Prof. Dr. C. Fleischhack, Dr. A. Alldridge: **Analysis I** (WS 2009/10), Blatt 12

Aufgabe 72 (8 Punkte)

Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion des Grades $d \in \mathbb{N}$, d.h. es gebe reelle Konstanten $a_0, \ldots, a_d$, $a_d \neq 0$, mit $p(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) Sei d ungerade. Zeigen Sie, dass $p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ist.

(b) Sei $d > 0$, d gerade und $a_d > 0$. Zeigen Sie, dass $p(\mathbb{R}) = [\min p(\mathbb{R}), \infty[$ ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass zu $R > 0$ ein Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ existiert, so dass $|p(x)| > R$ für alle $x \notin [a, b]$. Wenden Sie den Satz von Weierstraß und den Zwischenwertsatz an.

Aufgabe 73 (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Für $1 \leqslant x < y$ gilt $x + \frac{1}{x} < y + \frac{1}{y}$. **Hinweis:** Man betrachte $y - x$.

(b) Man definiere $\cosh(z) = \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right)$ für $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $\cosh : [0, \infty[\to [1, \infty[$ bijektiv ist. **Hinweis:** Man zeige, dass cosh streng monoton wachsend ist und wende den Zwischenwertsatz an.

Aufgabe 74 (9 Punkte)

(a) Sei $f_n(x) = x^n$ für $x \in [0, 1]$. Man zeige, dass f_n punktweise gegen eine Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ konvergiert, und bestimme diese Grenzfunktion.

(b) Sei f_n wie in (a). Untersuchen Sie die Gleichmäßigkeit der Konvergenz von (f_n) auf den Intervallen $[0, 1]$, $[0, 1[$ und $[0, q]$, $0 < q < 1$.

(c) Für alle $x \in]-1, 1[$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ gegen $\frac{1}{1-x}$. Man untersuche, ob die Konvergenz gleichmäßig ist.

Aufgabe 75 (13 Punkte)

Sei $\alpha \in \mathbb{Q}$.

(a) Sei $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Zeigen Sie $|1 - x^\alpha| \leqslant |1 - x|$ für alle $x \geqslant 0$.

(b) Sei $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Folgern Sie aus (a):

$$|x^\alpha - y^\alpha| \leqslant |x - y| \quad \text{für alle } x, y \geqslant 0\,,\ \max(x, y) \geqslant 1\,.$$

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion $f_\alpha : [0, \infty[\to \mathbb{R} : x \to x^\alpha$ gleichmäßig stetig ist, wenn $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. **Hinweis:** Betrachten Sie das Intervall $[0, 1]$ gesondert.

(d) Zeigen Sie, dass f_α nicht gleichmäßig stetig ist, wenn $\alpha > 1$.
Hinweis: Betrachten Sie für $\alpha = \frac{p}{q}$ die Funktion f_α an den Stellen

$$\left(n + \tfrac{r}{n^{q-1}}\right)^q \quad \text{und} \quad n^q \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } 0 < r \leqslant 1\,.$$

Bitte geben Sie die Hausübungen bis Montag, 18.1.2010, 11:00 Uhr ab.
(Grüne Kästen Nr. 116 (Gruppen 1–3) und 129 (Gruppen 4–7) auf Flur D1.)