Christian Fleischhack Universität Paderborn

Analysis I

Übungsblatt 10

Die Lösungsblätter sind bis

Montag, 4. Januar 2010, 11:00 Uhr

in die in Flur D1 befindlichen grünen Schließfächer
Nr. 116 (Gruppen 1 bis 3) bzw. Nr. 129 (Gruppen 4 bis 7) zu werfen.

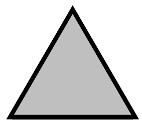
... und trotz Übungsaufgaben:
Ein besinnliches Weihnachtsfest und ein gesundes, erfolgreiches Neues Jahr!

Aufgabe 59 *(5 Zusatzpunkte)*

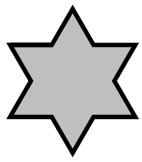
Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 1; dies sei Polygon Nummer 0. Nun konstruieren Sie induktiv das Polygon Nummer $k+1$ aus dem mit Nummer k, indem Sie das mittlere Drittel einer jeden Kante des Polygons Nummer k durch zwei Kanten ersetzen, so daß diese beiden neuen Kanten mit der alten, gestrichenen „Drittelkante" ein gleichseitiges Dreieck bilden, welches nach außen „zeigt". (Siehe auch Skizze)

- Skizzieren Sie die Polygone der Nummern 2 und 3.
- Bestimmen Sie:
  - die Anzahl der Kanten von Polygon k;
  - die Längen der Kanten von Polygon k;
  - den Umfang von Polygon k;
  - den Inhalt der von Polygon k umschlossenen Fläche,

  sowie die jeweiligen Grenzwerte für k gegen Unendlich.
- Ist die Vereinigung aller dieser Polygone (in $\mathbb{R}^2$) beschränkt?



Polygon 0



Polygon 1

Aufgabe 60 *(6 Punkte)*

Konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \,?$$

Hinweis: Rekapitulieren Sie die Untersuchung der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

Aufgabe 61 *(5 Punkte)*

Zeigen Sie, daß die Exponentialfunktion auf $\mathbb{C}$ stetig ist.

Aufgabe 62 *(7 Punkte)*

Bestimmen Sie alle in 0 stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, die der Funktionalgleichung

$$f(u+v) \quad = \quad f(u) + f(v)$$

für alle $u, v \in \mathbb{R}$ genügen.

Aufgabe 63 *(4 Zusatzpunkte)*

Was passiert, wenn die Stetigkeitsvoraussetzung in Aufgabe 62 fallengelassen wird?

Hinweis: $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum, hat also insbesondere eine Basis.
Merke: Die Stetigkeitsforderung ist sehr stark.

Aufgabe 64 *(7 Punkte)*

Seien X, Y metrische Räume, $f : X \longrightarrow Y$ eine Funktion.
1. Zeigen Sie, daß f in allen isolierten Punkten stetig ist.
2. Zeigen Sie, daß für alle Häufungspunkte a von X gilt:

$$f \text{ stetig in } a \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

3. Zeigen Sie:

$$f \text{ stetig} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \text{ für alle Häufungspunkte } a \text{ von } X$$

Aufgabe 65 *(5 Punkte)*

Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \quad := \quad \begin{cases} 0 & \text{falls } x \text{ irrational} \\ 1 & \text{falls } x \text{ rational} \end{cases}$$

stetig?

Aufgabe 66 *(5 Zusatzpunkte)*

Bestimmen Sie die Menge aller reellen Zahlen, die sich als Konvergenzradius einer Potenzreihe mit ganzzahligen Koeffizienten darstellen lassen.

Hinweis: Unterscheiden Sie, ob die Reihe abbricht oder nicht.

Aufgabe 67 *(6 Zusatzpunkte)*

Sei M eine Teilmenge eines metrischen Raumes X.
In welchen Punkten ist die charakteristische Funktion

$$\chi_M(x) \quad := \quad \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in M \\ 0 & \text{falls } x \notin M \end{cases}$$

stetig?