Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Die folgende Fragestellung ist ein typisches Problem der extremalen Graphentheorie: Was ist die minimale Zahl μ_0, so dass alle Graphen auf n Ecken mit mehr als μ_0 Kanten einen Kreis enthalten? Diejenigen Graphen (auf n Ecken), die μ_0 Kanten haben, ohne einen Kreis zu enthalten, nennt man extremal. In diesem Fall sind das genau die Bäume auf n Ecken.

Allgemein sucht man für

- eine Grapheneigenschaft $\mathcal{P}$,
- eine Unterklasse $\mathcal{F}$ aller Graphen und
- eine Grapheninvariante $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$

den minimalen Wert $\mu_0 \in \mathbb{N}$ von μ, so dass jeder Graph $G \in \mathcal{F}$ mit $\mu(G) > \mu_0$ die Eigenschaft $\mathcal{P}$ hat. Graphen $G \in \mathcal{F}$ mit $\mu(G) = \mu_0$ ohne die Eigenschaft $\mathcal{P}$ nennt man *extremal* (in $\mathcal{F}$ für $\mathcal{P}$ und μ). In obigem Beispiel ist $\mathcal{P}$ die Eigenschaft, einen Kreis zu enthalten, $\mathcal{F}$ ist die Klasse aller Graphen auf n Ecken und $\mu(G) := \|G\|$.

2 Satz von Turán

Wir wandeln nun das Beispiel des vorigen Kapitels etwas ab. Wir fragen nicht mehr, ob unsere Graphen einen Kreis enthalten, sondern ob sie eine Kopie eines gegebenen Graphen F enthalten. Schreibe $\mathcal{G}$ für die Klasse aller endlichen Graphen und $\mathcal{G}_n$ für alle Graphen mit $n \in \mathbb{N}$ Ecken. Zu $n \in \mathbb{N}$ und $F \in \mathcal{G}$ setze

$$\mathrm{ex}(n, F) := \max\{\|G\| : F \not\subseteq G \in \mathcal{G}_n\}.$$

Offensichtlich enthalten $(\chi(F)-1)$-partite Graphen keine Kopie von F (ein solcher Graph heißt *F-frei*). Unter allen $(\chi(F)-1)$-partiten Graphen mit derselben Eckenzahl hat der vollständige, balancierte die meisten Kanten. *Balanciert* bedeutet hierbei, dass die größte Partitionsklasse höchstens 1 größer ist als die kleinste. Allgemein bezeichnen wir mit $T_\xi(n)$ den vollständigen, balancierten, ξ-partiten Graphen auf n Ecken. Jeder solche Graph heißt *Turán-Graph*. Für seine Kantenzahl gilt:

$$\|T_\xi(n)\| \leq \frac{\xi-1}{\xi}n^2$$

Wie wir oben schon bemerkt haben, gilt

$$\mathrm{ex}(n,F) \geq \|T_{\chi(F)-1}(n)\|.$$

Im Falle $F = K_\xi$ weiß man noch deutlich mehr:

Satz 2.1 (Mantel 1907 ($\xi = 3$), Turán 1941)**.** *Für alle $\xi, n \in \mathbb{N}$ mit $\xi \geq 2$ ist der Turángraph $T_{\xi-1}(n)$ der einzige K_ξ-freie Graph mit $\mathrm{ex}(n, K_\xi)$ Kanten.*

Beweis. Der Fall $\xi = 2$ ist trivial. Wir beweisen zunächst $\mathrm{ex}(n,K_3) = \|T_2(n)\|$ mit Induktion nach n. Sei G extremal und $xy \in E(G)$. Dann gilt für $G' := G - \{x,y\}$:

$$\begin{aligned}\|G\| &= 1 + \|G'\| + |E(\{x,y\}, V(G)\setminus\{x,y\})| \overset{\text{I.V.}}{\leq} 1 + \|T_2(n-2)\| + (n-2)\\ &\overset{n\text{ gerade}}{\leq} 1 + \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 + (n-2) = \frac{n^2}{4} = \|T_2(n)\|\end{aligned}$$

Außerdem ist $T_2(n)$ der einzige extremale Graph auf n Ecken: Sei G ein K_3-freier Graph mit $|G| = n$ und $\|G\| = n^2/4$. Dann gilt für eine beliebige Kante $xy \in E(G)$

$$\|G'\| = \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \quad \text{und} \quad |E(\{x,y\}, V(G'))| = n-2.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $G' = T_2(n-2)$. Offenbar haben x und y keinen gemeinsamen Nachbar. Außerdem gilt $x \in N(u) \Leftrightarrow y \in N(v)$ für jede Kante uv von $T_2(n-2)$. Folglich ist $G = T_2(n)$ (Abb. 1).

Auch in Falle $\xi > 3$ wenden wir Induktion nach n an. O.B.d.A. sei $n \geq \xi$ und $G = (V,E)$ ein extremaler Graph. $\{x_1,\dots,x_{\xi-1}\} = X \subseteq V$ spanne einen $K_{\xi-1}$ in G auf (warum gibt es X?). Setze $W := V \setminus X$ und $G' := G[W]$ (Abb. 1). Dann ist

$$\begin{aligned}\|G\| &= \binom{\xi}{2} + \|G'\| + |E(X,W)|\\ &\overset{\text{I.V.}}{\leq} \binom{\xi}{2} + \|T_{\xi-1}(n-\xi+1)\| + (n-\xi+1)(\xi-2)\\ &= \|T_{\xi-1}(n)\|\end{aligned}$$

Zu zeigen verbleibt lediglich die Eindeutigkeit. Sei also G ein extremaler Graph auf n Ecken. Dann ist $\|G'\| = \|T_{\xi-1}(n\xi+1)\|$ und $|E(X,W)| = (n-\xi+1)(\xi-2)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist somit $G' = T_{\xi-1}(n-\xi+1)$. Seien $W_1, \dots, W_{\xi-1}$ die Eckenklassen von G' und $uv \in E(G')$, etwa $u \in W_i$ und $v \in W_j$. Dann ist zwar $N(u) \cap X \neq N(v) \cap X$, aber beide Mengen enthalten $\xi - 2$ Ecken. Jede weitere Ecke $w \in W_i$ hat aber dieselben Nachbarn in X wie u. Das zeigt $G = T_{\xi-1}(n)$ (Abb. 1). □

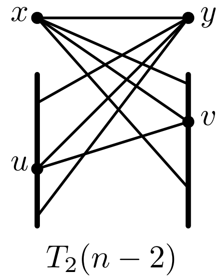

Abbildung 1: $T_2(n)$

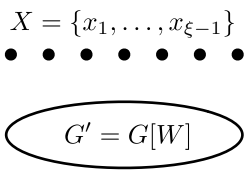

Abbildung 1: G

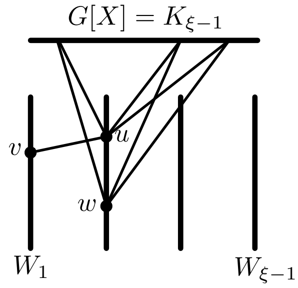

Abbildung 1: $T_{\xi-1}(n)$

Satz 2.2 (Erdős 1970). *Sei $\xi \geq 2$ und $G(V,E)$ ein K_ξ-freier Graph mit Eckenmenge $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Dann existiert ein $(\xi-1)$-partiter Graph $G' = (V, E')$, so dass $d_G(v_i) \leq d_{G'}(v_i)$.*

Beweis. Sei G ein K_ξ-freier Graph und v eine Ecke maximalen Grades in G. Dann ist $G[N(v)]$ ein $K_{\xi-1}$-freier Graph. Nach Induktion über ξ gibt es einen $(\xi-2)$-partiten Graphen G_0 mit $V(G_0) = N(v)$ und $d_{G[N(v)]}(w) \leq d_{G_0}(w)\ \forall w \in N(v)$. Dann ist $G' = G_0 * (V \setminus N(v))$ ein $(\xi-1)$-partiter Graph.

$$w \in V \setminus N(v) \Rightarrow d_{G'}(w) = d_G(w) \overset{d(v)=\Delta(G)}{\geq} d_G(w)$$

$$\begin{aligned} w \in N(v) \Rightarrow d_{G'}(w) &= |V \setminus N(v)| + d_{G_0}(w) \\ &\geq |N_G(w) \cap (V \setminus N_G(v))| + d_{G[N(v)]}(w) \\ &\geq d_G(w) \end{aligned}$$

□

Der folgende Satz sagt beschränkt $\mathrm{ex}(n,F)$ für bipartites F. Mit $\#\{F \subseteq G\}$ bezeichnen wir die Zahl der Kopien von F in G.

Satz 2.3 (Kővari, Sós, Turán). *Für alle $\varepsilon > 0$ und Graphen F mit $\chi(F) \leq 2$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq n_0$ gilt:* $\mathrm{ex}(n,F) \leq \varepsilon n^2$.

Beweis. Sei $F = K_{\xi,\xi}$ und G ein F-freier Graph und $c_{a,b} := \#\{K_{a,b} \subseteq G\}$. Es gilt

$$c_{1,\xi} = \sum_{v \in V(G)} \binom{d(v)}{\xi} \overset{\text{Jensen}}{\geq} n \binom{\frac{1}{n}\sum d(v)}{\xi} = n \binom{\frac{2}{n}\|G\|}{\xi} = \Omega\left(\frac{\|G\|^\xi}{n^{\xi-1}}\right).$$

Für $K \subset V^{[\xi]} := \{X \subseteq V : |X| = \xi\}$ sei d_K die Anzahl aller Kopien von $K_{1,\xi}$ in G mit Blättern in K. Dann ist

$$c_{\xi,\xi} = \sum_{K \subset V^{[\xi]}} \binom{d_K}{\xi} \overset{\text{Jensen}}{\geq} \binom{n}{\xi} \binom{c_{1,\xi}/\binom{n}{\xi}}{\xi} = \Omega\left(n^\xi \left(\frac{\|G\|^\xi}{n^{\xi-1}n^\xi}\right)^\xi\right) = \Omega\left(\left(\frac{\|G\|^\xi}{n^{2\xi-2}}\right)^\xi\right)$$

Falls $\|G\| \geq \varepsilon n^2 = \Omega(n^2)$, dann ist $c_{\xi,\xi} = \Omega(n^{2\xi})$. □

Satz 2.4 (Kővari, Sós, Turán). *Für alle $s, t \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\mathrm{ex}(n, K_{s,t}) \leq \frac{1}{2}\left((s-1)^{1/t} n^{2-1/t} + tn\right).$$

Beweis. Sei $G = (V, E)$ ein $K_{s,t}$-freier Graph auf n Ecken und $c_{a,b} := \#\{K_{a,b} \subseteq G\}$. Dann ist $c_{1,t} \leq (s-1)\binom{n}{t}$, da sonst nach dem Schubfachprinzip s Ecken von G mindestens t gemeinsame Nachbarn hätten, im Widerspruch zur $K_{s,t}$-Freiheit von G. Andererseits gilt $c_{1,t} = \sum_{v \in V} \binom{d(v)}{t}$. Folglich ist

$$\frac{n}{t!}\left(\frac{2|E|}{n} - t\right)^t \leq n \binom{\frac{2}{n}|E|}{t} \overset{\text{Jensen}}{\leq} \sum_{v \in V} \binom{d(v)}{t} \leq (s-1)\binom{n}{t} \leq (s-1)\frac{n^t}{t!}$$

Auflösen nach $|E|$ ergibt die Behauptung. □

Satz 2.5 (Erdős, Stone 1946 / Erdős, Simonovits 1966). *Für alle Graphen F und beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq n_0$ gilt:*

$$\mathrm{ex}(n, F) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(F) - 1} + \varepsilon\right)\binom{n}{2}$$

Lemma 2.6. *Für alle $s, t \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq n_0$ gilt: Jeder Graph G auf n Ecken mit Minimalgrad mindestens $(1 - \frac{1}{r} + \varepsilon)n$ enthält einen $K_{r+1}(s)$, einen vollständig $(r+1)$-partiten Graphen mit Partitionsklassen der Größe s.*

Beweis. Wir wenden Induktion nach r an. Der Fall $r = 1$ folgt aus Satz 2.4. Für $r \geq 2$ sei $s \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$. Setze $t := \lceil \frac{s}{\varepsilon} \rceil$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $K_r(t) \subseteq G$, da $1 - \frac{1}{r-1} \leq 1 - \frac{1}{r}$. Seien $A_1, \ldots, A_r$ die Partitionsklassen des $K_r(t)$. Setze $A := \bigcup A_i$ und $U := V \setminus A$. Mit W bezeichnen wir die Menge aller Ecken aus U, die in jeder Partitionsklasse A_i mindestens s Nachbarn haben (siehe Abb. 2):

$$W := \{w \in U : |N(w) \cap A_i| \geq s \ \forall i \in \{1, \ldots, r\}\}$$

Für die Anzahl z der fehlenden Kanten zwischen U und A gilt

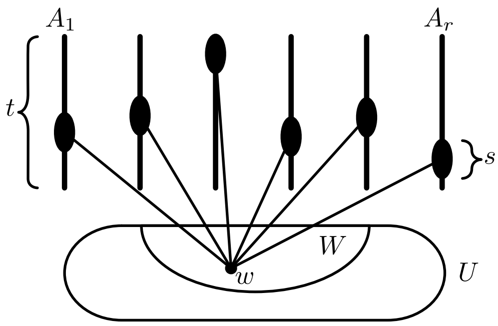

Abbildung 2: Der Graph G, aufgeteilt in $K_r(t) = G[A]$ und U

$$z \geq |U \setminus W|(t-s) \geq |U \setminus W|(1-\varepsilon)t = (n - rt - |W|)(1-\varepsilon)t.$$

Andererseits gilt aufgrund des hohen Minimalgrades in G:

$$z \leq |A|(n - \delta(G)) \leq rt(\frac{1}{r} - \varepsilon)n = (1 - r\varepsilon)tn$$

Kombiniert man beide Abschätzungen, ergibt sich nach Umformung

$$|W| \geq \frac{nr\varepsilon}{1-\varepsilon} - rt \xrightarrow{n\to\infty} \infty.$$

Es gibt also $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|W| > \binom{t}{s}^r(s-1)$ für $n \geq n_0$. Nach dem Schubfachprinzip gibt es somit eine Menge A_{r+1} von s Ecken in W, die in jedem A_i mindestens s gemeinsame Nachbarn haben. Folglich ist $G[A \cup A_{r+1}]$ eine Kopie von $K_{r+1}(s)$ in G. □

Lemma 2.7. *Für alle $\alpha, \varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass folgende Aussage für alle Graphen G auf $n \geq n_0$ Ecken gilt: Wenn $d(G) \geq (\alpha + \varepsilon)n$, so enthält G einen (induzierten) Teilgraphen $F \subseteq G$ auf mindestens δn Ecken mit $\delta(F) \geq (\alpha + \delta)|F|$.*

Beweis. Wähle $\delta := \varepsilon/3$. Entferne sukzessive Ecken $G_0 := G$: Hat G_i eine Ecke v mit $d_{G_i}(v) < (\alpha+\delta)|G_i|$, dann setze $G_{i+1} := G_i - v$. Sei G_N der letzte so entstandene Graph. Mit $n := |G|$ gilt folgende Abschätzung:

$$\|G\| - \|G_N\| < (\alpha + \delta) \sum_{i=0}^{n-N} (n-i) \leq (\alpha+\delta)\binom{n+1}{2} \leq (\alpha + 2\delta)\binom{n}{2}$$

Das bedeutet

$$\|G_N\| \geq (\alpha+\varepsilon)\binom{n}{2} - (\alpha+2\delta)\binom{n}{2} \geq (\varepsilon - 2\delta)\binom{n}{2}$$

und somit ist $|G_N| \geq (\varepsilon - 2\delta)n$. □

Beweis des Satzes. Sei $G = (V, E)$ mit $n := |G|$ und $\|G\| \geq (1 - \frac{1}{r} + \varepsilon)\binom{n}{2})$. Dann ist $d(G) \geq (1 - \frac{1}{r} + \frac{\varepsilon}{2})n$. Nach Lemma 2.7 gibt es also einen Teilgraphen $F \subseteq G$ mit Minimalgrad mindestens $(1 - \frac{1}{r} + \delta)|F|$ und $|F| \geq \delta n$ (mit $\delta = \delta(\varepsilon/2)$). Weil $|F| \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ impliziert Lemma 2.6 die Existenz ein Kopie von $K_{r+1}(s)$ in F und somit auch in G. $\square$

Satz 2.8 (Goodman 1959)**.** *Für jeden Graphen G ist die Anzahl der Dreiecke in G und $\bar{G}$ zusammen mindestens $\frac{1}{24}n(n-1)(n-5)$, wobei $n := |G|$.*

Beweis. Bezeichne die Anzahl der Dreiecke in $G \cup \bar{G}$ mit Δ. Dann ist

$$\Delta \overset{(*)}{=} \binom{n}{3} - (n-2)\|G\| + \sum_{v \in V(G)} \binom{d(v)}{2} \overset{\text{Jensen}}{\geq} \binom{n}{3} - (n-2)\|G\| + n\binom{2\|G\|/n}{2}$$

$$= \binom{n}{3} - \frac{2}{n}\|G\| \left(\binom{n}{2} - \|G\| \right) \geq \binom{n}{3} - \frac{2}{n} \left(\frac{1}{2}\binom{n}{2} \right)^2 \geq \frac{1}{24}n(n-1)(n-5)$$

Die Identität $(*)$ ergibt sich, wenn man prüft, wie oft die einzelnen Summanden jeden Graphen auf 3 Ecken zählen (siehe Tabelle 1).

$\square$

Summand	3 Kanten	2 Kanten	1 Kante	0 Kanten
$\binom{n}{3}$	1	1	1	1
$-(n-2)\|G\|$	-3	-2	-1	0
$\sum \binom{d(v)}{2}$	3	1	0	0
gesamt	1	0	0	1

Tabelle 1: Wie oft zählen die Summanden welchen Graphen auf 3 Ecken?

Korollar 2.9. *Ein Graph G enthält mindestens $m(4m - n^2)/3n$ Dreiecke, wobei n die Eckenzahl von G ist und m die Kantenzahl.*

Beweis.

$$3 \cdot \#\{K_3 \subseteq \bar{G}\} \leq \sum_{v \in V} \binom{d_{\bar{G}}(v)}{2}$$

$$\begin{aligned}\#\{K_3 \subseteq G\} &\geq \binom{n}{3} - (n-2)\|\bar{G}\| + \frac{2}{3}\sum_{v \in V} \binom{d_{\bar{G}}(v)}{2} \\ &\geq \binom{n}{3} - (n-2)\|\bar{G}\| + \frac{2}{3}n\binom{\frac{2}{n}m}{2} \\ &= \frac{m}{3n}(4m - n^2)\end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung.

- $\|G\| \geq \mathrm{ex}(n, K_3) + \varepsilon n^2$ für ein $\varepsilon > 0 \Rightarrow \#\{K_3 \subseteq G\} \geq \frac{n^2/4}{3n} 4\varepsilon n^2 = \Omega(n^3)$
- $\frac{n^2}{4} \leq \|G\| \leq \frac{n^2}{3} \Rightarrow \#\{K_3 \subseteq G\} \geq \frac{4}{9}(4\|G\| - n^2)$ (ohne Beweis).
- Razborov 2008 berechnete die Funktion $\rho_3(n, d)$:

$$\rho_3(n, d) = \min\left\{\#\{K_3 \subseteq G\} : |G| = n, \|G\| = d\binom{n}{2}\right\}\binom{n}{3}^{-1}$$

3 Regularitätslemma

Das Regularitätslemma wurde 1975 von Szemerédi für einen Beweis über arithmetische Progressionen entwickelt. Eine *arithmetische Progression* der Länge k (kurz AP-k) ist eine Menge $\{x, x+d, \ldots, x+d(k-1)\}$ mit reellen Zahlen x und $d > 0$. Zum Beispiel ist $\{5, 9, 13, 17, 21\}$ eine AP-5 mit $d = 4$. Szemerédi versuchte die Funktion $r_k(n) := \max\{|A| : A \subseteq [n], A \text{ enthält keine AP-}k\}$ zu bestimmen. Ein kurzer zeitlicher Abriss des Forschungsverlaufs findet sich in Tabelle 2.

1936	Erdős-Turán	Vermutung: $r_k(n) \in o(n)$
1946	Behrend	Konstruktion $r_3(n) \geq n/\exp(c\sqrt{\log n})$ für ein $c > 0$
1953	Roth(F)	$r_3(n) = O(n/\log\log n)$
1969	Szemerédi	$r_4(n) = o(n)$
1975	Szemerédi	1. Beweis mit Regularitätslemma
1978	Fürstenberg	2. Beweis
2001	Gowers(F)	3. Beweis mit Verallgemeinerung von Roths Argument
2004	Gowers, Rödl et al.	4. Beweis mit Hypergraphenregularität
2004	Green-Tao(F)	Primzahlen enthalten AP-k für jedes k
?	Bourgain	$r_3(n) = O(n \log\log n/\sqrt{\log n})$

Tabelle 2: Forschung zu $r_k(n)$ (F kennzeichnet Fields-Preisträger)

Bemerkung. Roths Aussage von 1953 hat einen einfachen Beweis (siehe Satz 3.6) mit Hilfe des Removal Lemmas (Satz 3.5 in der nächsten Vorlesung).

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $\varepsilon > 0$ und $d \geq 0$. Ein Paar (X, Y) zweier disjunkter Mengen $X, Y \subseteq V$ heißt *(ε, d)-regulär*, falls für Teilmengen $X' \subseteq X$ und $Y' \subseteq Y$ mit $|X'| \geq \varepsilon|X|$ und $|Y'| \geq \varepsilon|Y|$ gilt, dass die Kantendichte zwischen X' und Y' um nicht mehr als ε von d abweicht, in Formeln:

$$|d(X', Y') - d| \leq \varepsilon \qquad \text{wobei} \quad d(X', Y') := \frac{|E(X', Y')|}{|X'||Y'|}$$

Das Paar (X, Y) heißt *ε-regulär*, wenn es ein $d \geq 0$ gibt, so dass (X, Y) ein (ε, d)-reguläres Paar ist. Eine Partition $V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_t$ der Eckenmenge eines Graphen G heißt *ε-regulär*, wenn folgendes gilt: $|V_0| \leq \varepsilon|G|$, $|V_1| = \ldots = |V_t|$ und alle bis auf höchstens εt^2 der Paare (V_i, V_j) mit $1 \leq i < j \leq t$ sind ε-regulär (siehe Abb. 3).

Satz 3.1 (Regularitätslemma)**.** *Zu allen $\varepsilon > 0$ und $t_0 \in \mathbb{N}$ gibt es $T_0 \in \mathbb{N}$, so dass jeder Graph (auf mindestens t_0 Ecken) eine ε-reguläre Partition seiner Eckenmenge in t Klassen hat mit $t_0 \leq t \leq T_0$.*

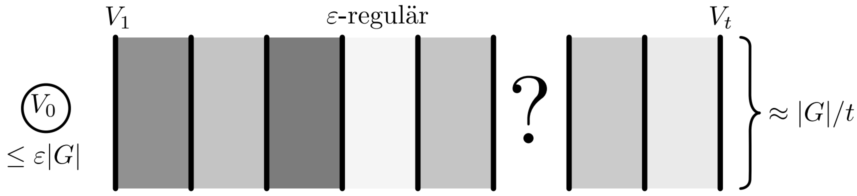

Abbildung 3: Eine ε-reguläre Partition von G

Bemerkung.

- Der Wert von T_0, der sich aus dem Beweis des Regularitätslemmas ergibt, ist etwa $T_0 = t_0 f \circ \ldots \circ f(1)$, wobei $f(x) = 2^x$ und die Zahl der Verkettungen ein Polynom in $1/\varepsilon$ ist. Schon für $\varepsilon = 1/2$ ist $T_0 > 10^{100}$.

- Gowers zeigte, dass obiger Wert von T_0 qualitativ nicht weit vom Optimum liegt: Es gibt Graphen, bei denen jede ε-reguläre Partition mindestens $f \circ \ldots \circ f(1)$ Klassen hat mit $(1/\varepsilon)^{1/32}$ Verkettungen.

Normalerweise bezeichnet regulär einen Graphen bei dem alle Ecken den gleichen Grad haben. Die folgende Proposition zeigt, warum die Bezeichnung in unserem Zusammenhang zumindest nicht ganz abwegig ist:

Proposition 3.2. *Sei (A, B) ein (ε, d)-reguläres Paar (in einem Graphen G). Dann gilt für jedes $Y \subseteq B$ mit $|Y| \geq \varepsilon|B|$, dass sowohl die Zahl der Ecken von A mit weniger als $(d - \varepsilon)|Y|$ Nachbarn in Y, als auch die mit mehr als $(d + \varepsilon)|Y|$ Nachbarn in Y kleiner ist als $\varepsilon|A|$.*

Beweis. Betrachte die Menge X^- der Ecken von A, die weniger als $(d - \varepsilon)|Y|$ Nachbarn in Y haben. Offenbar ist $|E(X^-, Y)| < (d - \varepsilon)|Y||X^-|$ und somit $d(X^-, Y) < d - \varepsilon$. Weil (A, B) aber (ε, d)-regulär ist, muss $|X^-| < \varepsilon|A|$ gelten. Das analoge Argument für die Menge X^+ aller Ecken von A mit mehr als $(d+\varepsilon)|Y|$ Nachbarn in Y zeigt $|X^+| < \varepsilon|A|$. □

Seien F und G jeweils ℓ-partite Graphen mit Partitionsklassen $W_1 \cup \ldots \cup W_\ell = V(F)$ und $V_1 \cup \ldots \cup V_\ell = V(G)$. Ein Graphenhomomorphismus $\varphi : F \to G$ heißt *partitionstreu*, wenn $\varphi(W_i) \subseteq V_i$. Eine Kopie F' von F in G heißt *partit*, wenn es einen partitionstreuen Isomorphismus von F zu F' gibt.

Mit der Schreibweise $\pm b$ bezeichnen wir formal das Intervall $[-b, +b]$. Weiterhin ist $a \pm b \pm c$ zu verstehen als $a \pm (|b| + |c|)$. In Sinne intuitiver Notation schreiben wir bei diesen Mengen häufig „=“ statt „$\in$“ und „$\leq$“ statt „$\subseteq$“.

Satz 3.3 (Counting Lemma). *Sei $\ell \in \mathbb{N}$. Für jeden ℓ-partiten Graphen F (mit Partition $W_1 \cup \ldots \cup W_\ell$), und Zahlen $\gamma, d_0 > 0$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass folgendes gilt: Ist G ein ℓ-partiter Graph, bei dem die Partitionsklassen $V_1, \ldots, V_\ell$ jeweils mindestens n_0 Ecken haben und alle Paare (V_i, V_j) mit $E(W_i, W_j) \neq \emptyset$ sind (ε, d_{ij})-regulär mit $d_{ij} > d_0$, so liegt die Zahl partitionstreuer, injektiver Graphenhomomorphismen[1] von F nach G im Intervall*

$$(1 \pm \gamma) \cdot \prod_{i=1}^{\ell} |V_i|^{|W_i|} \cdot \prod_{i<j} d_{ij}^{|E(W_i,W_j)|}.$$

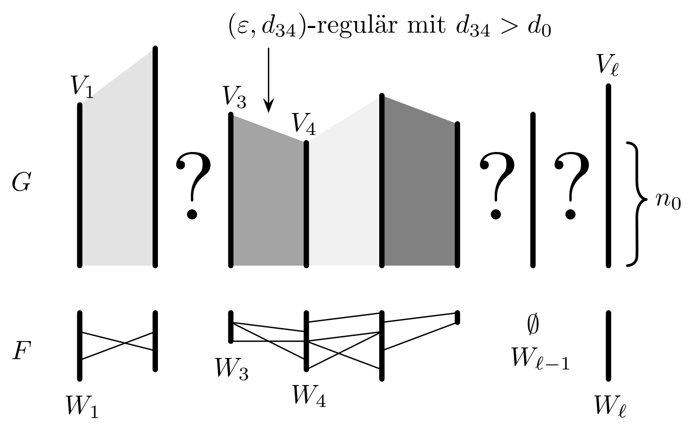

Abbildung 4: Die Beziehung zwischen F und G im Counting Lemma

Satz 3.4 (Erdős-Stone 1946). *Für alle Graphen F und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass*

$$\mathrm{ex}(n, F) \leq \left(\frac{\chi(F) - 2}{\chi(F) - 1} + \varepsilon \right) \binom{n}{2}$$

für $n \geq n_0$ gilt und jeder Graph G mit $n \geq n_0$ Ecken und

$$\left(\frac{\chi(F) - 2}{\chi(F) - 1} + \varepsilon \right) \binom{n}{2}$$

Kanten mindestens $\delta n^{|F|}$ Kopien von F enthält.

Beweis. Seien ein Graph F und $\varepsilon > 0$ gegeben. Setze $d_0 := \varepsilon/6$, $\gamma := 1/2$ und wähle $t_0 \geq \lceil 6/\varepsilon \rceil$ so groß, dass

$$\left(\frac{\chi(F) - 2}{\chi(F) - 1} + \frac{\varepsilon}{8} \right) \frac{t^2}{2} > \|T_{\chi(F)}(t)\|$$

[1] Falls F nicht-triviale Automorphismen hat, ist das nicht die Zahl partiter Kopien von F in G.

für alle $t \geq t_0$. Das ist möglich nach Satz 2.1 (von Turán). Seien $\varepsilon(F, \gamma, d_0)$ und $n_0(\varepsilon, \gamma, d_0)$ die Zahlen, die das Counting Lemma zu den Parametern F, γ und d_0 liefert. Setze

$$\varepsilon' := \min\{\varepsilon/6, \varepsilon(F, \gamma, d_0)\}.$$

Von n_0 verlangen wir vorerst lediglich $n_0 \geq t_0, n_0(F, \gamma, d_0)$. Später werden wir an zwei Stellen zusätzlich voraussetzen, dass n_0 bereits hier hinreichend groß gewählt wurde, um die dann benötigten Abschätzungen wahr zu machen. Nach Satz 3.1, dem Regularitätslemma, gibt es eine natürliche Zahl T_0, so dass jeder Graph auf mindestens t_0 Ecken eine ε'-reguläre Partition in mindestens t_0 und höchstens T_0 Klassen hat. Setze

$$\delta := \frac{d_0^{\|F\|}}{|F|!\; T_0^{|F|}} \cdot \frac{1}{2^{|F|+1}}.$$

Sei G ein Graph wie in der Behauptung. Dann hat G nach Wahl von T_0 eine ε'-reguläre Partition $V_0 \cup \ldots \cup V_t$ mit $t_0 \leq t \leq T_0$.

Nun löschen wir alle Kanten von G, die nicht von einem (ε', d)-regulären Paar mit $d \geq d_0$ induziert werden. Das sind höchstens $\frac{\varepsilon}{2} n^2$ viele, wie in Tabelle 3 dargestellt. Wir

Art der Kante $e \in E(G)$	obere Schranke
$e \cap V_0 \neq \emptyset$	$\lvert V_0\rvert\lvert G\rvert \leq \varepsilon' n^2 \leq \varepsilon n^2/6$
$e \subseteq V_i$ $(i \in [t])$	$t\binom{n/t}{2} \leq n^2/(2t) \leq n^2/(2t_0) \leq \varepsilon n^2/12$
e in nicht-ε'-regulärem Paar	$\varepsilon' \binom{t}{2}(\frac{n}{t})^2 \leq \varepsilon' n^2/2 \leq \varepsilon n^2/12$
e in $(\varepsilon', < d_0)$-regulärem Paar	$d_0(\frac{n}{t})^2\binom{t}{2} \leq d_0 n^2/2 \leq \varepsilon n^2/12$
e nicht in $(\varepsilon', \geq d_0)$-regulärem Paar	$5\varepsilon n^2/12$

Tabelle 3: Kanten außerhalb $(\varepsilon', \geq d_0)$-regulärer Paare von G.

können die Kantenzahl des so entstehenden Graphen G' nach unten abschätzen durch

$$\begin{aligned} \|G'\| &\geq \|G\| - \frac{5}{12}\varepsilon n^2 \geq \left(\frac{\chi(F)-2}{\chi(F)-1} + \varepsilon\right)\binom{n}{2} - \frac{5}{12}\varepsilon n^2 \\ &\overset{n_0 \text{ groß}}{\geq} \left(\frac{\chi(F)-2}{\chi(F)-1} + \frac{\varepsilon}{7}\right)\binom{n}{2}. \end{aligned}$$

Der Graph $R := ([t], E_R)$ sei die „Projektion“ von G' auf die Partitionsklassen: es sei $ij \in E_R$ genau dann, wenn G' eine Kante zwischen V_i und V_j hat (insbesondere ist dann (V_i, V_j) ein ε'-reguläres Paar mit Dichte größer d_0). Es gilt

$$\begin{aligned} \|R\| &\geq \frac{\|G'\|}{(n/t)^2} \geq \left(\frac{\chi(F)-2}{\chi(F)-1} + \frac{\varepsilon}{7}\right)\binom{n}{2}\frac{t^2}{n^2} \\ &\overset{n_0 \text{ groß}}{\geq} \left(\frac{\chi(F)-2}{\chi(F)-1} + \frac{\varepsilon}{8}\right)\frac{t^2}{2} \\ &> \|T_{\chi(F)}(t)\| \overset{\text{Turán}}{=} \operatorname{ex}(t, K_{\chi(F)}) \end{aligned}$$

Kanten. Somit enthält R einen $K_{\chi(F)}$ und G' erfüllt die Voraussetzungen für Satz 3.3 (das Counting Lemma). Folglich ist

$$\#\{F \subseteq G\} \geq \#\{F \subseteq G'\} \geq \frac{1}{2} d_0^{\|F\|} \left(\min_{i \in [t]} |V_i| \right)^{|F|} \frac{1}{|F|!}$$

(wir zählen Kopien, deshalb teilen wir durch eine obere Schranke für die Zahl der Automorphismen von F). Da $|V_i| \geq (1-\varepsilon')n/t \geq n/(2T_0)$ ist $\#\{F \subseteq G\} \geq \delta n^{|F|}$. □

Folgender Satz wurde 1978 von Ruzsa-Szemerédi für den Fall $F = K_3$ bewiesen und 1986 von Erdős-Frankl-Rödl allgemein. Er stellt gewissermaßen die Umkehrung des vorigen Satzes dar.

Satz 3.5 (Removal Lemma). *Für alle Graphen F und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass folgendes wahr ist: Jeder Graph G auf $n \geq n_0$ Ecken mit $\#\{F \subseteq G\} \leq \delta n^{|F|}$ kann durch Löschung von höchstens εn^2 Kanten F-frei gemacht werden.*

Beweis. Seien F und $\varepsilon > 0$ gegeben. Setze $d_0 := \varepsilon/3$, $\gamma := 1/2$, $t_0 := \lceil 3/\varepsilon \rceil$ und

$$\varepsilon' := \min \{\varepsilon/3, \varepsilon(F, \gamma, d_0)\},$$

wobei wieder $\varepsilon(F, \gamma, d_0)$ für die Parameter F, γ und d_0 vom Counting Lemma gegeben ist. Nach dem Regularitätslemma gibt es zu ε' und t_0 Zahlen $n_0, T_0 \in \mathbb{N}$, so dass jeder Graph auf mindestens n_0 Ecken eine ε'-reguläre Partition in mindestens t_0 und höchstens T_0 Klassen hat. Setze

$$\delta := \frac{d_0^{\|F\|}}{|F|! T_0^{|F|}} \cdot 2^{-(|F|+1)}.$$

Sei $n \geq n_0$ groß genug und $G = (V, E)$ wie in der Behauptung. Dann hat G eine ε'-reguläre Partition $V_0 \cup \ldots \cup V_t = V$ mit $t_0 \leq t \leq T_0$. Lösche alle Kanten von G, die nicht in einem ε'-regulären Paar mit Dichte größer d_0 enthalten sind. Eine ähnliche Rechnung wie im Beweis von Erdős-Stone ergibt, dass dies höchstens εn^2 Kanten sind. Der entstehende Graph G' ist F-frei: Angenommen nicht, dann gibt es eine Kopie F' von F in G'. Für geeignetes $\ell \leq |F|$ sei $W_{i_1} \cup \ldots \cup W_{i_\ell} = V(F)$ eine Partition von F, so dass F' die Bilder der Ecken auf W_{i_j} jeweils in V_{i_j} hat. Nach Konstruktion von G' ist (V_{i_j}, V_{i_k}) ein ε'-reguläres Paar mit Dichte größer d_0 falls $E(W_{i_j}, W_{i_k}) \neq \emptyset$. Das Counting Lemma impliziert folglich den Widerspruch

$$\#\{F \subseteq G\} \geq \#\{F \subseteq G'\} \geq \frac{1}{2} d_0^{\|F\|} \prod_{j=1}^{\ell} |V_{i_j}|^{|W_{i_j}|} \frac{1}{|F|!} \geq 2\delta n^{|F|}.$$

□

Satz 3.6 (Roth 1953). *$r_3(n) = o(n)$.*

Beweis. Wir müssen zeigen: für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $r_3(n) \leq \varepsilon n$ für alle $n \geq n_0$. Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben und $\delta = \delta(K_3, \varepsilon)$ die Konstante des Removal Lemmas. Abgesehen von $n_0 \geq n_0(K_3, \varepsilon)$ soll n_0 außerdem so groß sein, dass

$$\frac{1}{3}\binom{6n}{2} \leq \delta\,(6n)^3$$

für alle $n \geq n_0$. Sei $A \subseteq [n]$ frei von arithmetischen Progressionen der Länge 3 (kurz: AP-3-frei). Konstruiere den Hilfsgraphen G (vgl. Abb. 5) mit Eckenmenge $V(G) := \bigcup_{i=1}^{3}(\{i\} \times [in])$ durch „einzeichnen" der AP-3s mit Schrittweite in A: füge alle Kanten von Dreiecken der Form $(1, x)(2, x + a)(3, x + 2a)$ mit $x \in [n]$ und $a \in A$ hinzu.

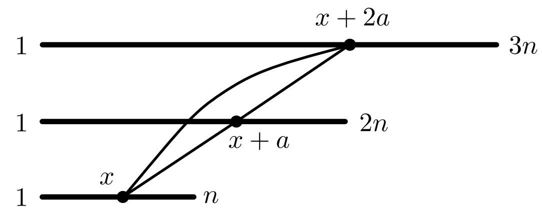

Abbildung 5: Der Hilfsgraph G für die AP-3-freie Menge A.

Trivialerweise ist jede Kante in einem K_3 enthalten. Allerdings ist dieser K_3 auch eindeutig: ein Dreieck in G hat nach Konstruktion immer die Form $(1, x)(2, x+a)(3, x+2b)$ mit $x \in [n]$ und $a, b \in A$. Dann ist aber auch $2b - a \in A$ und somit $a = b$, sonst wäre $\{a, b, 2b - a\}$ eine AP-3 in A mit Widerspruch.

Somit ist $\#\{K_3 \subseteq G\} = \|G\|/3 \leq \binom{6n}{2}/3 \leq \delta n^3$. Nach dem Removal Lemma können wir G durch Löschen von höchstens εn^2 Kanten K_3-frei machen. Weil die Dreiecke kantendisjunkt sind, muss also $|A|n = \#\{K_3 \subseteq G\} \leq \varepsilon n^2$ gelten. Das zeigt $|A| \leq \varepsilon n$. $\square$

Chvátal, Szemerédi, Trotter und Rödl bewiesen 1983 folgenden

Satz 3.7 (Embedding Lemma). *Für alle $\Delta \in \mathbb{N}$ und $d_0 > 0$ gibt es $\varepsilon_0, c_0 > 0$ so dass folgende Aussage wahr ist: Sind für irgendein $\ell \in \mathbb{N}$ die Graphen G und F beide ℓ-partit Graphen (mit Partitionen $V(G) = V_1 \cup \ldots \cup V_\ell$ und $V(F) = W_1 \cup \ldots \cup W_\ell$) und ist F ein Graph auf $[\ell]$, so dass*

1. *$|W_i| \leq c_0|V_i|$ für $i = 1, \ldots, \ell$*
2. *für alle $ij \in E(F)$ ist (V_i, V_j) ein (ε_0, d_{ij})-reguläres Paar mit Dichte $d_{ij} \geq d_0$*
3. *es gibt einen Graphenhomomorphismus $\varphi : F \to F$ mit $\varphi(W_i) = \{i\}$ für $i = 1, \ldots, \ell$*
4. *$\Delta(F) \leq \Delta$*

gibt es eine partit-isomorphe Kopie von F in G.

Beweis. Setze $c_0 := d_0^\Delta/2$ und wähle $\varepsilon_0 < d_0$ klein genug, dass

$$(d_0 - \varepsilon_0)^\Delta - \Delta\varepsilon_0 \geq c_0.$$

Ein solches ε_0 existiert, da die linke Seite mit $\varepsilon_0 \to 0$ gegen $d_0^\Delta = 2c_0$ strebt. Sei $w_1, \ldots, w_n$ irgendeine Aufzählung der Ecken von F. Das definiert eine Funktion $\sigma : [n] \to [\ell]$, die jedem Index einer Ecke den Index der zugehörigen Partitionsklasse zuordnet: $w_i \in W_{\sigma(i)}$ für alle $i \in [n]$.

Wir werden nun für die Ecken von F – eine nach der anderen – passende Bilder in G suchen. Im j-ten Schritt legen wir dabei das Bild v_j von w_j fest. Außerdem führen wir Buch: mit Y_i^j bezeichnen wir all diejenigen Ecken von G, die nach dem j-ten Schritt (also nach der Wahl von v_1 bis v_j) noch als Bild der i-ten Ecke in Frage kommen. Für jede Ecke w_i gibt es dann eine Folge $Y_i^0 \supseteq \ldots \supseteq Y_i^{i-1} \ni v_i$. Durch $Y_i^0 := V_{\sigma(i)}$ wird sichergestellt, dass die konstruierte Abbildung die Partition respektiert. Damit sie auch ein Graphenhomomorphismus wird, setzen wir für alle $i > j$

$$Y_i^j := \begin{cases} N(v_j) \cap Y_i^{j-1} & \text{falls } w_j w_i \in E(F) \\ Y_i^{j-1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es bleibt zu zeigen, dass wir die v_i so wählen können, dass die Abbildung injektiv wird. Insbesondere müssen wir nachweisen, dass wir sie überhaupt wählen können: $Y_i^{i-1} \neq \emptyset$. Das ist nun die Stelle, an der die eigentliche Beweisarbeit passiert. Wir zeigen nun mit Induktion nach j, dass wir v_j stets so wählen können, dass $|Y_i^j| \geq (d_0 - \varepsilon)|Y_i^{j-1}|$ für alle $i > j$ mit $w_j w_i \in E(F)$ und v_j ist verschieden von allen vorigen Bildern. Angenommen wir haben die Bilder in allen vorigen Schritten so gewählt und müssen nun v_j wählen. Nach Annahme ist für alle $i \geq j$

$$\left|Y_i^{j-1}\right| \geq (d_0 - \varepsilon_0)^\Delta \left|V_{\sigma(i)}\right| \geq (c_0 + \Delta\varepsilon_0) \left|V_{\sigma(i)}\right|,$$

$$\text{insbesondere} \quad \left|Y_i^{j-1}\right| \geq \varepsilon_0 \left|V_{\sigma(i)}\right| \quad \text{und} \quad \left|Y_j^{j-1}\right| \geq \left|W_{\sigma(j)}\right| + \Delta\varepsilon_0 \left|V_{\sigma(j)}\right|.$$

Sei $i > j$ mit $w_j w_i \in E(F)$. Dann ist $ji \in E(F)$ somit ist $(V_{\sigma(j)}, V_{\sigma(i)})$ ein ε_0-reguläres Paar mit Dichte $\geq d_0$ nach Voraussetzung. Aber $Y_i^{j-1} \subseteq V_{\sigma(i)}$ und $|Y_i^{j-1}| \geq \varepsilon_0 |V_{\sigma(i)}$. Nach Proposition 3.2 gibt es folglich weniger als $\varepsilon|V_{\sigma(j)}|$ Ecken in $V_{\sigma(j)}$, die nicht mindestens $(d_0 - \varepsilon_0)|Y_i^{j-1}|$ Nachbarn in $|Y_i^{j-1}|$ haben. Diese Ecken wollen wir nicht als Bild von w_j wählen. Da es jedoch höchstens Δ solche i gibt, ist die Zahl dieser „schlechten“ Wahlen für v_j (in ganz $V_{\sigma(j)}$) weniger als $\Delta\varepsilon_0|V_{\sigma(j)}|$. Selbst wenn sie alle in Y_j^{j-1} lägen, blieben demnach immer noch $|W_{\sigma(j)}|$ Ecken übrig – genug um v_j verschieden von allen vorigen Bilder zu wählen. Außerdem ist wie gewollt $|Y_i^j| \geq (d_0 - \varepsilon_0)|Y_i^{j-1}|$ für alle $i > j$ mit $w_j w_i \in E(F)$. □

Man beachte, dass – anders als bei den vorigen Lemmata – das Regularitätslemma weder direkt nocht indirekt (Counting Lemma) benutzt wurde. Im Zusammenspiel mit dem Regularitätslemma ist jedoch auch das vergleichsweise schwache Embedding Lemma sehr nützlich, wie folgende Anwendung für lineare Ramsey-Zahlen zeigt:

Satz 3.8 (Chvátal, Rödl, Szemerédi, Trotter 1983). *Für jede natürliche Zahl Δ gibt es eine Konstante c, so dass $R(F) \leq c|F|$ für alle Graphen F mit $\Delta(F) \leq \Delta$.*

Beweis. Sei $\Delta \in \mathbb{N}$ gegeben. Für Δ und $d_0 := 1/2$ liefert das Embedding Lemma Konstanten ε_0 und c_0, so dass seine Aussage wahr ist. Sei t_0 die Ramseyzahl von $K^{\Delta+1}$ und $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ positiv aber klein genug, dass für alle $t \geq t_0$

$$2\varepsilon < \frac{1}{t_0 - 1} - \frac{1}{t}.$$

Nach dem Regularitätslemma gibt es eine natürliche Zahl T_0, so dass jeder Graph auf mindestens t_0 Ecken eine ε-reguläre Partition in mindestens t_0 und höchstens T_0 Klassen hat. Wir beweisen nun den Satz für

$$c := \frac{c_0 T_0}{1 - \varepsilon}.$$

Sei F ein Graph mit Maximalgrad höchstens Δ und G ein beliebiger Graph mit (mindestens) $c|F|$ Ecken. Wir müssen zeigen, dass $F \subseteq G$ oder $F \subseteq \bar{G}$ gilt. Offenbar ist $|G| \geq t_0$. Somit gibt es eine ε-reguläre Partition $V_0 \cup \ldots \cup V_t = V(G)$ von G mit $t_0 \leq t \leq T_0$. Sei $\ell := |V_1| = \ldots = |V_t|$. Es gilt

$$\ell = \frac{|G| - |V_0|}{t} \geq \frac{(1-\varepsilon)|G|}{T_0} \geq c|F|\frac{1-\varepsilon}{T_0} = c_0|F|.$$

Definiere einen Hilfsgraphen H mit Eckenmenge $[\ell]$ wie folgt: ij ist eine Kante von H genau dann wenn (V_i, V_j) ein ε-reguläres Paar (beliebiger Dichte) in G ist. Für die Kantenzahl von H gilt

$$\begin{aligned} \|H\| &\geq \binom{t}{2} - \varepsilon t^2 = \frac{1}{2}t^2\left(1 - \frac{1}{t} - 2\varepsilon\right) \\ &> \frac{1}{2}t^2\left(1 - \frac{1}{t_0 - 1}\right) = \frac{1}{2}t^2\frac{t_0 - 2}{t_0 - 1} \geq \|T_{t_0-1}(t)\|. \end{aligned}$$

Zur Erinnerung: $T_{t_0-1}(t)$ ist der (t_0-1)-partite Turán-Graph auf t Ecken. Somit enthält H einen K^{t_0}. Färbe nun diejenigen Kanten von H rot, für die das zugehörige ε-reguläre Paar in G eine Dichte von mindestens $1/2$ hat und alle übrigen Kanten blau. Beachte, dass die blaue Kanten ε-regulären Paaren von $\bar{G}$ mit Dichte $> 1/2$ entsprechen[2]. Sei H_r Teilgraph von H mit allen roten Kanten und H_b der mit allen blauen Kanten. Wir wollen nun das Embedding Lemma für Δ und $d_0 = 1/2$ auf F, H_r und G oder auf F, H_b und $\bar{G}$ anwenden. Dazu brauchen wir noch eine geeignete Partition $W_1 \cup \ldots \cup W_t = V(F)$ von F, so dass es einen Homomorphismus $\varphi_r : F \to H_r$ oder $\varphi_b : F \to H_b$ gibt, der die Partition respektiert (Wegen $\ell \geq c_0|F| \geq |W_i$ müssen wir uns um die Größen der Klassen nicht sorgen).

[2]Wie man leicht sieht, ist ganz allgemein ein (ε, d)-reguläres Paar in einem Graphen G ein $(\varepsilon, 1-d)$-reguläres Paar in $\bar{G}$.

Nach Wahl von t_0 enthält der K^{t_0} in H einen einfarbigen $K^{\Delta+1}$, insbesondere also einen o.B.d.A. roten $K^{\chi(F)}$. Ergänze eine beliebige Partition von F in $\chi(F)$ Klassen durch leere Klassen und wähle die Indizes so, dass alle nicht-leeren Klassen als Index eine Ecke des $K^{\chi(F)}$ in H_r bekommen. Die so definierte Abbildung $\varphi_r : F \to H_r$ ist ein Graphenhomomorphismus, der die Partition respektiert. □

Der nächste Satz ist eine schwächere und aufgrund deutlich besserer Konstanten algorithmisch bedeutende Version des Regularitätslemmas. Er dient uns außerdem als wichtiges Werkzeug im Beweis des Regularitätslemmas. Eine Partition balancierte Partition $V(G) = V_1 \cup \ldots \cup V_t$ der Eckenmenge eines Graphen G heißt *ε-quasiregulär*, falls für jede Teilmenge $U \subseteq V(G)$ gilt

$$\|G[U]\| = \sum_{i<j} d(V_i, V_j) \cdot |U \cap V_i| \cdot |U \cap V_j| \pm \varepsilon n^2.$$

Satz 3.9 (Frieze-Kannan-Lemma). *Für alle $\varepsilon > 0$ und $t_0 \in \mathbb{N}$ gibt es Zahlen $T_0, n_0 \in \mathbb{N}$, so dass folgendes wahr ist: jeder Graph auf $n \geq n_0$ Ecken hat eine ε-quasireguläre Partition in t Klassen mit wobei $t_0 \leq t \leq T_0$.*

Bemerkung. Das Frieze-Kannan-Lemma folgt sofort aus dem Regularitätslemma, wenn man in einer ε-regulären Partition die Kanten zwischen den Mengen $U_i := U \cap V_i$ zusammenzählt.

Zum Beweis brauchen wir ein recht technisches Lemma, das im Wesentlichen eine spezielle Version der Ungleichung von Cauchy-Schwarz ist.

Lemma 3.10. *Seien $M < N$ positive ganze Zahlen, $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ positive reelle Zahlen mit $\sum_{i=1}^N \sigma_i = 1$ und $d_1, \ldots, d_N$ reelle Zahlen. Dann ist*

$$\sum_{i=1}^{N} {d_i}^2 \sigma_i \geq d^2 + \left(d - \frac{d'}{\sigma'}\right)^2 \frac{\sigma'}{1-\sigma'}$$

wobei $d := \sum_{i=1}^N \sigma_i d_i$, $d' := \sum_{i=1}^M \sigma_i d_i$ und $\sigma' := \sum_{i=1}^M \sigma_i$.

Beweis. Wir zeigen die Aussage zunächst für $N = 2$ und $M = 1$. Offenbar ist

$$\begin{aligned}
d^2 + \left(d - \frac{d'}{\sigma'}\right)^2 \frac{\sigma'}{1-\sigma'} &= d^2 + (d - d_1)^2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \\
&= d^2 + (d_1(\sigma_1 - 1) + d_2\sigma_2)^2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \\
&= (d_1\sigma_1 + d_2\sigma_2)^2 + (d_2 - d_1)^2 \sigma_1\sigma_2 \\
&= {d_1}^2 \left({\sigma_1}^2 + \sigma_1\sigma_2\right) + {d_2}^2 \left({\sigma_2}^2 + \sigma_1\sigma_2\right) \\
&= {d_1}^2\sigma_1 + {d_2}^2\sigma_2
\end{aligned}$$

Nun wenden wir den eben bewiesenen Fall an, um die Behauptung allgemein zu zeigen. Sei dazu $N \geq 3$ und $1 \leq M < N$ beliebig.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} {d_i}^2\sigma_i &= \sum_{i=1}^{M} {d_i}^2\sigma_i + \sum_{i=M+1}^{N} {d_i}^2\sigma_i \\ &\overset{\text{C-S}}{\geq} \frac{d'^2}{\sigma'} + \frac{(d-d')^2}{\sigma-\sigma'} \\ &= \left(\frac{d'}{\sigma'}\right)^2 \sigma' + \left(\frac{d-d'}{\sigma-\sigma'}\right)^2 (\sigma-\sigma') \\ &\overset{(N=2)}{=} d^2 + \left(d - \frac{d'}{\sigma'}\right)^2 \frac{\sigma'}{1-\sigma'}\end{aligned}$$

□

Für den Beweis des Frieze-Kannan-Lemmas brauchen wir noch ein Maß dafür, wie gut eine Partition der Eckenmenge eines Graphen der im Lemma geforderten Eigenschaft gerecht wird. Dazu definieren wir den *Index* einer Partition $\mathcal{P} = (V_1, \ldots, V_t)$ der Eckenmenge eines Graphen G durch

$$\operatorname{ind}\mathcal{P} := \binom{|G|}{2}^{-1} \sum_{i<j} d(V_i, V_j)^2 |V_i||V_j|.$$

Man sieht sofort, dass für jede Partition $\mathcal{P}$ stets $0 \leq \operatorname{ind}\mathcal{P} \leq 1$ gilt.

Beweis des Frieze-Kannan-Lemmas. Sei $\varepsilon > 0$ und o.B.d.A. $t_0 \geq 2/\varepsilon$. Setze

$$T_0 := \max\{t_0, 2/\varepsilon\} \cdot \left(\frac{6}{\varepsilon^2}\right)^{2/\varepsilon^2}$$

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ groß genug und G ein Graph auf $n \geq n_0$ Ecken. Wähle irgendeine balancierte[3] Partition $\mathcal{P}_0$ von G. Wir konstruieren nun eine Folge $\mathcal{P}_1, \ldots$ von Partitionen von G: falls $\mathcal{P}_i$ auch ε-quasiregulär ist, sind wir fertig. Andernfalls finden wir eine balancierte Partition $\mathcal{P}_{i+1}$ von G in höchstens T_0 Klassen, so dass $\operatorname{ind}\mathcal{P}_{i+1} \geq \operatorname{ind}\mathcal{P}_i + \varepsilon^2/2$. Da die Indizes nach oben durch 1 beschränkt sind, sind wir nach endlich vielen (abhängig von ε) Schritten fertig. Sei $\mathcal{P} = (V_1, \ldots, V_t)$ eine balancierte Partition von G in t_0 bis T_0 Klassen, die nicht ε-quasiregulär ist. Es gibt also eine Menge $U \subseteq V(G)$, so dass

$$\left| \|G[U]\| - \sum_{i<j} d(V_i, V_j) \cdot |U \cap V_i| \cdot |U \cap V_j| \right| > \varepsilon n^2.$$

[3]Die Mächtigkeit je zweier Klassen unterscheidet sich höchstens um 1.

Betrachte die Partition $\mathcal{Q} := (U_1, \bar{U}_1, \ldots, U_t, \bar{U}_t)$ mit $U_i := U \cap V_i$ und $\bar{U}_i := V_i \setminus U$. Wir wollen zeigen, dass $\operatorname{ind}\mathcal{Q} \geq \operatorname{ind}\mathcal{P} + \varepsilon^2$. Setze dafür $\varepsilon_{ij} := d(U_i, U_j) - d(V_i, V_j)$. Es gilt

$$\left|\sum_{i<j} \varepsilon_{ij}|U_i||U_j|\right| \geq \varepsilon n^2 - \sum_{i=1}^{t} \|G[U_i]\| \geq \varepsilon n^2 - t\binom{n/t+1}{2} \geq \varepsilon n^2 - \frac{n^2}{t_0} \geq \varepsilon n^2/2.$$

Wir wenden nun Lemma 3.10 mit $N = 4$ und $M = 1$ für jedes Paar $i < j$ an:

$$\underbrace{d(U_i, U_j)}_{d_1}{}^2 \underbrace{\frac{|U_i||U_j|}{|V_i||V_j|}}_{\sigma_1} + \underbrace{d(\bar{U}_i, U_j)}_{d_2}{}^2 \underbrace{\frac{|\bar{U}_i||U_j|}{|V_i||V_j|}}_{\sigma_2} + \underbrace{d(U_i, \bar{U}_j)}_{d_3}{}^2 \underbrace{\frac{|U_i||\bar{U}_j|}{|V_i||V_j|}}_{\sigma_3} + \underbrace{d(\bar{U}_i, \bar{U}_j)}_{d_4}{}^2 \underbrace{\frac{|\bar{U}_i||\bar{U}_j|}{|V_i||V_j|}}_{\sigma_4}$$

$$\geq d^2 + (d - d_1)^2 \frac{\sigma_1}{1 - \sigma_1} \geq d(V_i, V_j)^2 + {\varepsilon_{ij}}^2 \frac{|U_i||U_j|}{|V_i||V_j|}$$

denn $\sum \sigma_i = 1$, $d = \sum d_i \sigma_i = d(V_i, V_j)$ und somit $d - d_1 = \varepsilon_{ij}$. Folglich ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}\mathcal{Q} &\geq \binom{|G|}{2}^{-1} \left(\sum_{i<j} \left(d(V_i, V_j)^2 |V_i||V_j| + {\varepsilon_{ij}}^2 |U_i||U_j| \right) + \sum_i d(U_i, \bar{U}_i)|U_i||\bar{U}_i| \right) \\
&\geq \operatorname{ind}\mathcal{P} + \binom{|G|}{2}^{-1} \sum_{i<j} {\varepsilon_{ij}}^2 |U_i||U_j| \overset{\text{C-S}}{\geq} \operatorname{ind}\mathcal{P} + \frac{\left(\sum_{i<j} \varepsilon_{ij}|U_i||U_j|\right)^2}{\binom{|G|}{2} \sum_{i<j} |U_i||U_j|} \\
&\geq \operatorname{ind}\mathcal{P} + \frac{\varepsilon^2 n^4}{4} \binom{n}{2}^{-2} \geq \operatorname{ind}\mathcal{P} + \varepsilon^2
\end{aligned}$$

Nun ist $\mathcal{Q}$ aber im allgemeinen keineswegs balanciert. Wir zerlegen deshalb jedes V_i in Unterklassen W_{ia} der Mächtigkeit $\lfloor \frac{\varepsilon^2 n}{5t_0} \rfloor$, bzw. $\lfloor \frac{\varepsilon^2 n}{5t_0} \rfloor + 1$, so dass es für jedes i höchstens eine solche Klasse gibt, die sowohl U_i als auch $\bar{U}_i$ schneidet. Die so konstruierte Partition nennen wir $\mathcal{P}_{i+1}$. Um ihren Index zu berechnen, betrachten wir die gröbste gemeinsame Verfeinerung $\mathcal{P}^*$ von $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{P}_{i+1}$ (siehe Abb. 6). Da der Index durch Verfeinern niemals sinken kann, gilt $\operatorname{ind}\mathcal{P}^* \geq \operatorname{ind}\mathcal{Q} \geq \operatorname{ind}\mathcal{P}_i + \varepsilon^2$. Andererseits ist

$$\operatorname{ind}\mathcal{P}^* - \operatorname{ind}\mathcal{P}_{i+1} \leq \binom{n}{2}^{-1} + \sum_{i=1}^{t} \left(\frac{\varepsilon^2 n}{5t} + 1 \right) n \leq \varepsilon^2/2$$

□

Bemerkung.

- Das T_0 nach Frieze-Kannan ist grob von der Form $t_0 \exp(p(1/\varepsilon))$ für ein geeignetes Polynom p kleinen Grades. Damit ist es deutlich kleiner als das T_0 aus dem Regularitätslemma.

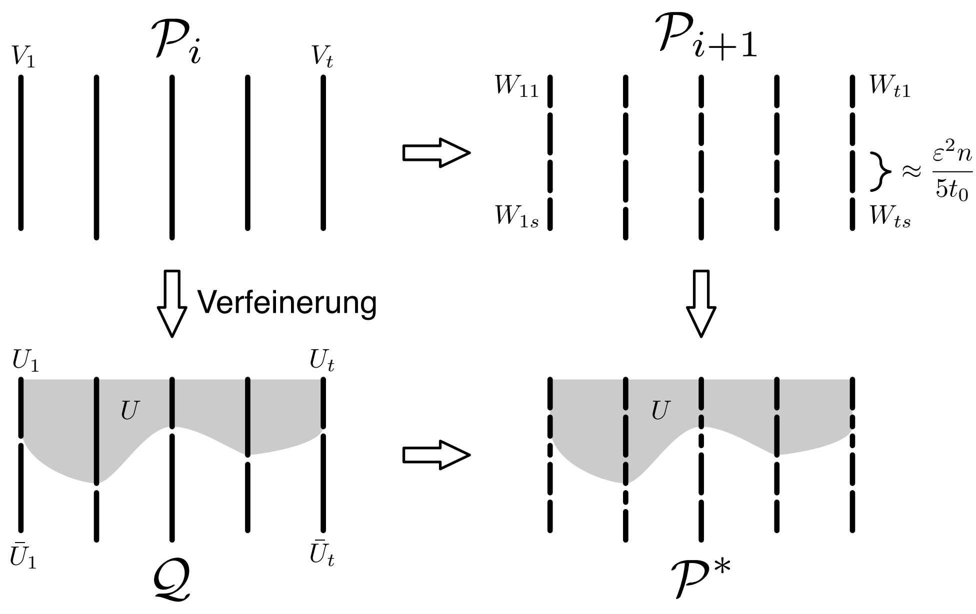

Abbildung 6: Partitionen im Beweis des Frieze-Kannan-Lemmas.

- Die Startpartition in Beweis war beliebig. Wann immer wir eine Frieze-Kannan-Partition wählen dürfen wir also zusätzlich annehmen, dass sie eine beliebige gegebene Partition verfeinert.

Bemerkung. Es gibt Graphen mit Frieze-Kannan-Partition, die nicht dem Regularitätslemma genügen. Ein kanonische Beispiel ist der Graph (V, E) mit $V := \mathcal{P}([n])$ und $XY \in E$ genau dann, wenn $|X \triangle Y| \leq n/2$ (warum?).

Korollar 3.11. *Für $\nu, \varepsilon > 0$, eine Funktion $\delta : \mathbb{N} \to (0, 1]$ und $t_0 \in \mathbb{N}$ gibt es $T_0 \in \mathbb{N}$, so dass folgendes wahr ist: Jeder Graph G hat eine ε-quasireguläre Partition $\mathcal{P} = (V_1, \ldots, V_t)$ und eine $\delta(t)$-quasireguläre Partition $\mathcal{Q} = (W_{11}, \ldots, W_{1s}, W_{21}, \ldots, W_{ts})$ seiner Eckenmenge mit $t_0 \leq t, s \leq T_0$, so dass $V_i = \bigcup_j W_{ij}$ für jedes $i = 1, \ldots, t$ und* $\operatorname{ind} \mathcal{Q} \leq \operatorname{ind} \mathcal{P} + \nu$.

Beweis. Wir nehmen o.B.d.A. $\delta \leq \varepsilon$ an. Sei $\mathcal{P}_\infty$ eine vom Frieze-Kannan-Lemma zu den Parametern ε und t_0 gelieferte Partition in t_1 Klassen. Zu $\mathcal{P}_i$ betrachte die Partition $\mathcal{P}_{i+1}$ in t_{i+1} Klassen, die das Frieze-Kannan-Lemma zu den Parametern $\delta(t_i)$ und t_i liefert. Wir dürfen annehmen, dass $\mathcal{P}_{i+1}$ eine Verfeinerung von $\mathcal{P}_i$ ist. Falls $\operatorname{ind} \mathcal{P}_{i+1} \leq \operatorname{ind} \mathcal{P}_i + \nu$ gilt das Korollar mit $\mathcal{P} := \mathcal{P}_i$ und $\mathcal{Q} := \mathcal{P}_{i+1}$. Da der Index durch 1 beschränkt ist, haben wir spätestens nach $1/\nu$ Schritten geeignete Partitionen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ gefunden. Es gibt also eine nur von den Eingangsgrößen abhängige Zahl T_0 wie in der Behauptung. □

Bemerkung. Ist $\delta(t)$ ein Polynom in $1/t$, so ist T_0 einer Power-Tower Funktion, dessen Höhe ein Polynom in $1/\nu$ ist.

Wir werden nun das Regularitätslemma für eine geringfügig geänderte Definition einer ε-regulären Partition zeigen. Ein Paar (A, B) disjunkter Teilmengen der Eckenmenge eines Graphen nennen wir *ε-quasiregulär*, wenn

$$|E(X,Y)| = d(A,B)|X||Y| \pm \varepsilon|A||B|$$

Im Folgenden verstehen wir unter einer ε-regulären Partition eines Graphen (in t Klassen) eine balancierte Partition $V_1 \cup \ldots \cup V_t$ seiner Eckenmenge, bei der die Paare (V_i, V_j) bis auf höchstens εt^2 Ausnahmen alle ε-quasiregulär sind. Man überzeuge sich (als Übung) davon, dass zwar die beiden Definitionen von Regularität nicht äquivalent sind, wohl aber die damit formulierten Regularitätslemmata. Zunächst zeigen wir eine Abschätzung für die Partitionen aus Korollar 3.11.

Lemma 3.12. *Seien $\gamma, \nu > 0$ und G ein Graph auf n Ecken. Sind $\mathcal{P} = (V_1, \ldots, V_t)$ und $\mathcal{Q} = (W_{11}, \ldots, W_{1s}, W_{21}, \ldots, W_{ts})$ Partitionen der Eckenmenge von G mit $V_i = \bigcup_j W_{ij}$ für alle i und $\operatorname{ind}\mathcal{Q} \leq \operatorname{ind}\mathcal{P} + \nu$, so gilt:*

$$\sum_{i<j} \sum \{|W_{ia}||W_{jb}| : a,b \in [s], |d(W_{ia}, W_{jb}) - d(V_i, V_j)| \geq \gamma\} \leq \frac{\nu}{\gamma^2} n^2$$

Beweis. Für $1 \leq i < j \leq t$ setzen wir

$$A_{ij}^{\pm} := \left\{(a,b) \in [s]^2 : d(W_{ia}, W_{jb}) \geq d(V_i, V_j) \pm \gamma\right\}$$

Für alle Paare $i < j$ gilt

$$d(V_i, V_j)|V_i||V_j| = |E(V_i, V_j)| = \sum_{a,b \in [s]} d(W_{ia}, W_{jb})|W_{ia}||W_{jb}|$$

Deshalb

$$\sum_{a,b \in [s]} d(W_{ia}, W_{jb})^2 |W_{ia}||W_{jb}| \geq d(V_i, V_j)^2 |V_i||V_j| + \gamma^2 \sum_{(a,b) \in A_{ij}^+} |W_{ia}||W_{jb}|$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}\mathcal{Q} &\geq \binom{n}{2}^{-1} \sum_{i<j} \sum_{a,b \in [s]} d(W_{ia}, W_{jb})^2 |W_{ia}||W_{jb}| \\
&\geq \binom{n}{2}^{-1} \sum_{i<j} \left(d(V_i, V_j)^2 |V_i||V_j| + \gamma^2 \sum_{(a,b) \in A_{ij}^+} |W_{ia}||W_{jb}| \right) \\
&= \operatorname{ind}\mathcal{P} + \binom{n}{2}^{-1} \gamma^2 \sum_{i<j} \sum_{(a,b) \in A_{ij}^+} |W_{ia}||W_{jb}| \leq \operatorname{ind}\mathcal{P} + \nu'
\end{aligned}$$

Zusammen mit dem analogen Argument für A_{ij}^- liefert dies die Behauptung. $\square$

Beweis des Regularitätslemmas. Wir wenden Korollar 3.11 mit $\nu' = \varepsilon^4/36^2$, $t_0' = t_0$, $\varepsilon' = 1$ und $\delta'(t) = \varepsilon/(36t^2)$ an und zeigen, dass die damit gewonnene Partition $\mathcal{P}$ die gewünschten Eigenschaften hat. Dazu betrachten wir die mitgelieferte Partition $\mathcal{Q}$ und setzen

$$A_{ij} := \big\{(a,b) \in [s]^2 : |d(W_{ia}, W_{jb} - d(V_i, V_j)| \geq \varepsilon/6\big\}$$

$$I := \left\{(i,j) \in [s]^2 : i < j, \sum_{(a,b)\in A_{ij}} |W_{ia}||W_{jb}| \geq \frac{\varepsilon}{6}|V_i||V_j|\right\}$$

Es gilt die Abschätzung

$$\sum_{i<j} \sum_{(a,b)\in A_{ij}} |W_{ia}||W_{jb}| \geq \sum_{(i,j)\in I} \sum_{(a,b)\in A_{ij}} |W_{ia}||W_{jb}| \geq \frac{\varepsilon}{6} \sum_{(i,j)\in I} |V_i||V_j| \overset{\text{Lemma}}{\leq} \frac{\nu' n^2}{(\varepsilon/6)^2} = \frac{\varepsilon^2 n^2}{36}$$

Insbesondere ist

$$\sum_{(i,j)\in I} |V_i||V_j| \leq \frac{\varepsilon n^2}{6} \qquad \text{und somit} \qquad |I| \leq \frac{2}{3}\varepsilon t^2 \leq \varepsilon t^2$$

Wir zeigen nun: für alle $(i,j) \notin I$ haben wir die gewünschte Quasiregularität. Sei also $(i,j) \notin I$, $U_i \subseteq V_i$ und $U_j \subseteq V_j$. Für $a, b \in [s]$ setze $U_{ia} := U_i \cap W_{ia}$ und $U_{jb} := U_j \cap W_{jb}$. Da $\mathcal{Q}$ eine Frieze-Kannan-Partition ist, gilt

$$|E(U_i, U_j)| = \sum_{a,b\in[s]} d(W_{ia}, W_{jb})|U_{ia}||U_{jb}| \pm 6\delta'(t)n^2$$

Nach Wahl von (i,j) ist

$$\sum_{(a,b)\in A_{ij}} d(W_{ia}, W_{jb})|U_{ia}||U_{jb}| \leq \sum_{(a,b)\in A_{ij}} |W_{ia}||W_{jb}| \leq \frac{\varepsilon}{6}|V_i||V_j|$$

Andererseits ist

$$\sum_{(a,b)\notin A_{ij}} d(W_{ia}, W_{jb})|U_{ia}||U_{jb}| = \sum_{(a,b)\notin A_{ij}} \left(d(V_i, V_j) \pm \frac{\varepsilon}{6}\right) |U_{ia}||U_{jb}|$$

Das bedeutet insgesamt

$$\begin{aligned}
|E(U_i, U_j)| &= \sum_{a,b\in[s]} d(V_i, V_j)|U_{ia}||U_{jb}| \pm \frac{\varepsilon}{6}|U_i||U_j| + \frac{\varepsilon}{6}|V_i||V_j| \pm 6\delta'(t)n^2 \\
&\leq d(U_i, U_j)|U_i||U_j| \pm \varepsilon|V_i||V_j|
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.13. *Sei (A, B) ein (ε, d)-reguläres Paar in einem Graphen G und $0 < \alpha \leq 1$. Für beliebige Teilmengen $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$ mit $|X| \geq \alpha|A|$ und $|Y| \geq \alpha|B|$ ist (X, Y) ein $(\varepsilon/\alpha, d)$-reguläres Paar in G.*

Beweis. Seien $X' \subseteq X$ und $Y' \subseteq Y$ mit $|X'| \geq \varepsilon/\alpha|X|$ und $|Y'| \geq \varepsilon/\alpha|Y|$. Dann ist $|X'| \geq \varepsilon|A|$ und $|Y'| \geq \varepsilon|B|$, also nach Voraussetzung $|d(X',Y') - d| \leq \varepsilon$ □

Wir werden nun zwei Beweise für das Counting Lemma sehen. Der erste beweist eine weniger allgemeine Variante auf anschauliche Weise und kann mit etwas Aufwand auch verallgemeinert werden. Der zweite ist etwas technischer aber impliziert dafür das Counting Lemma, in der von uns angegebenen Form (Satz 3.3).

Beweisskizze für das Spezielle Counting Lemma. Wir nehmen $F = K_\ell$ an und führen Induktion über ℓ durch. Im Falle $\ell = 2$ ist die Zahl partiter Kopien von F in G gerade die Kantenzahl $(1 \pm \gamma)dm^2$. Im allgemeinen ist

$$\#\{K_\ell \subseteq G\} \geq (1 - 2(\ell-1)\varepsilon)m(1-\gamma/2)d^{\binom{\ell-1}{2}}\left((d-\varepsilon)m\right)^{\ell-1} \geq (1-\gamma)d^{\binom{\ell}{2}}m^\ell$$

□

Beweis des Counting Lemmas. Induktion über $\|F\|$. Seien $d_0 > 0$, F und γ gegeben und $e \in E(F)$. Setze $F^- := (V(F), E(F) \setminus \{e\})$ und $F^* := F[V(F) \setminus e]$. Wähle $\varepsilon = \min\{\gamma/2d_0^{\|F\|}, \varepsilon(IV(d_0, F^-, \gamma/2))\}$.

$$\begin{aligned}
\#\{F \subseteq G\} &= \sum_{\varphi: F^- \to G} (d_e + \mathbf{1}_E(\varphi(e)) - d_e) \\
&= d_e \cdot \#\{F^- \subseteq G\} + \sum_{\varphi: F^- \to G} (\mathbf{1}_E(\varphi(v_1v_2)) - d_e) \\
&= d_e \cdot \left(1 \pm \frac{\gamma}{2}\right) \cdot \prod_{i \in V(F)} |V_i| \cdot \prod_{ij \in E(F^-)} d_{ij} + \sum_{\varphi: F^- \to G} (\mathbf{1}_E(\varphi(v_1v_2)) - d_e) \\
&= \left(1 \pm \frac{\gamma}{2}\right) \cdot \prod_{i \in V(F)} |V_i| \cdot \prod_{ij \in E(F)} d_{ij} + \sum_{\varphi: \tilde{F} \to G} \left| \sum_{EXT(\varphi)} (\mathbf{1}_E(\varphi(v_1v_2)) - d_e) \right|
\end{aligned}$$

wobei

$$EXT(\varphi) := \left(V_j \cap \bigcap_{i \in N_{F^-}(j)} N(\varphi(j))\right) \times \left(V_k \cap \bigcap_{i \in N_{F^-}(k)} N(\varphi(k))\right)$$

für $jk = e$. □

ε-reguläre Partition $V_1, \dots, V_t$, $d_{ij} > d_0 >> \varepsilon$.

$$\Rightarrow \#\{K_3 \subseteq G[V_i \cup V_j \cup V_k] = (1 \pm \gamma)d_{ij}d_{ik}d_{jk}|V_i||V_j||V_k|$$

Frage: Gibt es ein K, so dass für alle ℓ ein Algorithmus existiert, der $\#\{K_\ell \subseteq G\}$ für jedes G in $O(n^k)$ approximiert?

Globales Counting Lemma: $\#\{F \subseteq G\}$ lässt sich durch den reduzierten Graphen einer FK-Partition approximieren.

Satz 3.14. *Für alle $\gamma > 0$ und jeden Graphen F gibt es $\varepsilon > 0$ und $t_0, n_0 \in \mathbb{N}$, so dass folgendes wahr ist: Ist G ein Graph auf $n \geq n_0$ Ecken und $V(G) = V_1 \cup \ldots \cup V_t$ eine ε-reguläre Partition mit $t \geq t_0$, so ist*

$$\#\{F \subseteq G\} = \sum_{i_1,\ldots,i_\ell \in [t]} \prod_{jk \in E(F)} d_{i_j i_k} \prod_{j=1}^{\ell} |V_{i_j}| \pm \gamma n \ell$$

Beweis. Ähnlich wie beim lokalen Counting Lemma per Induktion über $\|F\|$. Die Fälle $\|F\| = 0$ und $\|F\| = 1$ sind trivial. Seien nun γ und F mit $\|F\| > 1$ gegeben. Wähle $\varepsilon \leq \gamma/12$, so dass die Induktionsvoraussetzung für $\gamma' := \gamma/2$ gilt. Für $x, y \in V(G)$ setze

$$d_{\mathcal{P}}(x,y) := \begin{cases} 0 & \exists i : x, y \in V_i \\ d(V_i, V_j) & x \in V_i, y \in V_j \end{cases}$$

O.B.d.A. nehmen wir $(\ell-1)\ell \in E(F)$ an und setzen $F^- := (V(F), E(F) \setminus \{(\ell-1)\ell\})$. Unter Ausnutzung der Identität $\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 = \beta_2(\alpha_1 - \beta_1) + \alpha_1(\alpha_2 - \beta_2)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\left|\#\{F \subseteq G\} - \sum d_{i_j i_k} \prod |V_{i_j}|\right| \\
&= \left| \sum_{x_1,\ldots,x_\ell \in (V)_\ell} \left(\prod_{ij \in E(F)} \mathbf{1}_E(x_i, x_j) - \prod_{ij \in E(F)} d_{\mathcal{P}}(x_i, x_j) \right) \right| \\
&\leq \left| \sum_{x_1,\ldots,x_\ell \in (V)_\ell} d_{\mathcal{P}}(x_{\ell-1} x_\ell) \left(\prod_{ij \in E(F^-)} \mathbf{1}_E(x_i, x_j) - \prod_{ij \in E(F^-)} d_{\mathcal{P}}(x_i, x_j) \right) \right| && \text{(a)} \\
&+ \left| \sum_{x_1,\ldots,x_\ell \in (V)_\ell} \prod_{ij \in E(F^-)} \mathbf{1}_E(x_i, x_j) \left(\mathbf{1}_E(x_{\ell-1}, x_\ell) - d_{\mathcal{P}}(x_{\ell-1}, x_\ell) \right) \right| && \text{(b)}
\end{aligned}$$

Wir schätzen die letzten beiden Summanden separat ab:

$$\begin{aligned}
\text{(a)} &\leq \left| \sum_{x_1,\ldots,x_\ell \in (V)_\ell} \prod_{ij \in E(F^-)} \mathbf{1}_E(x_i, x_j) - \sum_{x_1,\ldots,x_\ell \in (V)_\ell} \prod_{ij \in E(F^-)} d_{\mathcal{P}}(x_i, x_j) \right| \\
&\leq \left| \#\{F^- \subseteq G\} - \sum_{i_1,\ldots,i_\ell \in [t]} \prod_{jk \in E(F^-)} d(V_{i_j}, V_{i_k}) \prod_{j=1}^{\ell} |V_{i_j}| \right| \\
&\overset{\text{IV}}{\leq} \gamma' n^\ell
\end{aligned}$$

Sei $F^* := F[[\ell-2]]$ und für eine Kopie $\tilde{F}$ von F^* in G seien $X_{\ell-1}(\tilde{F})$ und $X_\ell(\tilde{F})$ die „Kandidaten" für $x_{\ell-1}$, bzw. x_ℓ:

$$X_{\ell-1}(\tilde{F}) := \bigcap_{i : i(\ell-1) \in E(F)} N_G(x_i) \qquad X_\ell(\tilde{F}) := \bigcap_{i : i\ell \in E(F)} N_G(x_i)$$

$$
\begin{aligned}
\text{(b)} &= \left| \sum_{x_1,\ldots,x_\ell \in (V)_\ell} \prod_{ij \in E(F^*)} \mathbf{1}_E(x_i,x_j) \sum_{x_{\ell-1},x_\ell} (\mathbf{1}_E(x_{\ell-1},x_\ell) - d_{\mathcal{P}}(x_{\ell-1},x_\ell)) \right| \\
&= \left| \sum_{\tilde{F} \subseteq G} \sum_{X_{\ell-1}(\tilde{F}) \times X_\ell(\tilde{F})} (\mathbf{1}_E(x_{\ell-1},x_\ell) - d_{\mathcal{P}}(x_{\ell-1},x_\ell)) \right| \\
&\le n^{\ell-2} \varepsilon n^2 \le \gamma' n^\ell
\end{aligned}
$$

Somit ist (a) + (b) $\le \gamma n^\ell$. □

Die *Ramsey-Turán-Zahl* $RT(n, F, m)$ ist definiert als

$$RT(n, F, m) := \max\{\|G\| : |G| = n,\ F \nsubseteq G,\ \alpha(G) \le m\}.$$

Natürlich ist $RT(n, F, m) \le \operatorname{ex}(n, F)$. Wir nehmen an, dass m als Funktion von n in $o(n)$ ist und setzen

$$\theta(F) := \lim_{\delta\to 0} \lim_{n\to\infty} \left(RT(n, F, \delta n) \binom{n}{2}^{-1} \right)$$

und $rt(n, F, o(n) := \theta(F)\binom{n}{2}$. Was bedeutet $rt(n, F, o(n)) \le f(n) + o(n^2)$ formal?

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, n_0 \in \mathbb{N} \forall n \ge n_0 : RT(n, F, \delta n) \le f(n) + \varepsilon n^2$$

Man sieht leicht, dass $rt(n, K_3, o(n)) = o(n^2)$ (die Nachbarschaft einer Ecke muss eine unabhängige Menge sein). Szemerédi hat 1973 gezeigt, dass außerdem $rt(n, K_4, o(n)) \le n^2/8 + o(n^2)$. Viel besser geht es auch nicht: Bollobás und Erdős fanden 1977 eine Folge G_n von Graphen mit $|G_n| = n$, $\alpha(G_n) = o(n)$ und $K_4 \nsubseteq G_n$, aber $\|G_n\| \ge n^2/8 - o(n^2)$.

Satz 3.15. *Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass folgendes wahr ist: jeder Graph auf $n \ge n_0$ Ecken mit $\alpha(G) \le \delta n$ und $\|G\| \ge (1/8 + \varepsilon)n^2$ enthält einen K_4.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Setze $t_0 := 1/\varepsilon$ und $d_0 := \varepsilon/6$. Zu diesen d_0, t_0 und $\varepsilon' := \min\{\varepsilon/6, \varepsilon_{CL}(\gamma = 1/2, d_0, F = K_3)\}$ liefert das Regularitätslemma ein T_0. Setze schließlich

$$\delta := \min\left\{ \frac{1}{3T_0}, \frac{\varepsilon'}{T_0}, \frac{{d_0}^3}{3T_0} \right\}.$$

Sei G ein Graph wie in der Behauptung und $(V_1, \ldots, V_t)$ eine ε'-reguläre Szemerédi-Partition.

Behauptung. Es gibt keine Indizes $1 \le i < j < k \le t$, so dass die Paare (V_i, V_j), (V_i, V_k) und (V_j, V_k) alle ε'-regulär sind mit $d_{ij}, d_{ik}, d_{jk} \ge d_0$.

Beweis von Satz 3. Angenommen doch, dann finden wir mit Hilfe des Countinglemmas viele Dreiecke:

$$\#\{K_3 \subseteq G[V_i \cup V_j \cup V_k]\} \ge \frac{1}{2} {d_0}^3 |V_i||V_j||V_k|$$

Es gibt somit eine Kante v_iv_j mit $v_i \in V_i$ und $v_j \in V_j$, so dass (vgl. Abb. 7)

$$|\underbrace{\{w \in V_k : v_iv_jw \text{ spannt einen } K_3 \text{ auf}\}}_{W}| \geq \frac{1}{2}{d_0}^3|V_k|$$

Insbesondere ist $|W| \geq \delta n$. Somit ist W nicht unabhängig. Zusammen mit v_i und v_j spannt eine Kante in W aber K_4 auf, Widerspruch. □

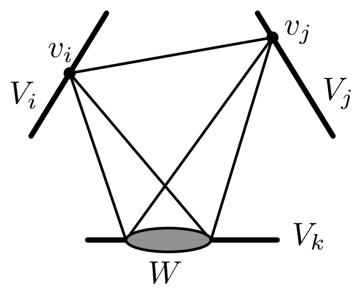

Abbildung 7: Eine Kante in W liefert einen K_4.

Behauptung. Es gibt kein ε'-reguläres Paar (V_i, V_j) mit $d_{ij} \geq 1/2 + 2\varepsilon'$.

Beweis von Abb. 3. Angenommen doch. Sei (V_i, V_j) ein (ε', d)-regläres Paar mit $d \geq 1/2 + 2\varepsilon'$. Es gibt eine Teilmenge $U_i \subseteq V_i$, so dass

$$|U_i| \geq (1-\varepsilon')|V_i| \qquad \text{und} \qquad \forall u \in U_i : |N_{G'}(u) \cap V_j| \geq \left(\frac{1}{2} + \varepsilon'\right)|V_j| \qquad (*)$$

Da $|U_i| \geq |V_i|/2 \geq n/(2T_0) \geq \delta n$ gibt es nach Voraussetzung eine Kante uw in $G[U_i]$ (vgl. Abb. 8). Wegen (*) ist dann

$$|N_G(u) \cap N_G(w) \cap V_j| \geq 2\varepsilon'|V_j|.$$

Es gibt somit eine Kante xy in $G[U_j]$, die mit u und w zusammen einen K_4 aufspannt, Widerspruch. □

Beide Behauptungen zusammen implizieren den Satz: G hat höchstens

$$\frac{t^2}{4}\left(\frac{1}{2} + 2\varepsilon'\right)\left(\frac{n}{t} + 1\right)^2 \leq \frac{n^2}{8} + \frac{3}{4}\varepsilon' n^2$$

viele Kanten in regulären Paaren. Das widerspricht aber der vorausgesetzten Kantenzahl von G, denn

$$\|G\| \leq \frac{n^2}{8} + \frac{3}{4}\varepsilon' n^2 + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}n^2}_{\text{gelöschte Kanten}} \leq \left(\frac{1}{8} + \varepsilon\right)n^2$$

□

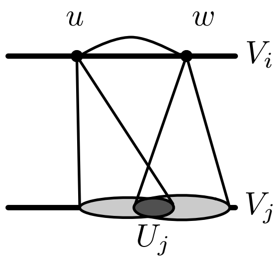

Abbildung 8: Eine Kante in U_j liefert einen K_4.

Abschlussbemerkungen zum Regularity Lemma

- Removal Lemma (und Verallgemeinerungen): Mit $n := |G|$ und $\ell := |F|$ gilt

$$\#\{F \subseteq G\} = o(n^\ell) \Rightarrow o(n^2) \text{ Kanten treffen alle } F \subseteq G$$

1. Induzierte Variante: ist die Zahl induzierter Kopien von F in G in $o(n^\ell)$, so kann G durch Einfügen und Entfernen von $o(n^2)$ Kanten frei von induzierten Kopien von F gemacht werden (Alon, Fischer, Krivelovich, M. Szegedy 2000).
2. Familienvariante: Für jede unendliche Famile $\mathcal{F}$ von Graphen und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ und $L, n_0 \in \mathbb{N}$, so dass jeder Graph G mit $n \geq n_0$ Ecken, der für jedes $F \in \mathcal{F}$ mit $\ell := |F| \leq L$ höchstens δn^ℓ induzierte Kopien von F enthält, durch Einfügen und Entfernen von höchstens εn^2 Kanten so abgeändert werden kann, dass er für kein $F \in \mathcal{F}$ eine induzierte Kopie von F enthält (Alon, Shipira 200/7).
3. Embedding Lemma: Für alle $\Delta \in \mathbb{N}$ und $d_0 > 0$ gibt es Konstanten $\varepsilon, c > 0$, so dass wann immer H, F, G Graphen sind mit $\Delta(H) \leq \Delta$, es einen Homomorphismus $\varphi : H \to F$ gibt, der die Klassen $W_1 \cup \ldots \cup W_\ell = V(H)$ (wobei $\ell := |F|$) erhält und $|W_i| \leq c|V_i|$ mit Klassen $V_1 \cup \ldots \cup V_\ell = V(G)$ von G, so dass für $ij \in E(F)$ das Paar (V_i, V_j) ein (ε, d_{ij})-reguläres Paar ist mit $d_{ij} \geq d_0$, dann gibt es eine Kopie von H in G.
4. Blow-Up Lemma: tauscht die Konstante c im Embedding Lemma gegen „superregulär“: ein ε-reguläres Paar (X, Y) ist ε-superregulär, wenn

$$\forall x \in X : |N(x) \cap Y| \geq \varepsilon|Y| \qquad \forall y \in Y : |N(y) \cap X| \geq \varepsilon|X|$$

Department Mathematik
Diskrete Mathematik
Dozent: Dr. Mathias Schacht

WS 2009/10
24. November 2009

Extremale Graphentheorie

1. Serie

Besprechung am 1. Dezember 2009

Aufgabe 1
Die *obere Kantendichte* eines unendlichen Graphen G ist das Infimum aller reellen Zahlen α, so dass die endlichen Untergraphen $H \subseteq G$ mit $e(H)/\binom{|V(H)|}{2} > \alpha$ beschränkte Ordnung haben. Zeige, dass diese Zahl stets in $\{1 - 1/k\colon\ k \in \mathbb{N}\}\dot{\cup}\{1\}$ liegt.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass die verschiedenen Varianten des Regularitätslemmas von Szemerédi, welche in der Vorlesung vorgestellt wurden, äquivalent sind.

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$, $d_0 > 0$ und $\gamma > 0$ ein $\varepsilon > 0$ und ein n_0 existieren, so dass für jeden bipartiten Graphen $G = (A, B; E)$ mit $|A| = |B| = n \geq n_0$ und Dichte $d \geq d_0$ das Folgende gilt. Ist (A, B) ein ε-reguläres Paar, dann erfüllen alle bis auf $\gamma\binom{n}{k}$ Elemente $\{a_1, \ldots, a_k\} \in \binom{A}{k}$

$$(1 - \gamma)d^k n \leq \Big|\bigcap_{i\in[k]} N_G(a_i)\Big| \leq (1 + \gamma)d^k n.$$

Gilt die Umkehrung für $k = 1$?

Aufgabe 4
Sei G ein Graph auf n Knoten mit der Eigenschaft, dass jede Kante in genau einem Dreieck enthalten ist. Zeigen Sie, dass $e(G) = o(n^2)$ gilt.
Stimmt die Aussage noch, wenn jede Kante in höchstens einem Dreieck bzw. in mindestens einem Dreieck enthalten ist?

Aufgabe 5
Eine Familie von Paarungen $M_1, \ldots, M_k$ sind *induziert*, falls $e \nsubseteq \bigcup_{f\in M_j} f$ für alle $i \neq j$ und alle $e \in M_i$ gilt.
Sei G ein Graph auf n Knoten mit der Eigenschaft, dass $E(G) = \bigcup_{i\in[n]} M_i$ die Vereinigung von n induzierten Paarungen ist. Zeigen Sie, dass $e(G) = o(n^2)$.

Lösungen der 1. Serie

Aufgabe 1. Die obere Kantendichte α eines unendlichen Graphen G ist entweder 1 oder von der Form $(k-1)/k$ mit $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. Angenommen nicht. Dann gibt es eine eindeutige Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{k-1}{k} < \alpha < \frac{k}{k+1}.$$

Wir zeigen nun, dass G jeden endlichen Graphen F mit $\chi(F) \leq k+1$ als Teilgraphen enthält. Sei ein solches F gegeben. Wähle irgendein $\varepsilon > 0$, so dass $(k-1)/k + \varepsilon < \alpha$. Nach Definition von α enthält G beliebig große endliche Teilgraphen mit Kantendichte größer $(k-1)/k + \varepsilon$. Das bedeutet aber $F \subseteq G$, denn nach dem Satz von Erdős-Stone (Satz 2.5) gilt

$$\operatorname{ex}(n, F)\binom{n}{2}^{-1} \leq 1 - \frac{1}{\chi(F)-1} + \varepsilon \leq 1 - \frac{1}{k} + \varepsilon = \frac{k-1}{k} + \varepsilon.$$

für hinreichend große n (abhängig von ε und F).

Insbesondere enthält G für jedes $s \in \mathbb{N}$ den Graphen $F = K_{k+1}(s)$, den vollständigen $(k+1)$-partiten Graphen mit Klassen der Größe s. Mit wachsendem s werden diese Graphen beliebig groß und gleichzeitig nähert sich ihre Kantendichte an $k/(k+1)$ – im Widerspruch zu $\alpha < k/(k+1)$:

$$\|K_{k+1}(s)\|\binom{|K_{k+1}(s)|}{2}^{-1} = \frac{2s(k+1)ks}{2s(k+1)((k+1)s-1)} = \frac{k}{k+1-1/s}$$

$\square$

Aufgabe 2. Wir kennen folgende drei Definitionen einer ε-regulären Partition:

1. Eine Partition $V_0 \cup V_1 \cup \ldots V_t$ der Eckenmenge V eines Graphen G heißt ε-regulär (in t Klassen), wenn $|V_0| \leq \varepsilon |V|$, $|V_1| = \ldots = |V_t|$ und alle bis auf höchstens εt^2 der Paare (V_i, V_j) sind ε-regulär.

2. Eine Partition $V_0 \cup V_1 \cup \ldots V_t$ der Eckenmenge V eines Graphen G heißt ε-regulär (in t Klassen), wenn $|V_0| \leq \varepsilon |V|$, $|V_1| = \ldots = |V_t|$ und alle bis auf höchstens $\varepsilon\binom{t}{2}$ der Paare (V_i, V_j) sind ε-regulär.

3. Eine balancierte Partition $V_1 \cup \ldots \cup V_t$ der Eckenmenge V eines Graphen G heißt ε-regulär (in t Klassen), wenn die Paare (V_i, V_j) bis auf höchstens εt^2 Ausnahmen alle ε-quasiregulär sind.

Die obigen drei Definitionen einer ε-regulären Partition geben äquivalente Varianten des Regularitätslemmas.

Beweis. Wir bezeichnen die Varianten des Regularitätslemmas mit der Nummer der verwendeten Definition als (1), (2) und (3) und zeigen (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).

Für (1) $\Rightarrow$ (2) seien ε und t_0 gegeben. Sei T_0 die Zahl, die (1) zu den Parametern $\varepsilon' := \varepsilon/3$ und $t_0' := \max\{t_0, 3\}$ liefert. Zu einem gegebenen Graphen G gibt es also eine $(\varepsilon/3)$-reguläre (Variante 1) Partition $V_0 \cup \ldots \cup V_t$ mit $t_0 \leq t_0' \leq t \leq T_0$. Insbesondere sind höchstens $\varepsilon t^2/3 \leq \varepsilon\binom{t}{2}$ der Paare (V_i, V_j) nicht ε-regulär (denn $t \geq 3$). Die Rückrichtung ist trivial.

Zum Nachweis von (2) $\Rightarrow$ (3) seien wiederum ε und t_0 gegeben. Zu den Parametern $\varepsilon' :=$ und $t_0' := t_0$ liefert (2) eine Zahl T_0'. Mit ebendiesem $T_0 := T_0'$ ist (1) wahr (unter den gegebenen Parametern): Sei G ein Graph mit mindestens t_0 Ecken und $V_0' \cup \ldots V_t'$ mit $t_0' \leq t \leq T_0'$ eine ε'-reguläre Partition im Sinne von (2). Durch gleichmäßige Verteilung der Ecken aus V_0' auf die übrigen Klassen und erhält man eine balancierte Partition $V_1 \cup \ldots \cup V_t$ von $V(G)$. Sei $V_{i0} := V_i \cap V_0'$ für $i \in [t]$. Nach Konstruktion ist $\lfloor |V_0'|/t \rfloor \leq |V_{i0}| \leq \lceil |V_0'|/t \rceil$ für $i \in [t]$. Es bleibt lediglich zu zeigen, dass die ε'-Regularität eines Paares (V_i', V_j') die ε-Quasiregularität von (V_i, V_j) impliziert. Seien $U_i \subseteq V_i$ und $U_j \subseteq V_j$ und o.B.d.A. $|U_i| \leq \varepsilon |V_i|$ und $|U_j| \leq \varepsilon |V_j|$. Mit den Abkürzungen $U_i' := U_i \cap V_i'$, $U_{i0} := U_i \cap V_{i0}$, $U_j' := U_j \cap V_j'$ und $U_{j0} := U_j \cap V_{j0}$ ist

$$\begin{aligned}
|E(U_i, U_j)| &= |E(U_i', U_j')| + |E(U_{i0}, U_j)| + |E(U_i, U_{j0})| - |E(U_{i0}, U_{j0})| \\
&= (d(V_i', V_j') \pm \varepsilon')|U_i'||U_j'| \pm \varepsilon' \frac{n}{t}\left\lceil \frac{n}{t} \right\rceil \pm \varepsilon' \frac{n}{t}\left\lceil \frac{n}{t} \right\rceil \pm \left(\varepsilon \frac{n}{t}\right)^2 \\
&= (d(V_i', V_j') \pm \varepsilon)|U_i||U_j|
\end{aligned}$$

In der letzten Abschätzung geht die Wahl eines geeigneten ε' ein, etwa $\varepsilon' < \varepsilon/2$.

Für (3) $\Rightarrow$ (1) seien ε und t_0 gegeben. Sei T_0' die Konstante aus (3) zu den Parametern $\varepsilon' := \varepsilon^3/4$ und $t_0' := t_0$. Dann ist jedes $T_0 \geq T_0'(1 + T_0'/\varepsilon)$ eine geeignete Konstante für (1): sei G ein Graph mit mindestens t_0 Ecken. Ist $|G| \leq T_0$, betrachte eine beliebige Partition $V_0 \cup \ldots \cup V_t = V(G)$ mit $V_0 = \emptyset$ und $|V_1| = \ldots = |V_t| = 1$. Dann ist $t_0 \leq t \leq T_0$ und jedes Paar (V_i, V_j) mit $1 \leq i < j \leq t$ ist ε-regulär für jedes $\varepsilon > 0$. Wir dürfen also $|G| > T_0$ annehmen. Sei $V_1' \cup \ldots \cup V_t'$ eine ε'-reguläre Partition von G im Sinne von (1) in t Klassen mit $t_0' \leq t \leq T_0'$. Durch Verschieben höchstens einer Ecke pro Klasse nach V_0 kann man erreichen, dass in der entstehenden Partition $V_0 \cup \ldots V_t$ alle Klassen (außer V_0) gleich groß sind. Außerdem ist

$$|V_0| < t \leq T_0' \leq \varepsilon \left(\frac{T_0}{T_0'} - 1 \right) < \varepsilon \left(\frac{|G|}{t} - 1 \right) < \varepsilon |V_1|.$$

Ist (V_i', V_j') ein ε'-quasireguläres Paar, so ist (V_i, V_j) ein $(\varepsilon, d(V_i', V_j'))$-reguläres Paar: Seien $U_i \subseteq V_i$ und $U_j \subseteq V_j$ mit $|U_i| \geq \varepsilon |V_i|$ und $|U_j| \geq \varepsilon |V_j|$. Aufgrund der ε'-Quasiregularität von (V_i', V_j') ist $|E(U_i, U_j)| = d(V_i', V_j')|U_i||U_j| \pm \varepsilon' |V_i'||V_j'|$. Zusammen mit den großzügigen Abschätzungen $|V_i| \geq |V_i'|/2$ und $|V_j| \geq |V_j'|/2$ bedeutet dies

$$\left| d(U_i, U_j) - d(V_i', V_j') \right| \leq \varepsilon' \frac{|V_i'||V_j'|}{|U_i||U_j|} \leq \varepsilon' \frac{|V_i'||V_j'|}{\varepsilon^2 |V_i||V_j|} \leq \frac{4\varepsilon'}{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

□

Aufgabe 3. Für alle $k \in \mathbb{N}$, und $d_0, \gamma \in (0,1]$ existieren $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für jeden bipartiten Graphen (A,B,E) mit Kantendichte $d \geq d_0$ und $n := |A| = |B| \geq n_0$ folgendes gilt: ist (A,B) ein ε-reguläres Paar, so genügen alle bis auf höchstens $\gamma\binom{n}{k}$ der Teilmengen $X \in \binom{A}{k}$ der Abschätzung

$$\left|\bigcap_{x\in X} N(x)\right| = (1 \pm \gamma)\, d^k n.$$

Andererseits ist die umgekehrte Implikation schon für $k = 1$ (und $\varepsilon < 1/2$) falsch.

Beweis. Führe Induktion über k durch. Für $k = 1$ seien $d_0, \gamma > 0$ gegeben. Setze $\varepsilon := d_0\gamma/2$ und betrachte einen Graphen (A,B,E) wie in der Aufgabenstellung. Bis auf höchstens $2\varepsilon|A| = d_0\gamma|A| \leq \gamma|A|$ Ausnahmen gilt nach Proposition 3.2 für jedes $x \in A$:

$$|N(x)| = (d \pm \varepsilon)|B| = (d \pm d_0\gamma/2)|B| \leq (1 \pm \gamma)d|B|$$

Angenommen die Behauptung ist wahr für $k-1$ mit $k > 1$. Seien d_0 und γ gegeben. Zu den Parametern $d_0' := d_0$ und $\gamma' := (\gamma d_0 - 2\varepsilon)/(1+2\varepsilon)$ liefert die Induktionsannahme zwei Zahlen ε' und n_0'. Sei (A,B,E) ein bipartiter Graph mit Dichte $d \geq d_0$, $n := |A| = |B|$ und ε-regulärem Paar (A,B). Für $X \in \binom{A}{k-1}$ setze $B(X) := \bigcap_{x\in X} N(x)$ und

$$A^+(X) := \{a \in A : |B(X) \cap N(a)| > (1+\gamma)d^k n\}$$
$$A^-(X) := \{a \in A : |B(X) \cap N(a)| < (1-\gamma)d^k n\}$$

Wir wollen nun die Regularität benutzen um zu zeigen, dass diese „schlechten“ Mengen klein sind: Nach Induktionsannahme ist $|B(X)| = (1 \pm \gamma')d^{k-1}n$, insbesondere $|B(X)| \geq \varepsilon|B|$, für alle bis auf $\gamma'\binom{n}{k-1}$ der Teilmengen $X \in \binom{A}{k-1}$.

$$d\left(A^+(X), B(X)\right) = \frac{|E(A^+(X), B(X))|}{|A^+(X)||B(X)|} > \frac{(1+\gamma)d^k n}{(1+\gamma')d^{k-1}n} = \frac{1+\gamma}{1+\gamma'}d \geq d + 2\varepsilon$$

$$d\left(A^-(X), B(X)\right) = \frac{|E(A^-(X), B(X))|}{|A^-(X)||B(X)|} < \frac{(1-\gamma)d^k n}{(1-\gamma')d^{k-1}n} = \frac{1-\gamma}{1-\gamma'}d \leq d - 2\varepsilon$$

Das ist unvereinbar mit der ε-Regularität von (A,B). Folglich ist für diese X sowohl $A^+(X)$ als auch $A^-(X)$ kleiner als $\varepsilon|A|$. Die Anzahl der $Y \subseteq \binom{A}{k}$ mit $|B(Y)| \neq (1\pm\gamma)d^k n$ lässt sich also nach oben abschätzen durch

$$\gamma'\binom{n}{k-1}n + \binom{n}{k-1}2\varepsilon n < \gamma\binom{n}{k}.$$

Um die Umkehrung im Falle $k = 1$ zu widerlegen, wähle $d_0 \leq 1/2$ und γ beliebig (das Beispiel wird sogar für $\gamma = 0$ funktionieren). Für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ seien $G_1 = (A_1, B_1, E_1)$ und $G_2 = (A_2, B_2, E_2)$ zwei (disjunkte) Kopien des $K_{m,m}$. Die Vereinigung $(A,B,E) := G_1 \cup G_2$ dieser Graphen hat $n := 2m$ Ecken pro Partitionsklasse und Kantendichte $d = 1/2 \geq d_0$. Offenbar ist $|N(x)| = m = dn$ für jede Ecke x, aber (A_1, B_1) ist ein Paar der Dichte 1 und (A_1, B_2) eines der Dichte 0 mit jeweils $m = n/2$ Ecken pro Klasse. Für kein $\varepsilon < 1/2$ ist das Paar (A,B) damit ε-regulär. □

Aufgabe 4. Für Graphen, bei denen jede Kante in genau einem Dreieck enthalten ist, gilt $\|G\| = o(|G|^2)$. Die Aussage ist falsch, wenn man „genau“ durch „mindestens“ oder „höchstens“ ersetzt.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass alle Graphen G auf mindestens n_0 Ecken, bei denen jede Kante in genau einem Dreieck enthalten ist, der Abschätzung $\|G\| < \varepsilon|G|^2$ genügen. Seien δ' und n_0' die Zahlen, die das Removal Lemma zu den Parametern $\varepsilon' = \varepsilon/4$ und $F' = K_3$ liefert. Dann hat $n_0 := \max\{n_0', 1/(6\delta')\}$ die gewünschte Eigenschaft: Ist nämlich G ein Graph mit $n \geq n_0$ Ecken, bei dem jede Kante in genau einem Dreieck liegt, so ist die Zahl der Dreiecke in G genau $\|G\|/3 \leq n^2/6 \leq \delta' n^3$. Nach Wahl von δ' und n_0' lässt sich G durch Löschung von $\varepsilon' n^2$ Kanten dreieckfrei machen. Da die Dreiecke alle kantendisjunkt sind, hat G insbesondere höchstens $\varepsilon' n^2$ Dreiecke. Das bedeutet $\|G\| \leq 3\varepsilon' n^2 < \varepsilon n^2$.

Dass die beiden Abschwächungen der Behauptung falsch sind, sieht man sofort an vollständigen, bzw. vollständig bipartiten Graphen. $\square$

Aufgabe 5. Für Graphen G, deren Kantenmenge die Vereinigung von $|G|$ induzierten Paarungen ist, gilt $\|G\| = o(|G|^2)$.

Beweis (mit 4). Sei G ein Graph wie in der Behauptung (mit $V(G) \cap [|G|] = \emptyset$). Wir konstruieren zu G einen Hilfsgraphen $\hat{G}$ mit $\|\hat{G}\| \geq \|G\|$ und $|\hat{G}| = 2|G|$ und zeigen, dass jede Kante von $\hat{G}$ in genau einem Dreieck enthalten ist. Nach 4 ist dann $\|\hat{G}\| = o(|\hat{G}|^2)$ und somit auch $\|G\| = o(|G|^2)$.

Sei also $E(G) = M_1 \cup \ldots \cup M_n$ mit induzierten Paarungen $M_1, \ldots M_n$, wobei $n := |G|$. Da jeder Graph einen bipartiten Teilgraphen mit mindestens halber Kantenzahl enthält, dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass G schon bipartit ist. Setze

$$\hat{G} := \Big(V(G) \cup [n], E(G) \cup \{iv : i \in [n], v \in \bigcup M_i\}\Big)$$

Dann ist jede Kante von $\hat{G}$ in genau einem Dreieck enthalten:

Sei $vw = e$ eine Kante in $E(G)$. Dann gibt es ein $i \in [n]$ mit $e \in M_i$. Somit liegt e im Dreieck vwi. Weil die Paarungen induziert sind, ist kein $j \neq i$ sowohl zu v als auch zu w benachbart. Außerdem Somit liegt e in genau einem Dreieck.

Ist nun $e \notin E(G)$, hat also die Form iv, so gibt es eine Kante $vw \in M_i$ und e liegt im Dreieck vwi. Andererseits hat i alle seine Nachbarn in $\bigcup M_i$, aber dort hat v keinen weiteren Nachbarn, weil die Paarungen induziert sind. Somit liegt auch dieses e in genau einem Dreieck. $\square$

Beweis (direkt). $G = (A, B, E)$, $E = \bigcup M_i$, ind. Reg' Lemma (beginnend mit bip. $A \cup B$) gibt $A_1, \ldots, A_t, B_1, \ldots, B_s$. Lösche dünne und nicht-reg. Paare ($o(n^2)$ Kanten). Für alle $i \in [n]$, $j \in [t]$ und $k \in [s]$ markiere alle Kanten von M_i, die Endecke in A_j (oder B_k) haben, falls $|\bigcup M_i \cap A_j| \leq \varepsilon|A_j|$ (B_k analog?). Dann ist

$$\#\text{mark. Kanten} \leq n\varepsilon(|A| + |B|) \leq \varepsilon n^2 [= o(n^2)]$$

Dh. falls $|E| = \Omega(n^2)$, dann gibt es unmarkierte Kante ab mit $a \in A_j$ und $b \in B_k$. (A_j, B_k) ist (ε, d)-regulär mit $d \geq 2\varepsilon$. Ist $ab \in M_i$, dann ist $|\bigcup M_i \cap A_j| > \varepsilon |A_j$ und B_k analog.

$$\Rightarrow \|A_j \cap \bigcup M_i, B_k \cap \bigcup M_i\| \geq \varepsilon |A_j \cap \bigcup M_i||B_k \cap \bigcup M_i| \geq \varepsilon^3 \frac{n}{t}\frac{n}{s} \geq \frac{\varepsilon^3}{T_0^2} n^2 = \Omega(n^2)$$

$$\Rightarrow \exists a'b' \in E(A_j \cap \bigcup M_i, B_k \cap \bigcup M_i) \setminus \bigcup M_i$$

Widerspruch zur Induziertheit der Matchings. □

4 Quasi-zufällige Graphen

Das Standardmodell für einen Zufallsgrahen ist $G(n,p)$, der Graph auf n Ecken, der jede Kante unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p enthält. Ist H ein Graph auf n Ecken, so ist

$$\mathbb{P}(G(n,p) = H) = p^{\|H\|}(1-p)^{\binom{n}{2} - \|H\|}$$

Ist p deutlich größer als $1/n$, so folgt aus der Chernoff-Ungleichung leicht

$$\mathbb{P}\left(\left| \|G(n,p)[U]\| - p\binom{|U|}{2} \right| \geq \varepsilon p n^2 \quad \forall U \subseteq [n] \right) = o(1)$$

Natürlich ist es wenig sinnvoll, einzelne Graphen quasi-zufällig zu nennen. Stattdessen werden wir Folgen von Graphen darauf untersuchen, ob sie bestimmte strukturelle Aspekte aufweisen, die wir auch in Zufallsgraphen finden.

Seien $\varepsilon > 0$ und $d \geq 0$. Ein Graph G auf n Ecken hat die Eigenschaft

- $\mathbf{DISC}_d(\varepsilon)$, falls
$$\left| \|G[U]\| - d\binom{|U|}{2} \right| < \varepsilon n^2 \quad \forall U \subseteq V.$$

- $\mathbf{MIN}_d(\varepsilon)$, wenn
$$\|G\| \geq d\binom{n}{2} \qquad \text{und} \qquad N_{C_4}(G) \leq (d^4 + \varepsilon)n^4$$
wobei $N_F(G)$ die Anzahl von Isomorphismen („markierte Kopien“) von F auf Teilgraphen von G bezeichnet.

- $\mathbf{DEV}_d(\varepsilon)$, falls
$$\sum_{x_1,\ldots,x_k} \prod_{i=1}^{n} w_{d,G}(x_i, x_{i+1}) \leq \varepsilon n^k \qquad \text{wobei} \qquad w_{d,G}(x,y) = \begin{cases} 1-d & xy \in E(G) \\ -d & \text{sonst} \end{cases}$$

- $\mathbf{PAIR}_d(\varepsilon)$, falls
$$\sum_{x,y \in V(G)} \big| |N_G(x) \cap N_G(y)| - d^2 n \big| \leq \varepsilon n^3$$

- $\mathbf{BIP\text{-}DISC}_d(\varepsilon)$, falls

$$\forall U, W \subseteq V(G): \quad |E(U,W)| = d|U||W| \pm \varepsilon n^2$$

- $\mathbf{CL}_d(F, \varepsilon)$, falls (mit $\ell := |F|$)

$$N_F(G) = d^{\|F\|} n^\ell \pm \varepsilon n^\ell$$

Eine Folge $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Graphen hat die Eigenschaft $\mathcal{P}$, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass alle G_n mit $n \geq n_0$ die Eigenschaft $\mathcal{P}(\varepsilon)$ haben.

Zwei Grapheneigenschaften $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ heißen *äquivalent*, falls jede Folge von Graphen, die die Eigenschaft $\mathcal{P}$ hat, auch die Eigenschaft $\mathcal{Q}$ hat und umgekehrt Wir notieren dies als $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ oder auch $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$.

Satz 4.1 (Chung, Graham, Wilson 1989)**.** *Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:*

$\boldsymbol{P}_1$*: Es gibt ein $d \geq 0$, so dass es für alle Graphen F und $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $n \geq n_0$ impliziert*

$$N_F^*(G_n) = d^{\|F\|}(1-d)^{\binom{|F|}{2} - \|F\|} n^{|F|} \pm \varepsilon n^{|F|}$$

$\boldsymbol{P}_2$*: $\boldsymbol{MIN}_d$*

$\boldsymbol{P}_3$*: $\|G_n\| \geq d\binom{|G_n|}{2} - o(n^2)$ und*

$$\lambda_1(G_n) = dn \pm o(n) \qquad \lambda(G_n) = o(n)$$

Wobei λ_1 der größte Eigenwert der Adjazenzmatrix von G_n ist und $\lambda(G) := \max\{\lambda_2, -\lambda_n\}$.

$\boldsymbol{P}_4$*: $\boldsymbol{DISC}_d$*

$\boldsymbol{P}_5$*: Für alle $U_n \subseteq V(G_n)$ mit $|U_n| \geq \lfloor |V_n|/2 \rfloor : \|G_n[U_n]\| = d\binom{n/2}{2} \pm o(n^2)$.*

$\boldsymbol{P}_6$*: $\boldsymbol{DEV}_d$*

$\boldsymbol{P}_7$*: $\boldsymbol{PAIR}_d$*

Bemerkung. Im Beweis werden wir annehmen, dass (G_n) folgendes erfüllt:

$$\|G_n\| = d\binom{|G_n|}{2} \pm o(|G_n|^2)$$

Beweis. Wir zeigen folgende Implikationen:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{P}_1 \arrow[r, Rightarrow] & \mathbf{DEV}_d \arrow[dr, Rightarrow] & \mathbf{P}_5 \arrow[d, Leftrightarrow] \\
\mathbf{CL}_d \arrow[u, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \mathbf{BIP\text{-}DISC}_d \arrow[l, Rightarrow] & \mathbf{DISC}_d \arrow[l, Rightarrow] \\
\mathbf{P}_3 \arrow[r, Leftrightarrow] & \mathbf{MIN}_d \arrow[r, Rightarrow] & \mathbf{PAIR}_d \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

- **DISC** $\Rightarrow$ **BIP-DISC**: Es gilt $\mathbf{DISC}_d(\varepsilon/6) \Rightarrow \mathbf{BIP\text{-}DISC}_d(\varepsilon)$, denn
$$|E(U,W)| = |E(U \cup W)| - |E(U)| - |E(W)| + 3|E(U \cap W)|$$

- **BIP-DISC** $\Rightarrow$ **CL**: Mit Induktion über $\|F\|$ zeigen wir: Für alle Graphen F (setze $\ell := |F|$) und positive Zahlen $\varepsilon, d > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass
$$N_F(G) = \left(d^{\|F\|} \pm \varepsilon\right) n^\ell$$
in jedem Graphen G auf $n \geq n_0$ Ecken gilt, der die Eigenschaft $\mathbf{BIP\text{-}DISC}_d(\delta)$ hat. Sei dazu $F^- := F - e$ für irgendein $e \in E(F)$ und für eine Kopie $\widetilde{(F)} \subseteq G$ von F^- bezeichne $e(\tilde{F})$ die Kante von G, die $\widetilde{(F)}$ zu einer Kopie von F vervollständigt. Dann ist
$$\begin{aligned} N_F(G) &= \sum_{F^- \simeq \tilde{F} \subseteq G} \left(\mathbf{1}_{E(\tilde{F})}(e(\tilde{F})) - d + d\right) \\ &= dN_{F^-}(G) \pm \left|\sum_{\tilde{F}} \left(\mathbf{1}_E(e(\tilde{F})) - d\right)\right| \\ &\overset{\text{IV}}{=} dd^{\|F^-\|} n^\ell \pm \varepsilon' n^\ell \pm |\ldots| \end{aligned}$$
wie im Beweis des Counting Lemmas.

- **CL** $\Rightarrow$ **MIN**: Sei $F = ([\ell], E_F)$. Dann gilt mit $\varepsilon := \delta/2^{\binom{\ell}{2}}$ und $n := |G|$
$$\begin{aligned} N_F^*(G) &= \sum_{F \subseteq F' \subseteq K_\ell} (-1)^{\|F'\| - \|F\|} N_{F'}(G) \\ &= \sum_{t=0}^{\binom{\ell}{2} - \|F\|} \binom{\binom{\ell}{2} - \|F\|}{t} (-1)^t \left(d^{\|F\|+t} n^\ell \pm \varepsilon n^\ell\right) \\ &= d^{\|F\|} n^\ell \sum_{t=0}^{\binom{\ell}{2} - \|F\|} \binom{\binom{\ell}{2} - \|F\|}{t} (-d)^t \pm \varepsilon n^\ell 2^{\binom{\ell}{2}} \\ &= d^{\|F\|} n^\ell (1-d) \binom{\ell}{2} - \|F\| \pm \delta n^\ell \end{aligned}$$

- **CL** $\Rightarrow$ $\mathbf{P}_1$: $\forall F' \subseteq K_\ell : \mathbf{CL}_d(F', \varepsilon) \Rightarrow \mathbf{P}_1$ für F und δ.

- $\mathbf{P}_1$ $\Rightarrow$ **DEV**: Für $x, y \in V(G)$ setze
$$w_{d,G}(x,y) := \begin{cases} 1-d & xy \in E(G) \\ -d & xy \notin E(G) \end{cases}$$

Unser Ziel ist der Nachweis von

$$\left| \sum_{x_0,\ldots,x_3 \in V} \prod_{i=0}^{3} w_{d,G}(x_i, x_{i+1}) \right| \le \varepsilon |G|^4$$

Dabei dürfen wir annehmen, dass $x_0, \ldots, x_3$ paarweise verschieden sind, denn es gibt höchstens $o(n^3)$ Tupel, bei denen das nicht so ist und $o(n^3) << \varepsilon n^4$. In der folgenden Umformung benutzen wir die Voraussetzung für jeden Graphen F mit $V(F) = \{0, \ldots, 3\}$.

$$\begin{aligned}
&\sum_{x_0,\ldots,x_3 \in V} \prod_{i=0}^{3} w_{d,G}(x_i, x_{i+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} (-d)^{4-k} (1-d)^k \qquad \underbrace{\left(N^*_{F_1^k}(G) + \ldots + N^*_{F_4^k}(G) \right)}_{\left(d^k(1-d)^{6-k} + 2d^{1+k}(1-d)^{5-k} + d^{2+k}(1-d)^{4-k}\right)|G|^4 \pm 4\delta |G|^4} \\
&= \pm 64 \delta n^4 + (-d)^4 (1-d)^4 n^4 \underbrace{(1-4+6-4+1)}_{=0} \left((1-d)^2 + 2d(1-d) + d^2 \right) \\
&= \pm 64 \delta n^4
\end{aligned}$$

- **MIN** $\Rightarrow$ **PAIR**: Für zwei Ecken $x, y \in V(G)$ bezeichne die Anzahl gemeinsamer Nachbarn mit $\deg(x, y)$. Es gelten die Abschätzungen

$$\sum_{x,y \in V} \deg(x,y)^2 \le N_{C_4}(G) + O(n^3) \overset{\mathbf{MIN}(\varepsilon/2)}{\le} d^4 n^4 + \varepsilon n^4 \quad \text{und}$$

$$\sum_{x,y \in V} \deg(x,y) = \sum_{z \in V} \deg(z)^2 \overset{\text{C-S/Jensen}}{\ge} n \left(\frac{\sum \deg(z)}{n} \right)^2 \ge d^2 n^3 - \varepsilon n^3$$

denn $\|G\| \ge d\binom{n}{2} - \varepsilon n^2/10$. Zusammen ergibt dies

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{x,y \in V(G)} |\deg(x,y) - d^2 n \right)^2 &\overset{\text{C-S}}{\le} \sum_{x,y} \left(\deg(x,y) - d^2 n \right)^2 n^2 \\
&= n^2 \left(\sum_{x,y} \deg(x,y)^2 - 2d^2 n \sum_{x,y} \deg(x,y) + d^4 n^4 \right) \\
&\le n^2 \left(d^4 n^4 - 2d^4 n^4 + d^4 n^4 \pm 2\varepsilon n^4 \right) \le 2\varepsilon n^6
\end{aligned}$$

Ziehen der Wurzel ergibt die Behauptung.

- **PAIR** $\Rightarrow$ **DISC**: Nach Voraussetzung haben fast alle Eckenpaare in V den „richtige" gemeinsamen Grad. Insbesondere gilt dies auch für $U \subseteq V$. Das bedeutet

$$\sum_{z \in V} |N(z) \cap U|^2 = \sum_{x,y \in U} \deg(x,y) \approx d^2 n |U|^2.$$

Also haben fast alle Ecken $z \in V$ ungefähr $d|U|$ Nachbarn in U. Damit ergibt sich die Kantenzahl von U als

$$\|U\| = \frac{1}{2}\sum_{z \in U} |N(z) \cap U| \approx \frac{1}{2}|U|d|U| \approx d\binom{|U|}{2}$$

- **PAIR**(ε) $\Rightarrow$ **DISC**(δ): Zum Beweis dieser Implikation benötigen wir eine einfach analytische Hilfsaussage: Für reelle Zahlen $x_1, \dots, x_N$ gelte

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \geq (1-\varepsilon)aN \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq (1+\varepsilon)a^2 N$$

mit $\varepsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{N} |x_i - a|\right)^2 &\overset{\text{C-S}}{\leq} N\sum_{i=1}^{N}(x_i-a)^2 = N\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - 2a\sum_{i=1}^{N} x_i + Na^2\right)\\ &\leq N^2a^2(1+\varepsilon) - 2a^2N^2(1-\varepsilon) + a^2N^2 = 3\varepsilon a^2 N^2\end{aligned}$$

Somit ist $\sum_{i=1}^{N} |x_i - a| \leq \sqrt{3\varepsilon}aN$, insbesondere gibt es höchstens $(3\varepsilon)^{1/4}N$ Indizes i mit $|x_i - a| \geq (3\varepsilon)^{1/4}N$.

Sei nun $U \subseteq V$ und $\delta > 0$. O.B.d.A. nehmen wir $|U| \geq \sqrt{\delta}n$ an (U soll mehr als δn^2 Kanten haben können). Für $v \in V$ bezeichnen wir mit $\deg_U(v)$ die Zahl der Nachbarn von v in U. Um mit obiger Hilfsaussage $\deg_U(v) \approx d|U|$ für fast alle $v \in V$ nachzuweisen, müssen wir die folgenden beiden Ungleichungen zeigen:

$$\sum_{v \in V} \deg_U(v) \geq (1-o(1))d|U|n \qquad \text{und} \qquad \sum_{v \in V} \deg_U(v)^2 \leq (1+o(1))d^2|U|^2 n$$

Zunächst impliziert die Hilfsaussage wegen $\sum \deg(v) = 2\|G\| \geq (d-\varepsilon)n^2$ und

$$\sum \deg(v)^2 = \sum_{x,y} \deg(x,y) \overset{\textbf{PAIR}}{\leq} (d^2+\varepsilon)n^3,$$

dass es höchstens $\varepsilon' n$ Ecken $v \in V$ gibt mit $|\deg(v) - dn| \geq \varepsilon' dn$. Damit erhalten wir die erste Ungleichung:

$$\begin{aligned}\sum_{v \in V} \deg_U(v) &= \sum_{u \in U} \deg(u) \geq (1-\varepsilon')dn(|U| - \varepsilon' n)\\ &= dn|U| - \varepsilon' dn|U| - \varepsilon' dn^2 + \varepsilon'^2 dn^2 \overset{|U| \geq \delta n}{\geq} (1-\varepsilon'')dn|U|\end{aligned}$$

Die zweite folgt mit einer ähnlichen Überlegung: Es gibt höchstens $\varepsilon''' n^2$ Paare (x,y) von Ecken $x, y \in V$ mit $|\deg(x,y) - d^2n| \geq \varepsilon''' d^2 n$. Somit ist

$$\begin{aligned}\sum_{v \in V} \deg_U(v)^2 &= \sum_{u,w \in U} \deg(u,w)\\ &\leq |U|^2(1+\varepsilon''')d^2n + \varepsilon''' n^3\\ &\overset{|U| \geq \delta n}{\leq} (1+\varepsilon'''')d^2n|U|^2\end{aligned}$$

Die Hilfsaussage impliziert nun, dass es höchstens $\delta' n$ Ecken v in V gibt mit $|\deg_U(v) - d|U|| \geq \delta' d|U|$. Die beiden Abschätzungen

$$(|U| - \delta' n)(1-\delta')d|U| \quad \leq \quad \sum_{u \in U} \deg_U(u) \quad \leq \quad |U|(1+\delta')d|U| + \delta' n^2$$

ergeben schließlich $2\|G(U)\| = \sum_{u\in U} \deg_U(u) = d|U|^2 \pm \delta n^2$.

- $\mathbf{DEV}(\varepsilon) \Rightarrow \mathbf{DISC}(\delta)$: Sei $U \subseteq V$ und $\delta > 0$. Wähle $\varepsilon := \delta^4$. Zu zeigen:

$$\left|2\|G(U)\| - d|U|^2\right| = \left|\sum_{u,w\in U} (\chi_E(uw) - d)\right| \overset{!}{\leq} \delta n^2$$

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{u,w\in U} (\chi_E(uw) - d)\right|^4 &= \left(\sum_{x,y\in V} \chi_U(x)\chi_U(y) w_{d,G}(x,y)\right)^4 \\
&= \left(\sum_{x\in V} \chi_U(x) \sum_{y\in V} \chi_U(y) w_{d,G}(x,y)\right)^4 \\
&\overset{\text{C-S}}{\leq} \left(\sum_{x\in V} \chi_U(x)^2 \sum_{x\in V} \left(\sum_{y\in V} \chi_U(y) w_{d,G}(x,y)\right)^2\right)^2 \\
&= |U|^2 \left(\sum_{x\in V} \sum_{y,y'\in V} \chi_U(y)\chi_U(y') w_{d,G}(x,y) w_{d,G}(x,y')\right)^2 \\
&= |U|^2 \left(\sum_{y,y'\in V} \chi_U(y)\chi_U(y') \sum_{x\in V} w_{d,G}(x,y) w_{d,G}(x,y')\right)^2 \\
&\overset{\text{C-S}}{\leq} |U|^2 \sum_{y,y'\in V} \chi_U(y)^2\chi_U(y')^2 \sum_{y,y'\in V} \left(\sum_{x\in V} w_{d,G}(x,y) w_{d,G}(x,y')\right)^2 \\
&= |U|^4 \sum_{y,y'\in V} \sum_{x,x'\in V} w_{d,G}(x,y) w_{d,G}(x,y') w_{d,G}(x',y) w_{d,G}(x',y') \\
&\leq n^4 \varepsilon n^4
\end{aligned}$$

Somit ist $\left|\sum_{u,w\in U} (\chi_E(uw) - d)\right| \leq \varepsilon^{1/4} n^2 = \delta n^2$.

- $\mathbf{MIN}(\varepsilon) \Rightarrow \mathbf{P}_2(\delta)$: Sei G ein Graph auf n Ecken, A seine Adjazenzmatrix und $b := (1, \ldots, 1)^t \in \mathbb{R}^n$. Die Matrix A ist symmetrisch, hat also reelles Spektrum $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Es gilt

$$\lambda_1 \geq \sup_{c\in\mathbb{R}^n} \frac{\langle Ac, c\rangle}{\langle c, c\rangle} \geq \frac{\langle Ab, b\rangle}{\langle b, b\rangle} = \frac{2\|G\|}{n} = d(G) \geq dn - \varepsilon n, \qquad \text{also}$$

$$d^4n^4 - 4\varepsilon n^4 \leq \lambda_1^4 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^4 = \mathrm{spur}(A^4) \leq N_{C_4}(G) + O(n^3) \overset{\mathbf{MIN}}{\leq} d^4n^4 + 2\varepsilon n^4.$$

Neben der Abschätzung für λ_1^4 zeigt dies außerdem $\sum_{i=2}^{n} \lambda_i^4 \leq 6\varepsilon n^4$. Für $\varepsilon << \delta$ folgt damit $\lambda_1 = dn \pm \delta n$ und $\lambda \leq \delta n$.

- $\mathbf{P}_2(\varepsilon) \Rightarrow \mathbf{DISC}(\delta)$: Wir zeigen zunächst, dass es für jedes $\delta_1 > 0$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass in einem Graphen G mit der Eigenschaft $\mathbf{P}_2(\varepsilon)$ die Abschätzung $\sum_{v\in V} |\deg(v) - dn| \leq \delta_1 n^2$ gilt. Dabei sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren der Adjazenzmatrix (mit Eigenwerten $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$) und wie eben $b := (1, \ldots, 1)^t \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}\sum_{v\in V} \deg(v)^2 &= \langle Ab, Ab\rangle = \left\langle A\sum \alpha_i e_i, A\sum \alpha_i e_i\right\rangle \\ &= \left\langle \sum \alpha_i\lambda_i e_i, \sum \alpha_i\lambda_i e_i\right\rangle = \sum \alpha_i^2\lambda_i^2 \\ &\leq \lambda_1^2 \sum \alpha_i^2 = \lambda_1^2 \langle b, b\rangle \\ &\leq (dn + \varepsilon n)^2 n\end{aligned}$$

Insbesondere ist damit $\sum_{v\in V} \deg(v)^2 \leq d^2n^3 + 3\varepsilon n^3$. Zusammen mit $\sum_{v\in V} \deg(v)^2 \geq dn^2 - \varepsilon n^2$ zeigt dies die obige Behauptung.

Als nächstes weisen wir nach, dass es für alle $\delta_2 > 0$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass jeder Graph G mit der Eigenschaft $\mathbf{P}_2(\varepsilon)$ der Anschätzung $\|u - e_1\| \leq \delta_2$ genügt, wobei $e_1, \ldots, e_n$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren (zu Eigenwerten $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$) der Adjazenzmatrix A von G ist und $u = v/\sqrt{n}$ mit $v = (1, \ldots, 1)^t \in \mathbb{R}^n$. O.B.d.A. sei $V(G) = [n]$. Mit der Darstellung $u = \sum \alpha_i e_i$ ist dann $Au = \sum \alpha_i\lambda_i e_i$, also $(Au)_j = \deg(j)/\sqrt{n}$. Es gibt also einen Korrekturvektor $w \in \mathbb{R}^n$ mit $Au = dnu + w$, $\|w\|_\infty \leq \sqrt{n}$ und $|w_i| < \sqrt{\delta_1 n}$ für alle bis auf $\sqrt{\delta_1}n$ Komponenten von w. Dann ist

$$\|w\|^2 \leq n - \delta_1 n + \sqrt{\delta_1}n - n \leq 2\sqrt{\delta_1}n^2,$$

also $\|w\| \leq 2\delta_1^{1/4}n$. Wegen $\mathbf{P}_2(\varepsilon)$ ist $|\lambda_1 - dn| \leq \varepsilon n$ und damit $Au = \lambda_1 u + w_0$ mit $\|w_0\| \leq 3\delta_1^{1/4}n$ für ein geeignetes w_0 (denn $\varepsilon << \delta_1 << \delta_2$). Da $u = \sum \alpha_i e_i$ ist

$$Au = \lambda_1 u + w_0 = \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + w_0$$

$$\Rightarrow \quad \|w_0\|^2 = \left\|\sum_{i=2}^{n} (\lambda_i - \lambda_1)\alpha_i e_i\right\|^2 = \sum_{i=2}^{n} (\lambda_i - \lambda_1)^2\alpha_i^2 \leq 3\delta_1^{1/2}n^2$$

$$|\lambda_i - \lambda_1| \overset{\mathbf{P}_2(\varepsilon)}{\geq} (d - 2\varepsilon)n \overset{\varepsilon << d/4}{\geq} \frac{d}{2}n$$

$$\left(\frac{dn}{2}\right)^2 \sum_{i=2}^{n} \alpha_i^2 \leq 9\delta_1^{1/2}n^2$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=2}^{n} \alpha_i^2 \leq \frac{36\delta_1^{1/2}}{d^2} = o(\delta_1)$$

$$\overset{\|u\|=1}{\Rightarrow} \quad \alpha_1 = 1 + o(\delta_1)$$

Wegen $\alpha_1 > 0$ bedeutet dies $\alpha_1 = 1 \pm o(\delta_1)$.

Sei nun $X \subseteq V$. Wegen $V = [n]$ können wir die charakteristische Funktion von X als Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ auffassen. Wir wollen zeigen ($\forall\delta\exists\delta'$ für die Hinrichtung und $\forall\delta'\exists\delta$ für die Rückrichtung):

$$\|x\| \overset{!}{=} d\binom{|X|}{2} \pm \delta n^2 \Leftrightarrow \langle Au, x\rangle = 2\|x\| = d|X|^2 \pm \delta' n^2$$

Sei dazu $y := x - \langle x, e_1\rangle\, e_1$ (das bedeutet $y \perp e_1$). Dann ist $\langle Ay, y\rangle \leq |\lambda_2|\|y\|^2$.

$$\begin{aligned}\|y\|^2 &= \|x - \langle x, e_1\rangle\, e_1\|^2 = \langle x, x\rangle - 2\,\langle x, e_1\rangle^2 + \langle x, e_1\rangle^2 \\ &= \|x\|^2 - \langle x, e_1\rangle \leq \|x\|^2 = |X|\end{aligned}$$

$$\langle Ay, y\rangle = \langle Ax, x\rangle - 2\,\langle x, e_1\rangle\,\langle Ax, e_1\rangle + \langle x, e_1\rangle^2\,\langle Ae_1, e_1\rangle = 2\|x\| = \lambda_1\,\langle x, e_1\rangle^2$$

$$\langle x, e_1\rangle = \langle x, u\rangle + \langle x, w\rangle = \frac{|X|}{\sqrt{n}} + \langle x, w\rangle$$

$$|\,\langle x, w\rangle\,| \leq \|x\|\|w\| \leq \sqrt{|X|}\delta_2$$

Somit ist $\langle x, e_1\rangle = |X|/\sqrt{n} \pm \delta_2\sqrt{|X|}$.

$$\begin{aligned}\langle Ay, y\rangle = 2\|x\| - \lambda_1\left(\frac{|X|}{\sqrt{n}} \pm \delta_2\sqrt{|X|}\right)^2 &\leq |\lambda_2|\|y\|^2 \\ &\leq |\lambda_2||X| \leq \varepsilon n|X|\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 2\|x\| = \lambda_1\left(\frac{|X|}{\sqrt{n}} \pm \delta_2\sqrt{|X|}\right)^2 \pm \varepsilon n|X| = (d \pm \varepsilon)n\left(\frac{|X|^2}{n} \pm 3\delta_2|X|\right) \pm \varepsilon n|X|$$

Da $\delta \approx \delta' >> \delta_2 >> \delta_1 >> \varepsilon$ ist

$$2\|x\| = d|X|^2 \pm 5\varepsilon n^2 \pm 3\delta_2 n^2 = d|X|^2 \pm \delta' n^2$$

Das beendet den Beweis des Satzes von Chung-Graham-Wilson. □

Betrachte folgende Verallgemeinerung der Eigenschaft **MIN**: Sei (F_1, F_2) ein Paar von Graphen. Ein Graph G (auf n Ecken) hat die Eigenschaft $\mathbf{P}_d(\varepsilon)$, wenn gilt

$$N_{F_1}(G) \geq \left(d^{\|F_1\|} - \varepsilon\right) n^{|F_1|} \qquad \text{und} \qquad N_{F_2}(G) \leq \left(d^{\|F_2\|} + \varepsilon\right) n^{|F_2|}$$

Für $F_1 = K_2$ und $F_2 = C_4$ ist dies gerade $\mathbf{MIN}_d(\varepsilon)$. Man fragt sich nun, für welche Paare (F_1, F_2) die obige Eigenschaft äquivalent zur Quasizufälligkeit ist. Dass sie das nicht immer sein muss, sieht man am Paar (K_2, K_3). Für folgende Paare ist die Äquivalenz zur Quasizufälligkeit bekannt:

- $(K_2, C_{2\ell})$ für alle $\ell \geq 2$
- $(K_2, K_{a,b})$ mit $\min\{a, b\} \geq 2$
- (K_2, B_ℓ) für $\ell \geq 2$
- $(K_\ell, L(B_\ell))$ für $\ell \geq 2$

Dabei ist B_ℓ der bool'sche Würfel in ℓ Dimensionen. Es gibt Grund zu der Vermutung, dass es zu jedem F_1 ein geeignetes F_2 gibt, so dass obige Eigenschaft für das Paar (F_1, F_2) äquivalent zur Quasizufälligkeit ist. Ob es umgekehrt auch zu jedem F_2 ein passendes F_1 gibt ist unklar. Ziel: Finde die richtige Definition von „erzwingen", so dass für alle F das Paar (K_2, F) Quasizufälligkeit erzwingt. Simonovits und Sós haben bewiesen, dass folgende Definition das gewünschte leistet:

$$\forall U \subseteq V : \quad N_F(G[U]) = d^{\|F\|}|U|^{|F|} \pm o\left(n^{|F|}\right)$$

DEPARTMENT MATHEMATIK
DISKRETE MATHEMATIK
DOZENT: DR. MATHIAS SCHACHT

WS 2009/10
18. DEZEMBER 2009

Extremale Graphentheorie

2. Serie

Besprechung am 5. Januar 2010

Aufgabe 1
Ein (ε, d)-reguläres Paar (X, Y) ist (ε, d)-*super-regulär*, falls $|N(x) \cap Y| \geq \varepsilon|Y|$ für alle $x \in X$ und $|N(y) \cap X| \geq \varepsilon|X|$ für alle $y \in Y$. Sei $1 \geq d > 0$ und $0 < \varepsilon \leq d/2$.

(i) Zeigen Sie, dass jedes (ε, d)-reguläre Paar (X, Y) ein $(2\varepsilon, d)$-super-reguläres Paar (X', Y') enthält.

(ii) Zeigen Sie, dass der Durchmesser jedes (ε, d)-super-regulären Paares beschränkt ist. Finden Sie die bestmögliche obere Schranke.

(iii) Zeigen Sie, dass jedes (ε, d)-super-reguläre Paar (X, Y) mit $|X| = |Y|$ ein perfektes Matching enthält.

Aufgabe 2
Beweisen Sie die Äquivalenz der Eigenschaften P_4 und P_5 aus dem Satz von Chung, Graham, und Wilson.

Aufgabe 3
Geben Sie eine Folge von Graphen $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) $e(G_n) = (1/2 + o(1))\binom{n}{2}$,

(ii) $N_{K_3}(G_n) = (1/8 + o(1))n^3$ und

(iii) $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht quasizufällig.

Gibt es eine solche Folge auch mit der folgenden leicht verschärften Variante von (i)

(i') $\sum_{v\in V(G_n)} |\deg(v) - n/2| = o(n^2)$.

Aufgabe 4
Eine Folge von Graphen $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt die Eigenschaft $\mathbf{BIP\text{-}DISC}_{d,\alpha}$ für $d > 0$ und $0 < \alpha \leq 1/2$, falls

$$\big|e(X, Y) - d|X||Y|\big| = o(n^2)$$

für alle disjunkten X, $Y \subseteq V(G_n)$ mit $|X| = |Y| = \lfloor \alpha n \rfloor$.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathbf{BIP\text{-}DISC}_{d,o(1)}$ eine quasizufällige Eigenschaft ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $\mathbf{BIP\text{-}DISC}_{d,\alpha}$ für $0 < \alpha < 1/2$ eine quasizufällige Eigenschaft ist.

(iii) Was können Sie über $\mathbf{BIP\text{-}DISC}_{d,1/2}$ sagen?

Lösungen der 2. Serie

Aufgabe 1. Sei $0 < d \leq 1$.

(i) Jedes (ε, d)-reguläre Paar (A, B) mit $0 < \varepsilon \leq d/4$ enthält ein $(2\varepsilon, d)$-super-reguläres Paar (X, Y).

(ii) Ein (ε, d)-super-reguläres Paar (X, Y) mit $\varepsilon < d$ hat einen Durchmesser von höchstens 4.

(iii) Jedes (ε, d)-super-reguläre Paar (X, Y) mit $\varepsilon < d$ und $|X| = |Y|$ enthält ein perfektes Matching.

Beweis.

(i) Wir geben eine explizite Wahl von X und Y an und weisen dann die $(2\varepsilon, d)$-Super-Regularität des Paares (X, Y) nach. Setze

$$\begin{aligned} & X := \{x \in A : |N(x) \cap B| \geq (d - \varepsilon)|B|\} \\ \text{und} \quad & Y := \{y \in B : |N(y) \cap A| \geq (d - \varepsilon)|A|\}. \end{aligned}$$

Nach Proposition 3.2 ist

$$|X| > (1 - \varepsilon)|A| \qquad \text{und} \qquad |Y| > (1 - \varepsilon)|B|.$$

Für $X' \subseteq X$ und $Y' \subseteq Y$ mit $|X'| \geq 2\varepsilon|X|$, bzw. $|Y'| \geq 2\varepsilon|Y|$ ist also

$$|X'| \geq 2\varepsilon|X| > 2\varepsilon(1 - \varepsilon)|A| > \varepsilon|A|$$

und analog $|Y'| > \varepsilon|B|$. Somit folgt aus der (ε, d)-Regularität von (A, B) sofort die $(2\varepsilon, d)$-Regularität von (X, Y).

Nach Wahl von X und wegen $\varepsilon < d/4$ gilt für jedes $x \in X$

$$|N(x) \cap Y| \geq |N(x) \cap B| - |B \setminus Y| > (d - \varepsilon)|B| - \varepsilon|B| \geq 2\varepsilon|B| \geq 2\varepsilon|Y|.$$

Analog zeigt man $|N(y) \cap X| > 2\varepsilon|X|$ für jedes $y \in Y$.

(ii) Seien $x \in X$ und $y \in Y$ nicht benachbart. Setze $X' := N(y) \cap X$ und $Y' := N(x) \cap Y$. Aufgrund der Super-Regularität von (X, Y) ist $|X'| \geq \varepsilon|X|$ und $|Y'| \geq \varepsilon|Y|$. Aus der Regularität folgt also $d(X', Y') \geq d - \varepsilon > 0$. Somit gibt es eine Kante zwischen X' und Y' und x und y haben den Abstand 3. Sind x und x' zwei Ecken von X, so hat x einen Nachbarn y in Y. Dieser hat zu x' einen Abstand von höchstens 3, also ist der Abstand von x und x' höchstens 4. Analog behandelt man den Fall zweier Ecken $y, y' \in Y$.

(iii) Sei M ein größtmögliches Matching. Angenommen $|M| < |X|$. Dann gibt es Ecken $x \in X$ und $y \in Y$, die mit keiner Kante in M inzident sind. Weil M größtmöglich ist, sind jedoch die Ecken in $N(y) \cap X$ alle schon mit Kanten aus M inzident. Sei Y' die

Menge der Endecken dieser Kanten in Y. Dann ist $|Y'| = |N(y) \cap X| \geq \varepsilon|X| = \varepsilon|Y|$ aufgrund der (ε, d)-Super-Regularität von (X, Y). Analog ist $|X'| \geq \varepsilon|X|$ für die Menge X' der Endecken von Kanten aus M, die mit einer Ecke aus $N(x) \cap Y$ inzident sind. Aus der (ε, d)-Regularität folgt also $d(X', Y') \geq d - \varepsilon > 0$. Es gibt somit eine Kante $x'y'$ mit $x' \in X'$ und $y' \in Y'$. Seien n_x und n_y die Endecken der mit x', bzw. y' inzidenten Kanten aus M. Nach Konstruktion ist dann $xn_xx'y'n_yy$ ein Verbesserungsweg, denn nur die Kanten n_xx' und n_yy' sind in M, Widerspruch.

□

Aufgabe 2. Die Grapheneigenschaften $\mathbf{DISC}_d$ und $\mathbf{P}_5$ sind äquivalent.

Beweis. Offenbar ist $\mathbf{P}_5$ dasselbe wie $\mathbf{DISC}_{d,1/2}$ und $\mathbf{DISC}_d$ entspricht $\mathbf{DISC}_{d,o(1)}$. Wir brauchen also lediglich zu zeigen, dass $\mathbf{DISC}_{d,o(1)}$ aus $\mathbf{DISC}_{d,1/2}$ folgt. O.B.d.A. sei n gerade und $U \subseteq V$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. $|U| \geq n/2$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\|G[U]\| &= \binom{|U|-2}{|U|/2-1}^{-1} \sum_{W \in \binom{U}{|U|/2}} \|G[W]\| \\
&= \binom{|U|-2}{|U|/2-1}^{-1} \binom{|U|}{|U|/2} \left(d\binom{|U|/2}{2} + o(n^2) \right) \\
&= \frac{|U|(|U|-1)}{\frac{|U|}{2}\left(\frac{|U|}{2}-1\right)} \left(d\binom{|U|/2}{2} + o(n^2) \right) \\
&= d\binom{|U|}{2} + o(n^2)
\end{aligned}$$

2. $|U| < n/2$. Angenommen, es ist $\|G[U]\| \geq d\binom{|U|}{2} + cn^2$ für ein $c > 0$. Anwendung der ersten Falles auf $\bar{U}$ ergibt $\|G[\bar{U}]\| = d\binom{|\bar{U}|}{2} + o(n^2)$. Außerdem ist $|E(U, \bar{U})| =$

$\|G\| - \|G[U]\| - \|G[\bar{U}]\|$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\|G[U]\| &= \binom{n-|U|}{n/2-|U|}^{-1} \sum_{X \in \binom{\bar{U}}{n/2-|U|}} \|G[U \cup X]\| \\
&= \binom{n-|U|}{n/2-|U|}^{-1} \left(\|G[U]\| \binom{n-|U|}{n/2-|U|} + \|G[\bar{U}]\| \binom{n-|U|-2}{n/2-|U|-2} \right. \\
&\qquad \left. + |E(U,\bar{U})| \binom{n-|U|-1}{n/2-|U|-1} \right) \\
&= \|G[U]\| + \frac{(n/2-|U|)(n/2-|U|-1)}{(n-|U|)(n-|U|-1)} \|G[\bar{U}]\| \\
&\qquad + \frac{n/2-|U|}{n-|U|} \left(\|G\| - \|G[U]\| - \|G[\bar{U}]\| \right) \\
&= \frac{n/2}{n-|U|} \|G[U]\| + \frac{(n/2-|U|)n/2}{(n-|U|)(n-|U|-1)} \|G[\bar{U}]\| + \frac{n/2-|U|}{n-|U|} \|G\| \\
&> d \left(\frac{n/2}{n-|U|} \binom{|U|}{2} + \frac{(n/2-|U|)n/2}{(n-|U|)(n-|U|-1)} \binom{|\bar{U}|}{2} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{n/2-|U|}{n-|U|} \binom{n}{2} \right) + \frac{c}{3} n^2 \\
&= \ldots = d \left(\frac{n^2}{8} - \frac{n}{4} + \frac{c}{3} n^2 \right) \\
&= d \binom{n/2}{2} + \frac{c}{3} n^2
\end{aligned}$$

mit Widerspruch. Der Fall $\|G[U]\| < d\binom{|U|}{2} - cn^2$ für ein $c > 0$ ist analog.

□

Aufgabe 3. Sei $A \cup B \cup C \cup D$ eine balancierte Partition der Menge $[n]$. Definiere den Graphen G_n auf $[n]$ durch Hinzufügen der Kanten

$$\{ab : a \in A, b \in B\} \cup \{cc' : c, c' \in C\} \cup \{dd' : d, d' \in D\} \cup E(G(A \cup B, C \cup D, 1/2)).$$

Mit Wahrscheinlichkeit $1 - o(1)$ hat G_n die folgenden Eigenschaften

(i) $\sum_{v \in V(G_n)} |\deg(v) - n/2| = o(n^2)$

(ii) $N_{K_3}(G_3) = (1/8 + o(1))\binom{n}{2}$

(iii) $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nicht quasizufällig

Beweis.

(i) Sei $v \in V(G_n)$. Dann gilt $\deg(v) = (n/4 \pm 1) + X_v$ mit der Zufallsvariablen X_v für den Grad von v in $G(A \cup B, C \cup D, 1/2)$. Als Summe von Bernoulli-Zufallsvariablen ist X_v binomial verteilt. Nach der Chernoff-Ungleichung ist

$$P(|X_v - EX_v| \geq \varepsilon EX_v) \leq 2\exp(-\varepsilon^2/3EX_v).$$

Wegen $EX_v = 1/2(n/2 \pm 1)$ ist

$$P(\exists v \in V : |X_v - n/4| \geq \varepsilon n/4) \leq 2n\exp(-\varepsilon^2 n/13) = o(1)$$

Somit hat G_n mit Wahrscheinlichkeit $1 - o(1)$ die Eigenschaft (i).

(ii) Genauso kann man zeigen, dass $|N(u) \cap N(v) \cap Z| = n/8 \pm \varepsilon n$ für alle $u \neq v$ aus $A \cup B$ und $Z = C \cup D$ und alle $u \neq v$ aus $C \cup D$ und $Z = A \cup B$. Sei Y_i die Anzahl der K_3 in G_n mit genau i Ecken in $A \cup B$ für $i = 0, \ldots 3$. Offenbar ist $Y_3 = 0$. Außerdem ist

$$\begin{aligned} Y_0 &= 2\binom{n/4 \pm 1}{3}6 \\ Y_1 &= 2\binom{n/4 \pm 1}{2}\left(\frac{n}{8} \pm \varepsilon\right)6 = \frac{3}{64}n^3 + o(n^3) \\ Y_2 &= |A||B|\left(\frac{n}{8} \pm \varepsilon\right) = \frac{3}{64}n^3 \pm o(n^3) \end{aligned}$$

Somit ist Die Zahl der Kopie von K_3 in G_n gegeben durch $Y_0 + \ldots + Y_3 = n^3/8 + o(n^3)$.

(iii) Die Folge verstößt klar gegen **BIP-DISC**: Es ist $|E(A,B)| = |A||B|$ und $|E(C,D)| = 0$.

□

Aufgabe 4.

(i) Die Eigenschaft $\mathbf{BIP\text{-}DISC}_{d,o(1)}$ ist quasizufällig.

(ii) Für jedes $\alpha \in (0, 1/2)$ ist $\mathbf{BIP\text{-}DISC}_{d,\alpha}$ eine quasizufällige Eigenschaft.

(iii) Sei $A \cup B$ eine balancierte Partition von $[n]$. Definiere den Graphen G_n auf $[n]$ durch Hinzufügen der Kanten

$$\{aa' : a, a' \in A\} \cup E(G(A, B, 1/2))$$

Dann hat G_n die Eigenschaft $\mathbf{BIP\text{-}DISC}_{1/2}(1/2)$, ist aber nicht quasizufällig.

Beweis.

(i) Wir zeigen, dass $\mathbf{DISC}_d$ aus $\mathbf{BIP\text{-}DISC}_{d,o(1)}$ folgt. Sei $U \subseteq V$ und o.B.d.A. $|U|$ gerade. Dann ist

$$\begin{aligned}
\|G[U]\| &= \binom{|U|-2}{|U|/2-1}^{-1} \frac{1}{2} \sum_{W \in \binom{U}{|U|/2}} |E(W, U \setminus W)| \\
&= \frac{1}{2} \binom{|U|-2}{|U|/2-1}^{-1} \binom{|U|}{|U|/2} \left(d \left(\frac{|U|}{2} \right)^2 \pm o(n^2) \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{|U|(|U|-1)}{(|U|/2)^2} \left(d \frac{|U|^2}{4} + o(n^2) \right) \\
&= d \binom{|U|}{2} \pm o(n^2)
\end{aligned}$$

(ii) Wir zeigen, dass $\mathbf{BIP\text{-}DISC}_{d,o(1)}$ aus $\mathbf{BIP\text{-}DISC}_{d,\alpha}$ folgt. Sei $\beta \in (0, 1-2\alpha)$ beliebig (wegen $\alpha < 1/2$ ist das Intervall nicht leer). Seien $Z, Z' \subseteq V$ disjunkt mit $|Z| = \lfloor \beta n \rfloor = |Z'|$. Nach Wahl von β gibt es disjunkte $X, Y \subseteq V$ mit $|X| = \lfloor \alpha n \rfloor = |Y|$, die beide disjunkt zu Z sind und X ist disjunkt zu Z'. Dann ist nach Voraussetzung

$$\begin{aligned}
|E(X, Z)| &= |E(X, Y \cup Z)| - |E(X, Y)| \\
&= d|X|(|Y| + |Z|) - d|X||Y| + o(n^2) \\
&= d|X||Z| + o(n^2)
\end{aligned}$$

Und analog

$$|E(Z, Z')| = |E(X \cup Z', Z)| - |E(X, Z)| = d|Z'||Z| + o(n^2)$$

Die Umkehrung folgt durch ein einfaches Averaging-Argument.

(iii) Offensichtlich.

□

5 Der Satz von Simonovits und Sós

Sei $0 < d \leq 1$ und F ein Graph mit $\ell := |F|$. Eine Folge $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Graphen mit $|G_n| \xrightarrow{n \to \infty} \infty$ hat die Eigenschaft $\mathbf{HCL}_{d,F}$, falls

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall U \subseteq V(G_n): \quad N_F(G_n[U]) = d^{\|F\|} |U|^\ell + o(n^\ell).$$

Es ist also $\mathbf{HCL}_{d,K_2} = \mathbf{DISC}_d$. Erweiterungen des folgenden Satzes wurden von Yuster (2002) und Shapira-Yuster (2008) gefunden.

Satz 5.1 (Simonovits-Sós (1996± 5)). *Für jeden Graphen F mit mindestens einer Kante und jedes $d \in (0,1]$ ist $\boldsymbol{HCL}_{d,F}$ eine quasizufällige Eigenschaft.*

Als ersten Schritt des Beweises, werden wir die Aussage für eine partite Abschwächung der Eigenschaft **HCL** zeigen. Sei $d \in (0,1]$ und $F = ([\ell], E_F)$ für ein $\ell \in \mathbb{N}$ und $|E_F| > 0$. Eine Folge $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Graphen mit $|V_n| = n$ hat die Eigenschaft $\mathbf{pHCL}_{d,F}$, falls für beliebige paarweise disjunkte Mengen $U_1, \ldots, U_\ell \subseteq V(G_n)$ gilt

$$N_F(G_n[U_1, \ldots, U_\ell]) = d^{\|F\|} \prod_{i=1} \ell|U_i| + o(n^\ell)$$

(wir zählen partite Kopien von F in G_n). Beachte den Sonderfall $\mathbf{pHCL}_{d,K_2} = \mathbf{BIP\text{-}DISC}_d$.

- $\mathbf{DISC}_d$ impliziert $\mathbf{CL}_{d,F}$ für alle Graphen F. Daraus folgt sofort $\mathbf{HCL}_{d,F}$ und mit etwas Arbeit auch $\mathbf{pHCL}_{d,F}$.
- Ist $\delta >> \varepsilon >> 1/t$ dann reicht eine (ε, d)-reguläre Partition von G zum Nachweis von $\mathbf{DISC}_d(\delta)$. Es ist also zu zeigen, dass $d(V_i, V_j) = d \pm \varepsilon$ für alle bis auf höchstens εt^2 Paare (V_i, V_j).
- Sei G ein Graph, der $\mathbf{HCL}_{d,F}$ erfüllt und $V_1, \ldots, V_t$ eine ε-reguläre Partition. Zur Verdeutlichung der Idee nehmen wir zunächst $F = K_3$ an. Falls (V_i, V_j), (V_i, V_k) und (V_j, V_k) alle ε-regulär sind mit $i < j < k$ dann folgt aus dem Counting Lemma:

  $$d^3 \left(\frac{n}{t}\right)^3 \pm o(n^3) \overset{\text{HCL}}{=} N_{K_3}(G[V_i, V_j, V_k]) = d_{ij} d_{ik} d_{jk} \left(\frac{n}{t}\right)^3 \pm \varepsilon' \left(\frac{n}{t}\right)^3$$

  Und somit $d_{ij} d_{ik} d_{jk} = d^3$.
- Wir müssen also zeigen, dass obiges Gleichungssystem nur die triviale Lösung $d_{ij} = d_{ik} = d_{jk} = d$ hat. Durch Anwendung des Logarithmus ergibt sich das LGS $y_{ij} + y_{ik} + y_{jk} = 3\ln(d)$ mit $y_{ij} = \ln(x_{ij})$, usw. Dieses hat nach Satz 5.2 von Gottlieb genau eine Lösung und somit ist $y_{ij} = \ln(d)$ und $x_{ij} = d$.

Satz 5.2 (Gottlieb 1966). *Für alle natürlichen Zahlen ℓ, k, r mit $\ell \geq k$ und $r \geq \ell + k$ gilt: Die Inklusionsmatrix $I = I(r, \ell, k)$ hat Rang $\binom{r}{k}$, wobei die $\binom{r}{\ell} \times \binom{r}{k}$-Binärmatrix $I(r, \ell, k)$ definiert ist durch*

$$(I)_{KL} := \begin{cases} 1 & K \subseteq L \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} \qquad \textit{für } K \in \binom{[r]}{k} \textit{ und } L \in \binom{[r]}{\ell}$$

Korollar 5.3. *Sei F ein Graph mit Eckenmenge $[\ell]$ und mindestens einer Kante. Dann hat $A = A(r, F, 2)$ den Rang $\binom{r}{2}$, wobei die $\binom{r}{\ell} \times \binom{r}{2}$-Binärmatrix $A(r, F, 2)$ definiert ist durch*

$$(A)_{\tilde{F}e} := \begin{cases} 1 & e \in E(\tilde{F}) \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

für eine Kopie $\tilde{F}$ von F in K_r und $e \in E(K_r)$.

Es gibt ein $s \in \mathbb{N}$, so dass für jede Zeile a_L von $A(r, \ell, 2)$ gilt

$$a_L = \frac{1}{s} \sum_{\tilde{F} \subseteq K_\ell(L)} a'_{\tilde{F}}$$

wobei a_L der Zeilenvektor von $A(r, \ell, 2)$ mit Index L ist und $a'_{\tilde{F}}$ der Zeilenvektor von $A(r, F, 2)$ mit Index $\tilde{F}$. Außerdem bezeichnet $K_\ell(L)$ den vollständigen Graphen K_ℓ mit Knotenmenge L. Somit ist der Rang von $A(r, \ell, 2)$ noch oben beschränkt durch den Rang von $A(r, F, 2)$.

G_n erfüllt $\mathbf{REG}_d(\varepsilon)$, falls es eine Partition $V_0 \cup \ldots \cup V_t = V(G_n)$ gibt, so dass $(V_0, \ldots, V_t)$ eine ε-reguläre Partition ist mit $t_0 = 1/\varepsilon \leq t \leq T_0$ und $d(V_i, V_j) = d \pm \varepsilon$ für alle $i \neq j$ bis auf höchstens εt^2 Paare (V_i, V_j).

Behauptung. $\mathbf{REG}_d \Rightarrow \mathbf{DISC}_d$

Beweis. Sei $\delta > 0$. Wähle $\varepsilon << \delta$ und $n_0 >> T_0(TL(1/\varepsilon, \varepsilon))$. Sei $U \subseteq V(G_n)$. Die von G_n auf U induzierten Kanten teilen sich auf in Kanten

- in irregulären Paaren
- mit mindestens einer Endecke in V_0
- in Paaren mit Dichte $\neq d \pm \varepsilon$
- in Paaren mit $|U \cap V_i| < \varepsilon |V_i|$ oder $|U \cap V_j| < \varepsilon |V_j|$
- innerhalb von V_i
- im Rest

Der Rest sind also Kanten in (2ε)-regulären Paaren (V_i, V_j) mit Dichte $d \pm \varepsilon$ und sowohl $|U \cap V_i| \geq \varepsilon |V_i|$ als auch $|U \cap V_j| \geq \varepsilon |V_j|$. Die Menge der Indizes dieser Paare sei I. Die Zahl der Paare (i, j), für die $|U \cap V_i| < \varepsilon |V_i|$ oder $|U \cap V_j| < \varepsilon |V_j|$ ist höchstens $\varepsilon |U|^2$ und damit kleiner als εn^2. Nach den üblichen Abschätzungen erhalten wir also

$$\begin{aligned}
\|G_n[U]\| &= \sum_{i=1}^{t-1} \sum_{j=i+1}^{t} |E(U \cap V_i, U \cap V_j)| \pm 2\varepsilon n^2 \\
&= \sum_{(i,j) \in I} |E(U \cap V_i, U \cap V_j)| \pm 5\varepsilon n^2 \\
&= \sum_{(i,j) \in I} (d \pm 2\varepsilon) |U \cap V_i||U \cap V_j| \pm 5\varepsilon n^2 \\
&= (d \pm 2\varepsilon) \binom{|U|}{2} \pm 10\varepsilon n^2 \\
&= d \binom{|U|}{2} \pm 11\varepsilon n^2 \leq d \binom{|U|}{2} \pm \delta n^2
\end{aligned}$$

□

Behauptung. Für einen Graphen F mit $\|F\| \geq 1$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $\xi > 0$, so dass $\mathbf{pHCL}_{d,F}(\xi) \Rightarrow \mathbf{REG}_d(\varepsilon)$.

Beweis. Beweisskizze unverständlich. □

Proposition 5.4. *Für alle bis auch höchstens $\varepsilon t^2/2$ Kanten ij von R_t gibt es einen $K_r \subseteq R_t$ mit $ij \in E(K_r)$.*

Beweis. Wir verwenden die folgendes Aussage von Rödl (1986): Für alle $r \in \mathbb{N}, \gamma > 0$ gibt es ein $t \in \mathbb{N}$, so dass es eine Familie von$x \geq (1-\gamma)\binom{t}{2}/\binom{r}{2}$ kantendisjunkten Kopien von K_r in K_t gibt.

Sei $\varepsilon' < \varepsilon$ und $\|R_t\| \geq (1-\varepsilon')\binom{t}{2}$. Wähle x kantendisjunkte Kopien von K_r in K_t. Dann sind $x - \varepsilon'\binom{t}{2}$ dieser Kopien in R_t enthalten. Die Zahl der Kanten von R_t, die in jeder dieser übrigen Kopien enthalten sind ist mindestens

$$(1-\gamma)\binom{t}{2} - \varepsilon'\binom{t}{2}\binom{r}{2} \geq \binom{t}{2} - \left(\gamma + \varepsilon'\frac{r^2}{2}\right)\frac{t^2}{2} \geq \binom{t}{2} - \varepsilon\frac{t^2}{2}$$

□

Proposition 5.5. $\forall ij \in E(K_r) : w(i,j) = d \pm \varepsilon$

Beweis. Sei $K_r \subseteq R_t$. Dann gilt nach dem Counting Lemma für alle $\tilde{F} \subseteq K_r$ (wobei $V(\tilde{F}) = \{i_1, \ldots i_\ell\}$):

$$N_F(V_{i_1}, \ldots, V_{i_\ell}) = \prod_{i_j, i_k \in E(\tilde{F})} w(i_j, i_k) \cdot \prod_{j=1}^{\ell} V_{i_j} \pm \eta \left(\frac{n}{t}\right)^\ell$$

Aber $\mathbf{pHCL}_{d,F}(\xi) \Rightarrow N_F(V_{i_1}, \ldots, V_{i_\ell}) = d^{\|F\|}m^\ell \pm \xi n^\ell$ mit $(1-\varepsilon')n/t \leq m = |V_1| = \ldots = |V_t| \leq n/t$. Das bedeutet $\prod w(i_j, i_k) = d^{\|F\|} \pm 2\eta$ und somit $\sum \ln w(i_j, i_k) = \ln(d^{\|F\|} \pm 2\eta)$. □

Behauptung. **HCL** $\Rightarrow$ **DISC**

Beweisskizze. Wir weisen die Implikation $\mathbf{HCL}_d(F) \Rightarrow \mathbf{REG}_d$ nach, denn zusammen mit der bereits gezeigten Implikation $\mathbf{REG}_d \Rightarrow \mathbf{DISC}_d$ folgt die Behauptung.

1) Regularitätslemma $\to V_1, \ldots, V_t$

2) Für fast all i ist $G[V_i]$ quasi-zufällig mit Dichte $d_i \approx d$: Seien $V_{i_1}, \ldots, V_{i_{\ell-1}}$ Partitionsklassen mit (V_{i_j}, V_{i_k}) ε-regulär für alle i_j, i_k (der Satz von Rödl impliziert, dass fast alle $1 \leq i < j \leq t$ in so einer Familie sind). O.B.d.A. $V_{i_1}, \ldots, V_{i_{\ell-1}} = V_1, \ldots V_{\ell-1}$. Wir müssen zeigen, dass $\|X\| \approx \|Y\|$ für alle $X, Y \subseteq V_1$ mit $|X| = |Y|$. Sei $X \subseteq V_1$ mit $|X| = |V_1|/2$.

$$\ldots \overset{\mathbf{HCL}_{d,F}}{=} N_F(\underbrace{G[X \cup V_2 \cup \ldots \cup V_{\ell-1}]}_{H}) = \left|\left\{\tilde{F} \subseteq H : \tilde{F} \text{ trifft alle Klassen}\right\}\right|$$
$$+ \left|\left\{\tilde{F} \subseteq H : \tilde{F} \text{ trifft eine Klasse nicht}\right\}\right|$$

Wegen $\mathbf{HCL}_{d,F}(\xi)$ für alle $X, Y \subseteq V_1$ mit $|X| = |Y|$ ist

$$|N_F(G[X \cup V_2 \cup \ldots \cup V_{\ell-1}]) - N_F(G[Y \cup V_2 \cup \ldots \cup V_{\ell-1}])| \leq 2\xi n^\ell$$

und die Zahl der Kopien von F, die höchstens $\ell - 2$ der Klassen $X, V_2, \ldots, V_{\ell-1}$ treffen, ändert sich um höchstens $\xi n^\ell 2^\ell$, wenn wir X durch Y ersetzen. Somit unterscheidet sich die Zahl der Kopien von F, die alle Klassen $X, V_2, \ldots, V_{\ell-1}$ treffen, von der Zahl der Kopien von F, die alle Klassen $Y, V_2, \ldots, V_{\ell-1}$ treffen, um höchstens $\xi' n^\ell$ für $\xi' \geq 2\xi + 2^\ell \xi$. [Das fehlende Argument zu $\|X\| = \|Y\|$ ist eine aufwändige Zählerei (unter mehrfacher Benutzung des Counting Lemmas), die nur am Beispiel $F = P_2$ vorgeführt wurde, und mangels Allgemeinheit hier nicht wiedergegeben wird.]

Angenommen $|d_i - d| > \delta$. Dann ist mit $\mathbf{HCL}_{d,F}(\xi)$ und geeigneter Wahl von ξ:

$$N_F(G[V_i]) - d^{\|F\|}|V_i|^{|F|} > \delta'|V_i|^{|F|} > \delta''(n/t)^{|F|} > \xi n^{|F|}$$

3) Für fast alle i, j mit $1 \leq i < j \leq t$ ist $d_{i,j} \approx d$: $N_F(G[V_i \cup V_j])$ ist ungefähr so groß wie der Erwartungswert von $N_F(G_{d,d_{ij}}(m))$, wobei $m = |V_i| = |V_j$ und der Zufallsgraph $G_{d,e}(m)$ definiert ist, wie folgt: $V(G_{d,e}(m)) = X \cup Y$ mit $|X| = |Y| = m$ und $X \cap Y = \emptyset$. Kanten in X und in Y haben jeweils eine Wahrscheinlichkeit von d und Kanten zwischen X und Y eine Wahrscheinlichkeit von e. Mittels $\mathbf{HCL}_{d,F}$ ergibt sich daraus sofort $d_{ij} \approx d$.

□

6 Quasi-zufällige Hypergraphen

Ein Paar $H = (V, E)$ zweier Mengen V und E heißt *k-uniformer Hypergraph* oder kurz *k-Graph*, falls $|V| < \infty$ und $E \subseteq \binom{V}{k}$.

Beispiel. 2-Graphen sind (endliche) Graphen.

Für einen k-Graphen F setzen wir analog zu Graphen

$$\operatorname{ex}(n, F) := \max\{\|H\| : H \text{ ist ein } F\text{-freier } k\text{-Graph auf } n \text{ Ecken}\}$$

Schon für sehr kleine Hypergraphen wir $F = K_4^{(3)}$ (vollständiger 3-Graph auf 4 Ecken) oder sogar $F = K_4^{(3)} - e$ ist $\operatorname{ex}(n, F)$ unbekannt.

Der Ausgangspunkt für die Definition quasi-zufälliger Hypergraphen ist $\mathbf{DISC}_d$:

$$\forall U \subseteq V : \quad \left| \|G[U]\| - d\binom{|U|}{k} \right| = o\left(|V|^k\right)$$

Entsprechend definiert man $\mathrm{CL}_{d,F}$:

$$N_F(G) = d^{\|F\|} n^{|F|} + o(n^{|F|})$$

Schon für $k = 3$ verhalten sich obige Eigenschaften anders, als wir es von Graphen gewohnt sind: mit $F = K_4^{(3)}$ ist $\mathbf{DISC}_d$ keine hinreichende Bedingung für $\mathbf{CL}_{d,F}$.

Beispiel (1. Konstruktion von Erdős-Hajnal 1973)**.** Sei T_n ein zufälliges Turnier (vollständiger Graph mit Kantenrichtungen) und H der 3-Graph mit $V(H) = V(T_n)$ und $xyz \in E(H)$ genau dann, wenn x, y, z ein orientiertes Dreieck in T_n aufspannt. Dann ist H fast sicher $K_4(3)$-frei, aber hat mit Wahrscheinlichkeit $1 - o(1)$ die Eigenschaft $\mathbf{DISC}_{1/4}$.

Beweisansatz. Je vier Ecken eines Turniers spannen höchstens zwei orientierte Dreiecke auf, also ist H sogar $(K_4(3)-e)$-frei. Es reicht nun der Nachweis, dass H mit Wahrscheinlichkeit $1-o(1)$ folgender Bedingung genügt: Für alle $U \subseteq V(T_n)$ ist die Zahl orientierter Dreiecke in U gleich $\frac{1}{4}\binom{|U|}{3} \pm o(n^3)$. □

Beispiel (2. Konstruktion)**.** Definiere einen 3-Graphen H auf $V(H) = [n]$ mittels einer zufälligen 2-Färbung f von $\binom{[n]}{2}$, bei der jedes Eckenpaar beide Farben mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ hat und $x, y, z \in [n]$ mit $x < y < z$ ist genau dann in $E(H)$, wenn $f(x, y) \neq f(x, z)$. H ist fast sicher $K_4^{(3)}$-frei und hat $\mathbf{DISC}_{1/2}$ mit Wahrscheinlichkeit $1 - o(1)$.

Beweisansatz. Fasst man f als zufälliges Turnier auf, dann ist das Beispiel im Wesentlichen identisch mit dem vorigen. □

Um dennoch die Implikation $\mathbf{DISC}_d \Rightarrow \mathbf{CL}_{d,F}$ zu erhalten, gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Die Definition von $\mathbf{DISC}_d$ verstärken: Ein 3-Graph $H = (V, E)$ hat $\mathbf{DISC}_d$, falls $|\|H[G]\| - dK_3(G)| \leq o(|V|^3)$ für alle 2-Graphen $G = (V, E_G)$ gilt. Dabei ist $e \in H[G]$ genau dann, wenn e in G einen K_3 aufspannt und $K_3(G)$ ist die Anzahl zu K_3 isomorpher Teilgraphen von G (also $N_{K_3}(G)/6$). Leider erlaubt diese Definition von $\mathbf{DISC}_d$ kein Regularitätslemma.

2. Die Definition von $\mathbf{CL}_{d,F}$, bzw. die Behauptung abschwächen: Ein Hypergraph heißt *einfach* oder *linear*, falls je zwei verschiedene Kanten höchstens eine gemeinsame Ecke haben. Offenbar sind 1-Graphen und 2-Graphen linear. Lässt man für F nur lineare Graphen zu, wird die Implikation wahr.

Bemerkung. Für alle $k \in \mathbb{N}, d, \varepsilon > 0$ und jeden linearen k-Graphen F gibt es $\delta > 0$, mit

$$\mathbf{DISC}_d(\delta) \Rightarrow \mathbf{CL}_{d,F}(\varepsilon)$$

Beweis. Wie der Beweis vom Counting-Lemma mit Induktion über $\|F\|$. □

Bemerkung. Für alle nicht-linearen k-Graphen F ist $\mathbf{DISC}_d$ nicht hinreichend für $\mathbf{CL}_{d,F}$.

Beweisbeispiel. Sei F der 3 Graph auf 4 Ecken mit 2 Kanten. Der 3-Graph H auf n Ecken, dessen Kanten die Dreiecke eines Zufallsgraphen $G(n, 1/2)$ sind, hat $\mathbf{DISC}_{1/8}$ mit Wahrscheinlichkeit $1 - o(1)$. Andererseits ist

$$N_F(H) = \frac{1}{2}^5 n^4 + o(n^4) \approx 2\left(\frac{1}{8}\right)^2 n^4 = 2N_F(G^{(3)}(n, 1/8))$$

□

Wir wollen nun eine geeignete Verallgemeinerung von $\mathbf{MIN}_d$ für k-Graphen einführen. Sei M ein k-partiter k-Graph. Für $i = 1, \ldots, k$ bezeichne $\mathrm{db}_i(M)$ zwei disjunkte Kopien von M, bei denen die sich entsprechenden Ecken der i-ten Partitionsklasse identifiziert wurden. Setze

$$C^{(k)} := \mathrm{db}_k(\mathrm{db}_{k-1}(\ldots \mathrm{db}_1(K^{(k)}_{1,\ldots,1}) \ldots))$$

Ein k-Graph H erfüllt $\mathbf{MIN}_d$, falls

$$\|H\| \geq d\binom{|H|}{k} \pm o(|H|^k) \quad \text{und} \quad N_{C^{(k)}}(H) \leq d^{2^k}|H|^{k2^{k-1}} \pm o\left(|H|^{k2^{k-1}}\right).$$

Satz 6.1. *Für $k \geq 2$ und lineare Graphen F gilt*

$$\boldsymbol{DISC}_d \Leftrightarrow \boldsymbol{MIN}_d \Leftrightarrow \boldsymbol{pHCL}_{d,F}$$

7 Regularitätslemma für Hypergraphen

Sei $H = (V, E)$ ein k-Graph und $\varepsilon > 0$ und $d \geq 0$. Ein Tupel $(X_1, \ldots, X_k)$ von k paarweise disjunkten Mengen $X_1, \ldots, X_k \subseteq V$ heißt *(ε, d)-regulär*, falls für Teilmengen $X_i' \subseteq X_i$ mit $|X_i'| \geq \varepsilon|X_i|$ für $i = 1, \ldots, k$ gilt, dass die Kantendichte zwischen X_1' bis X_k' um nicht mehr als ε von d abweicht, in Formeln:

$$|d(X_1', \ldots, X_k') - d| \leq \varepsilon \qquad \text{wobei} \quad d(X_1', \ldots, X_k') := \frac{|E(X_1', \ldots, X_k')|}{|X_1'| \cdot \ldots \cdot |X_k'|}$$

Dabei ist $E(X_1', \ldots, X_k')$ die Menge der Kanten aus E, die genau eine Ecke jeder Klasse X_i' enthalten. Das Tupel $(X_1, \ldots, X_k)$ heißt *ε-regulär*, wenn es ein $d \geq 0$ gibt, so dass $(X_1, \ldots, X_k)$ ein (ε, d)-reguläres Tupel ist.

Eine Partition $V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_t = V(H)$ der Eckenmenge eines k-Graphen H heißt *ε-regulär*, wenn folgendes gilt: $|V_0| \leq \varepsilon|H|$, $|V_1| = \ldots = |V_t|$ und alle bis auf höchstens εt^k der Tupel $(V_i)_{i\in I}$ mit $I \in \binom{[t]}{k}$ sind ε-regulär.

Analog zu Graphen definiert man alternativ: Eine balancierte Partition $V_1 \cup \ldots \cup V_t = V(H)$ heißt *ε-regulär*, wenn die Tupel $(V_i)_{i\in I}$ mit $I \in \binom{[t]}{k}$ bis auf höchstens εt^k Ausnahmen alle ε-quasiregulär sind. Ein Tupel $(X_1, \ldots, X_k)$ von k paarweise disjunkten Mengen $X_i \subseteq V(H)$ heißt dabei *ε-quasiregulär*, wenn für Teilmengen $X_i' \subseteq X_i$ mit $i = 1, \ldots, k$ gilt:

$$|E(X_1', \ldots, X_k')| = d(X_1, \ldots, X_k)|X_1'| \cdot \ldots \cdot |X_k'| \pm \varepsilon|X_1| \cdot \ldots \cdot |X_k|$$

Satz 7.1 (Schwaches Regularitätslemma)**.** *Für alle $k \geq 2, \varepsilon > 0$ und $t_0 \in \mathbb{N}$ gibt es ein $T_0 \in \mathbb{N}$, so dass jeder k-Graph H eine balancierte ε-reguläre Partition in t Klassen hat mit $t_0 \leq t \leq T_0$.*

Beweis. Analog zu Graphen □

Wir haben bereits gesehen, dass das Counting-Lemma (für $k \geq 3$) falsch ist mit nichtlineare Hypergraphen F. Das schwache Regularitätslemma erlaubt uns nun den Nachweis, dass es für lineare F tatsächlich stimmt.

Satz 7.2 (Counting Lemma für lineare Hypergraphen). *Für alle $k \geq 2, \gamma, d_0 > 0$ und jeden linearen k-Graphen F mit Eckenmenge $[\ell]$ gibt es $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass folgendes gilt: Ist $H = (V_1, \ldots, V_\ell, E_H)$ ein ℓ-partiter k-Graph mit $|V_i| \geq n_0$ und für jede Kante $I \in E(F)$ ist $(V_i)_{i \in I}$ ein (ε, d_I)-reguläres Tupel mit $d_I \geq d_0$, so ist*

$$N_F(H[V_1, \ldots, V_\ell]) = (1 \pm \gamma) \prod_{I \in E(F)} d_I \prod_{i=1}^{\ell} |V_i|$$

Beweis. Die Induktion über $\|F\|$ wie bei Graphen kann sinnvoll auf Hypergraphen erweitert werden. □

Schon für 3-Graphen ist eine stärkere Version des Regularitätslemmas nicht leicht zu erhalten. Das wollen wir nun exemplarisch an zwei Ideen demonstieren.

1. Versuch: Anstelle der Eckenpartitionen betrachten wir Partitionen der Eckenpaare. Sei $H = (V, E)$ ein 3-Graph und $G_1, \ldots, G_t$ kantendisjunkte Teilgraphen von K_V mit $\bigcup G_i = K_V$. Ein Tupel (G_i, G_j, G_k) mit $i < j < k$ heiße ε-*regulär*, wenn für alle Teilgraphen $G'_i \subseteq G_i, G'_j \subseteq G_j$ und $G'_k \subseteq G_k$ folgendes gilt:

$$\left| |E(G'_i, G'_j, G'_k)| - \frac{|E(G_i, G_j, G_k)|}{\mathrm{vol}(G_i, G_j, G_k)} \mathrm{vol}(G'_i, G'_j, G'_k) \right| \leq \varepsilon \, \mathrm{vol}(G_i, G_j, G_k)$$

Dabei ist $\mathrm{vol}(G_i, G_j, G_k)$ die Anzahl der Dreiecke in $G_i \cup G_j \cup G_k$, die aus jedem der Teilgraphen genau eine Kante enthalten und $E(G_i, G_j, G_k)$ die Menge der Kanten von H, in denen G_i, G_j und G_k jeweils genau eine Kante induzieren.

Mit diesen Definitionen bewiesen Chung (1992) und Frankl-Rödl (1993) ein passendes Regularitätslemma. Leider ist dieses Lemma ersteinmal wenig hilfreich, da wir keine Informationen über $G_1, \ldots, G_t$ haben. Sind zum Beispiel $G_1, \ldots, G_6$ aus der Partition und H ist regulär mit Dichte d auf (G_1, G_4, G_5), (G_1, G_2, G_5), (G_2, G_3, G_6) und (G_3, G_4, G_5) dann ist die Anzahl der $K_4^{(3)}$ in $H[G_1, \ldots, G_6]$ etwa das d^4-fache der Zahl der K_4, die genau ein Kante in jedem der G_i mit $i = 1, \ldots, 6$ haben, oder???

2. Versuch: Wir kontrollieren $G_1, \ldots, G_t$ mit dem Regularitätslemma. Sei $H = (V, E)$ ein 3-Graph mit Partition $V_1 \cup \ldots \cup V_t = V$. Für jedes Paar i, j mit $1 \leq i < j \leq t$ gebe es kantendisjunkte (ε, d_2)-reguläre Teilgraphen $P_1^{ij}, \ldots, P_\ell^{ij}$ von $K(V_i, V_j)$ mit $\bigcup_{\lambda=1}^{\ell} P_\lambda^{ij} = K(V_i, V_j)$ und $\|P_\lambda^{ij}\| \approx d_{unleserlich} |V_i||V_j|$ für alle $i < j$ und $\lambda \in [\ell]$. Ein Tupel $(P_{\lambda_1}^{ij}, P_{\lambda_2}^{ik}, P_{\lambda_3}^{jk})$ ist ε-*regulär*, falls für alle Teilgraphen $Q_{\lambda_1}^{ij} \subseteq P_{\lambda_1}^{ij}$, $Q_{\lambda_2}^{ik} \subseteq P_{\lambda_2}^{ik}$ und $Q_{\lambda_3}^{jk} \subseteq P_{\lambda_3}^{jk}$ gilt:

$$\left| \left| E\left(Q_{\lambda_1}^{ij}, Q_{\lambda_2}^{ik}, Q_{\lambda_3}^{jk}\right) \right| - \frac{\left| E\left(P_{\lambda_1}^{ij}, P_{\lambda_2}^{ik}, P_{\lambda_3}^{jk}\right) \right|}{\left| \left\{ K_3 \subseteq P_{\lambda_1}^{ij} \cup P_{\lambda_2}^{ik} \cup P_{\lambda_3}^{jk} \right\} \right|} \right| < \varepsilon \left| \left\{ K_3 \subseteq Q_{\lambda_1}^{ij} \cup Q_{\lambda_2}^{ik} \cup Q_{\lambda_3}^{jk} \right\} \right|$$

Nun stimmt das Counting Lemma tatsächlich. Sind zum Beispiel im 4-partiten Graphen H alle Graphen $P^{12}, \dots, P^{34}$ (ε, d_2)-regulär und die Tupel (P^{12}, P^{13}, P^{23}), (P^{12}, P^{14}, P^{24}), (P^{23}, P^{24}, P^{34}) und (P^{13}, P^{14}, P^{34}) zusätzlich (ε, d_3)-regulär, so gibt es für alle d_1, d_2, d_3 und $\gamma > 0$ ein $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass folgendes Aussage wahr ist: $|V_1|, \dots, |V_4| \geq n_0$ impliziert $|\{K_4^{(3)} \subseteq H\}| = (1 \pm \gamma) d_3^4 d_2^6 |V_1| \cdot \ldots \cdot |V_4|$.

Allerdings gibt es nun kein passendes Regularitätslemma mehr, denn ε macht Probleme. Ist die Anzahl der Graphen $t \geq 1/\varepsilon$, beachte $\varepsilon_3 >> 1/t \geq d_2 >> \varepsilon_2$.

Das Counting Lemma lautet nun: $\forall \gamma, d_3 \exists \varepsilon_3 \forall d_2 \exists \varepsilon_2, n_0$, so dass folgendes stimmt: Ist $P^{12}, \dots, P^{34}$ (ε_2, d_2)-regulär und ... sind (ε_3, d_3)-regulär und $|V_1|, \dots, |V_4| \geq n_0$ dann ...

Satz 7.3 (Regularitätslemma für 3-Graphen (Frankl-Rödl 2002))**.** *Für alle $\varepsilon_3, t_0, \varepsilon_2(\cdot)$ gibt es ein T_0, so dass folgende Aussage wahr ist: Für jeden 3-Graphen H gibt es eine balancierte Partition $V_1, \dots, V_t$ in $t_0 \leq t \leq T_0$ Klassen und Teilgraphen $\{P_\lambda^{ij} : 1 \leq i < j \leq t, \lambda \in [\ell]\}$ mit $\ell \leq T_0$, so dass*

(i) Für alle $1 \leq i < j \leq t$ und $\lambda \in [\ell]$ ist P_λ^{ij} $(\varepsilon_2(\ell), 1/\ell)$-regulär.

(ii) Alle bis auf $\varepsilon_3 \binom{t}{3} \ell^3$ der Tupel $(P_{\lambda_1}^{ij}, P_{\lambda_2}^{ik}, P_{\lambda_3}^{jk})$ mit $1 \leq i < j < k \leq t$ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [\ell]$ sind ε_3-regulär.

Erdős-Stone liefert $\mathrm{ex}(n, K_{r+1}(t)) \leq \mathrm{ex}(n, K_{r+1}) + o(n^2)$. Wie wächst t in Abhängigkeit von $c > 0$, r und n?

- Finde $t(c, r, n)$, so dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit folgender Eigenschaft: Jeder Teilgraph $H \subseteq K_n$ mit $n > n_0$ und $\|H\| \geq (1 - 1/r + c)\binom{n}{2}$ enthält $K_{r+1}(t(c, r, n))$.
- Der Beweis von Erdős-Stone liefert die optimale Schrank für $r = 1$ und im allgemeinen
$$t(c, r, n) = \underbrace{\log \circ \log \circ \ldots \circ \log}_{r \text{ mal}}(n) \alpha_c$$
- Erdős, Bollobás, Simonowits, Chvátal, Szeméredi und andere konnten zeigen, dass $t(c, r, n) = \Omega(\log n)$ im Groben richtig ist. Ishigami zeigte, dass es $\alpha \in [1, 2]$ gibt, so dass für alle $\varepsilon > 0$ und hinreichend große n folgende Abschätzung gilt:
$$(\alpha - \varepsilon) \frac{\log n}{\log 1/c} \leq t(c, r, n) \leq 2 \frac{\log n}{\log 1/c}$$

Ist $\|H\| \geq \mathrm{ex}(n, K_{r+1}) + \varepsilon n^2$, so ist $\#\{K_{r+1} \subseteq H\} = \Omega(n^{r+1})$. Daraus folgerte Erdős schon 1966, dass ein solches H auch einen $K_{r+1}(t)$ enthält mit $t = \Omega((\log n)^{1/r})$:

Satz 7.4 (Erdős 1966)**.** *Sei $\mathcal{H}$ ein $(r+1)$-uniformer Hypergraph mit $|\mathcal{H}| = n$ und $\|\mathcal{H}\| = cn^{r+1}$. Für genügend großes n enthält dann $\mathcal{H}$ stets einen $K_{r+1}^{(r+1)}(t)$ mit $t \geq c'(\log n)^{1/r}$, wobei c' nur von c und r abhängt.*

Beweisskizze. Für $r = 1$ folgt die Aussage aus Kövari-Sós-Turán. Für $r \geq 2$ zählt man ganz analog sukzessive $\#\{K_{1,\dots,1,1,t} \subseteq H\}$, $\#\{K_{1,\dots,1,t,t} \subseteq H\}$, usw. bis man schließlich $\#\{K_{t,\dots,t,t,t} \subseteq H\}$ erhält. □

Satz 7.5 (Nikiforov 2008)**.** *Für alle $r \geq 1$ und $0 < c \leq 1/2$ gilt: Enthält ein Graph G auf n Ecken cn^{r+1} Kopien von K_{r+1}, dann enthält G einen $K_{r+1}(s,\dots,s,t)$ mit $s = \lfloor c^{r+1} \log n \rfloor$ und $t > n^{1-c}$.*

Korollar 7.6. *Ist die Zahl der K_{r+1} in G in $\Omega(n^{r+1})$, so enthält G einen $K_{r+1}(s)$ mit $s = \Omega(\log n)$.*

Lemma 7.7. *Sei $B = (X, Y, E)$ ein bipartiter Graph mit $|X| = n$ und $|Y| = m$. Für $r \geq 1$ und $0 < c \leq 1/2$ setze $s := \lfloor c^{r+1} \log n \rfloor$. Ist nun $s \leq cm/2 + 1$ und $\|B\| \geq cmn$, so ist $K_2(s,t) \subseteq B$ für ein geeignetes $t \geq n^{1-c^r}$*

Beweis. Sei $t := \max\{x : B$ enthält einen $K_2(s,x)$ mit s Ecken in $X\}$. Dann ist

$$t\binom{m}{s} \geq \sum_{X' \subseteq X} \left| \bigcap_{x \in X'} N(x) \right| = \sum_{y \in Y} \binom{|N(y)|}{s} \overset{\text{Jensen}}{\geq} n \binom{\frac{1}{n}\sum |N(y)|}{s} = n\binom{cm}{s}$$

Das bedeutet

$$\begin{aligned} t &\geq n \frac{cm(cm-1)\cdot\ldots\cdot(cm-s+1)}{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-s+1)} \\ &\geq n\left(\frac{cm-s+1}{m}\right)^s \geq n(c/2)^s \\ &= n^{1+2c^r(c/2)\log(c/2)} > n^{1-c^r} \end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 7.5. Wir wenden Induktion über r an. Der Induktionsanfang mit $r = 1$ folgt aus obigem Lemma: die Vereinigung der cn^{r+1} gegebenen Kopien von K_{r+1} in G enthält den $K_{r+1}(s,\dots,s,t)$.

Sie $\mathcal{M}$ die Menge der gegebenen cn^{r+1} Kopien von K_{r+1} in G. Für eine r-elementige Menge $R \subseteq V(G)$ sei

$$\deg_{\mathcal{M}}(R) := |\{M \in \mathcal{M} : R \subseteq M\}|$$

Wir werden nun zeigen, dass es ein $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{M}$ mit $|\mathcal{L}| \geq \frac{c}{2}n^{r+1}$ gibt, so dass $\deg_{\mathcal{L}}(R) \geq cn$ für alle $L \in \mathcal{L}$ (beachte $|L| = r+1$) und für alle $R \in \binom{L}{r}$.

Dazu entfernen wir schrittweise Elemente aus $\mathcal{M}$ bis die Bedingung erfüllt ist. Sei $\mathcal{L}_0 := \mathcal{M}$. Gibt es in $\mathcal{L}_i$ noch ein L mit $R \subseteq L$, so dass $\deg_{\mathcal{L}}(R) \leq cn$, dann setze $\mathcal{L}_{i+1} := \{L \in \mathcal{L}_i : R \nsubseteq L\}$. Andernfalls setze $\mathcal{L} := \mathcal{L}_i$. Dann ist

$$|\mathcal{M} \setminus \mathcal{L}| \leq cn\binom{n}{r} \leq \frac{cn^{r+1}}{r!} \leq \frac{cn^{r+1}}{2}$$

Nach Induktionsannahme überdeckt dann $\mathcal{L}^{(r)} := \{R \subseteq L \in \mathcal{L} : |R| = r\}$ einen $K_r(s', \ldots, s', t')$ wobei $s' = (\frac{c}{2}(r+1))^r \log(n)$ und $t' \geq s'$. Außerdem ist $|\mathcal{L}^{(r)}| \geq |\mathcal{L}|(r+1)/n \geq \frac{r+1}{2}cn^r$. Dann gibt es eine Menge X von s' paarweise disjunkten K_r in G, welche den $K_r(s', \ldots, s') \subseteq K_r(s', \ldots, s', t')$ überdecken.

Sei $B = (X, V(G), E_B)$ der bipartite Graph mit $(R, v) \in E_B$ genau dann, wenn $R \cup \{v\} \in \mathcal{L}$. Es ist $|X| = s'$ und $|E_B| \geq cns'$. Nach dem vorhergehen Lemma gibt es einen $K_2(s,t)$ in B mit $s = c^{r+1} \log n$, falls $s < \frac{c}{2}s' + 1$ und $t > n^{1-c^r}$. Somit spannen die s Kopien von K_r und die t Ecken aus $V(G)$, die durch den $K_2(s,t)$ in B gegeben sind einen $K_{r+1}(s, \ldots, s, t)$ auf. □

Gibt es einen analogen Satz für Hypergraphen? Ist $\mathcal{H}$ ein 3-Graph und $\#\{K_4^{(3)} \subseteq \mathcal{H}\} = \Omega(n^4)$, so gibt es einen $K_4^{(3)}(t)$ in $\mathcal{H}$ mit $t = \Omega(\sqrt{\log n})$. Allgemein gibt es einen $K_{r+1}^{(3)}(t)$ in $\mathcal{H}$, wenn $\#\{K_{r+1}^{(3)} \subseteq \mathcal{H}\} = \Omega(n^{r+1})$.

8 Struktur dreieckfreier Graphen mit hohem Minimalgrad

Die Klasse aller dreieckfreien Graphen G mit $\delta(G) \geq (\frac{1}{3} + \varepsilon)|G|$ sei bezeichnet mit $\mathcal{G}(\varepsilon)$. Hajnál konnte zeigen, dass die Graphen in $\mathcal{G}(\varepsilon)$ unbeschränkte chromatische Zahl haben für jedes $\varepsilon < 0$.

Satz 8.1 (Thomassen 2004). *Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Schranke $K \in \mathbb{N}$, so dass $\chi(G) \leq K$ für alle $G \in \mathcal{G}(\varepsilon)$ (und $K \in O(1/\varepsilon)$).*

Korollar 8.2. *Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $K \in \mathbb{N}$, so dass es für jedes $G \in \mathcal{G}(\varepsilon)$ einen Graphenhomomorphismus $\varphi : G \to K_K$ gibt.*

Satz 8.3 (Łuczak 2006). *Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $L \in \mathbb{N}$, so dass es für alle $G \in \mathcal{G}(\varepsilon)$ einen Graphenhomomorphismus $\varphi : G \to F$ auf einen dreieckfreien Graphen F mit $|F| \leq L$ gibt (und L ist eine Power-Tower Funktion mit Höhe $O(poly(1/\varepsilon))$).*

Der Satz von Łuczak impliziert den Satz von Thomassen (mit einer viel schlechteren Schranke).

Bemerkung. Ist $G \in \mathcal{G}(\varepsilon)$ mit nicht-disjunkten unabhängigen Mengen $S_1, S_2 \subseteq V(G)$, so ist $|S_1 \cup S_2| \leq (\frac{2}{3} - \varepsilon)|G|$.

Beweis. Sei $v \in S_1 \cap S_2$. Dann ist $N(v) \cap (S_1 \cup S_2) = \emptyset$, da S_1 und S_2 unabhängig sind. Somit ist

$$|S_1 \cup S_2| \leq |G| - d(v) \leq |G| - \left(\frac{1}{3} + \varepsilon\right)|G| = \left(\frac{2}{3} - \varepsilon\right)|G|$$

□

Bemerkung. Ist $G \in \mathcal{G}(\varepsilon)$ maximal (d.h. Hinzufügen einer Kante erzeugt ein Dreieck) und sind $u, v \in V(G)$ nicht benachbart, dann gilt $|N(u) \cap N(v)| \geq 3\varepsilon|G|$.

Beweis. Da G dreieckfrei ist, sind $N(u)$ und $N(v)$ jeweils unabhängig. Aufgrund der Maximalität von G erzeugt das Hinzufügen der Kante uv ein Dreieck, also ist $N(u) \cap N(v) \neq \emptyset$. Mit der vorigen Bemerkung folgt $|N(u) \cup N(v)| \leq (\frac{2}{3} - \varepsilon)|G|$. Also ist

$$\begin{aligned}|N(u) \cap N(v)| &= |N(u)| + |N(v)| - |N(u) \cup N(v)| \\ &\geq 2\left(\frac{1}{3} + \varepsilon\right)|G| - \left(\frac{2}{3} - \varepsilon\right)|G| = 3\varepsilon|G|\end{aligned}$$

□

Lemma 8.4 (Brandt)**.** *Sei $G \in \mathcal{G}_n(0)$ ein maximaler Graph. Dann enthält G keine induzierte Kopie des 3-dimensionalen Kubus Q_3.*

Beweisskizze für Satz 8.3. O.B.d.A. sei $0 < \varepsilon \leq 1/100$. Das Regularitätslemma mit $\varepsilon' = \varepsilon^{10}$ und $t_0 = 1/\varepsilon^{10}$ liefert eine Partition $V_0 \cup \ldots \cup V_M$, so dass

(i) $\varepsilon^{-10} \leq M \leq M_0 = M_0(\varepsilon)$

(ii) $|V_0| \leq \varepsilon^{10}n$ und $|V_1| = \ldots = |V_M|$

(iii) höchstens $\varepsilon^{10}\binom{M}{2}$ Paare (V_i, V_j) mit $1 \leq i < j \leq M$ sind nicht ε^{10}-regulär

Behauptung. Es gibt eine Partition $\bar{V}_0 \cup \ldots \cup \bar{V}_{\bar{M}}$, so dass

a) $V_0 \subseteq \bar{V}_0$ und $|\bar{V}_0| \leq 2\varepsilon^3|G|$

b) $|\bar{V}_1| = \ldots = |\bar{V}_{\bar{M}}| = \lceil(1 - \varepsilon^3)|V_1|\rceil$

c) $\bar{V}_i$ ist unabhängig in G für $i = 1, \ldots, \bar{M}$

d) $d(\bar{V}_i, \bar{V}_j) \in \{0, 1\}$ für $1 \leq i < j \leq \bar{M}$

e) $\bar{G} := G[\bigcup_{i=1}^{\bar{M}} \bar{V}_i] = G - \bar{V}_0$ ist homomorph zu einem maximalen Graphen $\bar{H} \in \mathcal{G}(\frac{9}{10}\varepsilon)$ auf $\bar{M}$ Ecken.

Wegen (iii) gibt es höchstens $2\varepsilon^5 M$ Indizes i, für die jeweils mindestens $2\varepsilon^5 M$ Indizes j existieren, so dass (V_i, V_j) nicht ε^{10}-regulär ist. Sei B die Menge dieser Indizes i. Setze $\hat{V}_0 := V_0 \cup \bigcup_{i \in B} V_i$ und sei $\hat{V}_0 \cup \ldots \cup \hat{V}_{\hat{M}}$ die „Restpartition".

Zusammen mit dem Lemma von Brandt impliziert das Counting Lemma, dass $\varepsilon^3 \leq d(V_i, V_j) \leq 1 - \varepsilon^9$ für jedes ε^{10}-reguläre Paar (V_i, V_j). Sonst enthielte G eine bipartite induzierte Kopie von Q_3 im Widerspruch zur Maximalität von G. Das zeigt man wie folgt: Man nehme jeweils vier Kopien $X_1, \ldots, X_4$ und $Y_1, \ldots, Y_4$ von zwei Partitionsklassen X und Y und fasse $\{X_i : i = 1, \ldots, 4\} \cup \{Y_i : 1, \ldots, 4\}$ als Bipartition eines Q_3 auf. Zwischen X_i und Y_j zeichne alle Kanten von $G[X, Y]$, falls X_i und Y_j benachbart sind in dem Q_3 und $\bar{G}[X, Y]$ sonst. Nach dem Counting Lemma enthält der so konstruierte Graph $\Omega(|X|^4|Y|^4)$ Kopien von $K_{4,4}$. Von diesen entsprechen $\Omega(|X|^4|Y|^4) - o(|X|^4|Y|^4)$ jeweils einer induzierten Kopie von Q_3 in $G[X, Y]$.

Behauptung. Ist $|\{(w_i, w_j) \in V_i \times V_j : w_i w_j \notin E(G)\}| \geq 5\varepsilon^2 |\hat{V}_i||\hat{V}_j|$ für alle $1 \leq i < j \leq \hat{M}$, dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq \hat{M}$, so dass $(\hat{V}_i, \hat{V}_k)$ und $(\hat{V}_j, \hat{V}_k)$ beide ε^{10}-regulär sind und $d(\hat{V}_i, \hat{V}_k), d(\hat{V}_j, \hat{V}_k) \geq 1 - \varepsilon^9$.

Nach Voraussetzung sind $\{w_{i,1}, w_{j,1}\}, \ldots, \{w_{i,r}, w_{j,r}\} \notin E(G)$ paarweise disjunkt für $r \geq 2\varepsilon^2 |\bar{V}_i|$. Wir haben (in einer früheren Bemerkung) bereits gesehen, dass $|N(w_{i,\ell}) \cap N(w_{j,\ell})| \geq 3\varepsilon|G|$. Selbst wenn man aus diesem Schnitt alle Ecken von $\hat{V}_x$ entfernt mit

- $x = 0$, $x = i$ oder $x = j$
- $(\hat{V}_i, \hat{V}_x)$ nicht ε^{10}-regulär
- $(\hat{V}_j, \hat{V}_x)$ nicht ε^{10}-regulär

hat die verbleibende Menge B noch mindestens $2\varepsilon|G|$ Ecken.

Es gibt also mindestens $2r\varepsilon n \geq 4\varepsilon^3 |V_i|$ Tripel (a, b, c) mit $a \in A := \{w_{i,1}, \ldots, w_{i,r}\}$, $b \in B$ und $c \in C := \{w_{j,1}, \ldots, w_{j,r}\}$. Somit existiert ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $\{(a, b) : a \in A, b \in V_k, \exists c \in C \ldots\}| \geq \varepsilon^3 |\hat{V}_i||\hat{V}_k|$ und gleichzeitig $\{(b, c) : c \in C, b \in V_k, \exists a \in A \ldots\}| \geq \varepsilon^3 |\hat{V}_j||\hat{V}_k|$. Somit ist $d(\hat{V}_i, \hat{V}_k) \geq 1 - \varepsilon^9$ und $d(\hat{V}_j, \hat{V}_k) \geq 1 - \varepsilon^9$.

Wir verschieben nun nacheinander alle Ecken $v \in \hat{V}_i$, für die es ein $w \in \hat{V}_j$ gibt mit $vw \notin E$ aber $d(\hat{V}_i, \hat{V}_j) \geq 1 - 5\varepsilon^2$, nach $\hat{V}_0$. Die Ecken v und w haben mindestens $2\varepsilon n$ gemeinsame Nachbarn außerhalb von $\hat{V}_0$, $\hat{V}_i$ und $\hat{V}_j$. Sei $x \in \hat{V}_k$ ein solcher Nachbar (also $k \neq 0, i, j$). Dann ist $d(\hat{V}_i, \hat{V}_k) < \varepsilon^9$ oder $d(\hat{V}_j, \hat{V}_k) < \varepsilon^9$. Ohne Einschränkung gibt es somit εn solche Nachbarn deren Klassen mit $\hat{V}_i$ ein Paar der Dichte kleiner als ε^9 bilden. Mit der Verschiebung von v (bzw. w) nach $\hat{V}_0$ „entfernen“ wir also mindestens εn Kanten, die in Paaren mit Dichte kleiner ε^9 liegen. Auf diese Weise können wir folglich höchstens $\varepsilon^9 n^2 / (\varepsilon n) = \varepsilon^8 n$ Ecken entfernen.

Nun verschieben wir alle Klassen nach $\hat{V}_0$, die weniger als $\lceil (1 - \varepsilon^3)|V_1| \rceil$ Ecken haben. Außerdem verschieben wir die überschüssigen Ecken der restlichen Klassen auch nach $\hat{V}_0$. Die resultierende Partition bezeichnen wir mit $\bar{V}_0 \cup \ldots \cup \bar{V}_{\bar{M}} = V$.

Dann ist b) klar und a) kann man nachrechnen. Weil $\delta(G) \geq n/3 + \varepsilon n$, gibt es für alle $i = 1, \ldots, \bar{M}$ ein j ($\bar{M}/3$ viele um genau zu sein), mit $d(\bar{V}_i, \bar{V}_j) > \varepsilon^9$. Somit ist $\|G[V_i]\| = 0$ und $d(\bar{V}_i, \bar{V}_j) = 1$.

Für d) ist wie vorhin $d(\bar{V}_i, \bar{V}_j) \leq 1 - 5\varepsilon^2$. Somit ist $d(\bar{V}_i, \bar{V}_j) \leq \varepsilon^9$. Es gibt also ein k mit $d(\bar{V}_i, \bar{V}_k) = d(\bar{V}_j, \bar{V}_k) = 1$. Dies bedeutet $d(\bar{V}_i, \bar{V}_j) = 0$ wegen der Dreieckfreiheit.

Definiere $\bar{F}$ durch $V(\bar{F}) := [\bar{M}]$ und $ij \in E(\bar{F})$ genau dann, wenn $d(\bar{V}_i, \bar{V}_j) = 1$. $\bar{F}$ ist dreieckfrei und es gibt einen Homomorphismus $G \to \bar{F}$. Man kann nachrechnen $\delta(\bar{F}) \geq (1/3 + 0.9\varepsilon)\bar{M}$ (nicht mit der obigen Schranke an a).

Sei $V(F) := V(\bar{F}) \cup \mathcal{P}V(\bar{F})$. Dann ist $|F| = \bar{M} + 2^{\bar{M}} = L(\varepsilon)$. Für $x \in \bar{V}_0$ sei $N'(x) := N(x) \setminus \bar{V}_0$ und $S(x) := \{i : N'(x) \cap \bar{V}_i \neq \emptyset\}$. Sei

$$E(F) := E(\bar{F}) \cup \bigcup_{x \in \bar{V}_0} \{\{S(x), y\} : y \in S(x)\} \cup \bigcup \{\{S(x), S(x^*)\} : xx^* \in E\}$$

Für alle $x \in \bar{V}_0$ gibt es keine $y, y' \in S(x)$ mit $yy' \in E(F)$.

Wir müssen zeigen, dass es einen Homomorphismus $G \to F$ gibt, d.h. für alle x, x' ist $S(x) \cap S(x') \neq \emptyset$ und für $x \neq x'$ ist $xx' \notin E$. Außerdem fehlt noch ein Nachweis, dass F wirklich dreieckfrei ist.

Ist $xx' \notin E$, so ist $|N(x) \cap N(x')| \geq 3\varepsilon n$. Es gibt also ein $v \in \bar{V}_0$ mit $v \in N(x) \cap N(x')$. Folglich ist $S(x) \cap S(x') \neq \emptyset$.

Ist $xx^* \in E$ und $x, x^* \in \bar{V}_0$, so gilt $S(x) \cap S(x^*) = \emptyset$. Zusammen mit den früheren Bemerkungen ist dies ein Widerspruch, denn $S(x)$ und $S(x^*)$ sind unabhängig in $\bar{F}$. $\square$