Christian Fleischhack Universität Paderborn

Analysis I

Übungsblatt 8

Die Lösungsblätter sind bis

Montag, 7. Dezember 2009, 11:00 Uhr

in die in Flur D1 befindlichen grünen Schließfächer
Nr. 116 (Gruppen 1 bis 3) bzw. Nr. 129 (Gruppen 4 bis 7) zu werfen.

Aufgabe 49 *(3 Punkte)*

Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2}$?

Aufgabe 50 *(13 Punkte)*

Bestimmen Sie in den folgenden Fällen, ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert oder bestimmt divergiert:

$$\text{a)}\quad a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1}, \qquad \text{b)}\quad a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}, \qquad \text{c)}\quad a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}.$$

$$\text{d)}\quad a_n = \binom{4n}{3n}^{-1}, \qquad \text{e)}\quad a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \qquad \text{f)}\quad a_n = \sqrt[n]{a} - 1 \text{ mit } a > 0\,.$$

Bestimmen Sie zudem den Wert der Reihe im Fall e).

Aufgabe 51 *(4 Punkte)*

Bestimmen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}\,.$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, daß $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Aufgabe 52 *(4 Punkte)*

Beweisen Sie das Minorantenkriterium: Ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eine gegen $+\infty$ bestimmt divergente Reihe und $a_n \geq c_n$ für fast alle n, so divergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ gegen $+\infty$.

Aufgabe 53 *(6 Punkte)*

Sei $\sum a_n$ eine konvergente Reihe mit nichtnegativen reellen Gliedern. Ist dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sqrt{a_n}$$

stets konvergent? Wenn ja, beweisen Sie es; wenn nicht, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 54 ***(8 Punkte)***

1. Zeigen Sie (ohne Verwendung des noch nicht eingeführten Logarithmus), daß das Wurzelkriterium stets die absolute Konvergenz anzeigt, sobald dies auch das Quotientenkriterium tut.
2. Finden Sie konkret heraus, für welche $p, q \in \mathbb{R}$ bzw. welche $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $p \neq \pm 1$, $q \neq 0$ das Wurzelkriterium bei
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p + (-1)^k}{q^k}$$
Konvergenz anzeigt, das Quotientenkriterium jedoch nicht.

Hinweis: Zeigen Sie also konkret:

1. Für jede Folge (a_n) mit $a_n \neq 0$ für (fast) alle n gilt:
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} < 1\,.$$

2. Finden Sie diejenigen p, q in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{Z}$ mit $p \neq \pm 1$, $q \neq 0$, so daß für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ mit
$$a_k \;=\; \frac{p + (-1)^k}{q^k}$$
gilt:
$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} < 1 \quad \textit{und} \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} \geq 1\,.$$