punkte)

Die folgende Aufgabe ist eine *-Aufgabe. Sie kann, muss aber nicht eingereicht werden. Die Punkte zählen nicht zu den Übungspunkten, sondern werden als Extrapunkte vermerkt.

- *5. Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Für eine Teilmenge $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $i_1 < \dots < i_k$ bezeichne

$$\iota_I : K^{|I|} \longrightarrow K^n, \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \longmapsto \sum_{\mu=1}^k \lambda_{i_\mu} e_{i_\mu}$$

den Monomorphismus (die lineare Einbettung) mit $\iota_I(e_\mu) = e_{i_\mu}$, $\mu = 1, \dots, k$, sowie

$$\pi_I : K^n \longrightarrow K^{|I|}, \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longmapsto \sum_{\mu=1}^k \lambda_{i_\mu} e_{i_\mu}$$

den Epimorphismus (die lineare Surjektion) mit $\pi_I(e_i) = 0$ für $i \notin I$ und $\pi_I(e_{i_\mu}) = e_\mu$.

Sei nun $L \subseteq K^n$ ein Unterraum der Dimension k . Zeigen Sie, dass es $I, J \subseteq \{1, \dots, n\}$ gibt mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) $I \cap J = \emptyset$, $I \cup J = \{1, \dots, n\}$.
- (b) $L \cap \operatorname{im}(\iota_I) = \{0\}$, $L + \operatorname{im}(\iota_I) = K^n$.
- (c) $\pi_J|_L : L \rightarrow K^{|J|}$ ist ein Isomorphismus.

(8 Punkte)