Christian Fleischhack Universität Hamburg

Differentialgeometrie II

Übungsblatt 1

Abgabetermin: Montag, 6. November 2006, zur Vorlesung

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*

Beweisen Sie die Formeln für die erste und zweite Variation des Bogenlängenfunktionals:
Sei $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ eine stückweise C^∞-Kurve mit $\|\dot\gamma\| > 0$, und sei c eine stückweise glatte Variation von γ. Dann gilt mit $\varepsilon := \operatorname{sgn} g(\dot\gamma, \dot\gamma)$ und $L(s) := L(c(\cdot, s))$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} L(s) \quad = \quad \int_a^b \varepsilon \, \frac{\frac{\partial}{\partial t} g\bigl(c', \dot c\bigr) - g\bigl(c', \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \dot c\bigr)}{\|\dot c\|} \, \mathrm{d}t$$

Folgere daraus für $\|\dot\gamma\| = \text{const} \neq 0$, daß

$$L'(0) \quad = \quad \frac{\varepsilon}{\|\dot\gamma\|} \Bigl(- \int_a^b g(\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma, X) \, \mathrm{d}t \; + \; \sum_{i=0}^{k-1} g(\dot\gamma, X) \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} \Bigr),$$

wobei X das zu c gehörige Variationsvektorfeld ist.
Ist außerdem γ eine Geodätische, so gilt:

$$L''(0) \quad = \quad \frac{\varepsilon}{\|\dot\gamma\|} \Bigl(\int_a^b \bigl[g\bigl(\nabla_{\dot\gamma} X^\perp, \nabla_{\dot\gamma} X^\perp\bigr) - g\bigl(R(\dot\gamma, X^\perp) X^\perp, \dot\gamma\bigr) \bigr] \, \mathrm{d}t \; + \; g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} X, \dot\gamma) \Big|_a^b \Bigr).$$

Aufgabe 2 *(2 Punkte)*

Beweisen Sie:
Sei N eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit einer vollständigen, zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit M. Dann existiert für jedes $p \in M$ eine Geodätische γ von p zu einem Punkt auf N mit $L(\gamma) = d(p, N) := \inf_{q \in N} d(p,q)$. Der Weg γ trifft N orthogonal.