

Analysis I

Übungsblatt 14

Die Lösungsblätter sind bis

Montag, 1. Februar 2010, 11:00 Uhr

in die in Flur D1 befindlichen grünen Schließfächer

Nr. 116 (Gruppen 1 bis 3) bzw. Nr. 129 (Gruppen 4 bis 7) zu werfen.

Aufgabe 80

(4 Punkte)

Sei $A : X \rightarrow Y$ eine lineare Abbildung zwischen normierten Räumen mit $X \neq \{0\}$.

Zeigen Sie, daß

$$\sup_{x \in X, \|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Aufgabe 81

(4 Punkte)

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der auf $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}$ definierten Funktion $f(a, z) := a^z$ nach a bzw. z .

Aufgabe 82

(8 Punkte)

Wo sind f' bzw. f'' für die Funktionen

$$f(x) := \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad f(x) := \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

jeweils definiert und wo stetig?¹ Bestimmen Sie f' und f'' , soweit definiert.

Aufgabe 83

(8 Punkte)

Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen auf dem jeweils in Klammern angegebenen Teilbereich von \mathbb{R} :

$$f(x) := x^{-n} \quad (x \in \mathbb{R} \text{ mit } x \neq 0, n \in \mathbb{N})$$

$$f(x) := |x|x \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$f(x) := e^{\sin(x \ln x)} \quad (x \in \mathbb{R} \text{ mit } x > 0)$$

$$f(x) := \frac{x}{1-x^2} \quad (x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| \neq 1)$$

Aufgabe 84

(4 Punkte)

Bestimmen Sie die zweite Ableitung von $f \circ g : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ für zweimal differenzierbare Funktionen $f, g : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$.

¹Hiermit ist nicht die Stetigkeit von $f'(x_0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sondern die von f' als von x abhängigem Differentialquotienten gemeint.

Aufgabe 85**(7 Punkte)**

Berechnen Sie für die Funktion $f(x, y) := x^2 + y^2 + 2x^3 \sin y$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ alle partiellen Ableitungen bis zur 2. Ordnung, also

$$f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}.$$

Gilt $f_{xy} = f_{yx}$?