Prof. Dr. Bernd Siebert
Dr. Michel van Garrel

10. Übungsblatt

Abgabetermin: Mi, 10.01.18, zu Beginn der Vorlesung, Abholung um 8:20 Uhr.

1. Sei $A : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$ gegeben durch die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Geben Sie mit Hilfe des Gaußschen Verfahrens eine Basis von $\ker(A)$ an.

   (b) Zeigen Sie mit Hilfe des Gaußschen Verfahrens, dass $w := (2, -1, 4)$ im Bild von A liegt und finden Sie ein Urbild von w unter A.

   (8 Punkte)

2. Man betrachte die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch die Matrix (siehe (9.1), (9.6) und (9.13) im Skript)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Finden Sie Basen v_1, v_2, v_3 und $w_1, w_2 = A(v_2), w_3 = A(v_3)$ von $\mathbb{R}^3$ für die gilt: $\ker(A) = L(v_1)$, $\operatorname{im}(A) = L(w_2, w_3)$.

   (6 Punkte)

3. Man betrachte eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ zwischen zwei endlich-dimensionalen K-Vektorräumen V und W.

   (a) Es seien $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren in V und man nehme an, dass $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)$ linear unabhängig sind. Zeigen Sie, dass dann auch $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind.

   (b) Man nehme an, dass φ ein Isomorphismus ist. Zeigen Sie, dass $v_1, \ldots, v_n \in V$ genau dann eine Basis von V ist, wenn $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)$ eine Basis von W ist.

   (8 Punkte)

4. Sei $A \in M(m \times n, K)$ eine Matrix. Man betrachte jede Zeile v_i von A als einen Vektor $v_i \in K^n$. Sei der Unterraum V von K^n gegeben durch

$$V := L(v_1, \ldots, v_m).$$

   Sei $B = (b_{ij}) \in M(m \times n, K)$ eine Matrix in Zeilenstufenform mit Stufen in den Spalten $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$, die durch elementare Zeilentransformationen aus A hervorgeht. Seien $u_1, \ldots, u_k \in K^n$ die ersten k Zeilen von B. Dann ist u_i gegeben durch

$$u_i := (b_{il})_{l=1,\ldots,n} = (0, \ldots, 0, 1, *, \ldots *),$$

   wobei die 1 an der j_i-ten Stelle auftritt und $b_{ij_l} = 0$, solange $l \neq i$, siehe auch (9.11) im Skript.

(a) Man betrachte die folgenden Unterräume von K^n:

$$U_l := \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \,|\, \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_l = 0\} \subseteq K^n, \text{ für } l = 1, \ldots, n.$$

Man betrachte weiterhin die Folge von Zahlen $d_0 = \dim(V)$, $d_l := \dim(U_l \cap V)$, $l = 1, \ldots, n$, für die gilt:

$$k = d_0 \geq d_1 \geq \cdots \geq d_n = 0.$$

Zeigen Sie, dass

$$\big\{l \in \{1, \ldots, n\} \,\big|\, d_{l-1} > d_l\big\} = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}.$$

(b) Schließen Sie daraus, dass die Sprungstellen j_i eindeutig bestimmt sind: Sei B' eine andere Matrix in Zeilenstufenform, die durch elementare Zeilentransformationen aus A hervorgeht. Zeigen Sie dann, dass die Sprungstellen für B und B' gleich sind. (Anmerkung: Man kann zeigen $B' = B$.) *(10 Punkte)*

Die folgende Aufgabe ist eine *-Aufgabe. Sie kann, muss aber nicht eingereicht werden. Die Punkte zählen nicht zu den Übungspunkten, sondern werden als Extrapunkte vermerkt.

*5. Wir bezeichnen mit $f_i \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $i \in \mathbb{N}$, die durch $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^i$, definierte Abbildung. Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei $U_n := L(f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})$.

(a) Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden. Zeigen Sie, dass die durch

$$\begin{array}{rcll} \psi & : & U_n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & & f & \longmapsto & (f(a_1), \ldots, f(a_n)) \end{array}$$

definierte Abbildung ein ($\mathbb{R}$-Vektorraum-) Isomorphismus ist.

(b) Schließen Sie daraus, dass die Vektoren $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ linear unabhängig sind.

(8 Punkte)