Christian Fleischhack Universität Paderborn

Analysis I

Übungsblatt 9

Die Lösungsblätter sind bis

Montag, 14. Dezember 2009, 11:00 Uhr

in die in Flur D1 befindlichen grünen Schließfächer
Nr. 116 (Gruppen 1 bis 3) bzw. Nr. 129 (Gruppen 4 bis 7) zu werfen.

Aufgabe 55 *(6 Punkte)*

Zeigen Sie, daß die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist.

Aufgabe 56 *(6 Punkte)*

Finden Sie eine Folge, die „schneller als jede Potenz" wächst, aber „langsamer als jede Exponentialfunktion".

Explizit heißt dies: Finden Sie eine Funktion $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, so daß gilt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t^n} \quad \to \quad \infty \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{\mathrm{e}^{at}} \quad \to \quad 0 \qquad \text{für alle } a > 0\,.$$

Aufgabe 57 *(9 Punkte)*

Binomialkoeffizienten kann man nicht nur für ganze Zahlen einführen. Für beliebiges $a \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_+$ setzt man

$$\binom{a}{n} \quad := \quad \frac{a(a-1)\cdots(a-[n-1])}{n(n-1)\cdots 1}$$

sowie $\binom{a}{0} := 1$. Zeigen Sie nun, daß für $a \in \mathbb{N}$ diese Formel mit der bereits bekannten Formel für Binomialkoeffizienten übereinstimmt und daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n}$$

für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 1$ absolut konvergiert.

Aufgabe 58 *(7 Punkte)*

Sei X eine Menge und Y ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.
Zeigen Sie, daß der Raum $\mathrm{Fun}(X, Y)$ aller Funktionen von X nach Y bzgl.

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2)(x) \quad &:= \quad f_1(x) + f_2(x) \\ (\lambda f)(x) \quad &:= \quad \lambda f(x) \end{aligned}$$

mit $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ sowie $f, f_1, f_2 \in \mathrm{Fun}(X, Y)$ zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum wird.