Christian Fleischhack Universität Paderborn

# Analysis I

## Übungsblatt 7

*Die Lösungsblätter sind bis*

**Montag, 30. November 2009, 11:00 Uhr**

*in die in Flur D1 befindlichen grünen Schließfächer*
*Nr. 116 (Gruppen 1 bis 3) bzw. Nr. 129 (Gruppen 4 bis 7) zu werfen.*

### Aufgabe 44 *(4 Punkte)*

Gibt es eine Folge, die genau 44 (verschiedene) Teilfolgen besitzt?

### Aufgabe 45 *(7 Punkte)*

Bestimmen Sie den Limes der Folgen

a) $\sqrt[n]{n}\,,$ b) $\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}\,,$ c) $\sqrt[p]{n + \sqrt[q]{n}} - \sqrt[p]{n}$ für $p, q \in \mathbb{N}_+\,.$

### Aufgabe 46 *(5 Punkte)*

Zeigen Sie, daß zu jeder positiven reellen Zahl $x$ eine Folge $1 < n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ natürlicher Zahlen existiert, so daß

$$x \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n_k} \quad := \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n_k}\,.$$

### Aufgabe 47 *(4 Punkte)*

Ist jeder folgenkompakte metrische Raum vollständig?

### Aufgabe 48 *(14 Punkte)*

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Zeigen Sie, daß $(X, d)$ eine Vervollständigung besitzt, also ein vollständiger metrischer Raum $(\overline{X}, \overline{d})$ existiert, so daß $X$ eine dichte Teilmenge von $\overline{X}$ ist und die Einschränkung $\overline{d}|_{X\times X}$ von $\overline{d}$ auf $X$ (genauer: $X \times X$) gleich $d$ ist. – Strategie:

- Führen Sie eine Relation auf dem Raum $Y$ aller Cauchyfolgen in $X$ ein:
  $$(x'_n) \sim (x''_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d(x'_n, x''_n) = 0\,.$$
  Zeigen Sie, daß dies eine Äquivalenzrelation definiert.
- Betrachten Sie $\overline{X} := Y/\sim$, und definieren Sie $\overline{d} : \overline{X} \times \overline{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch
  $$\overline{d}\big([(y_n)], [(z_n)]\big) \quad := \quad \lim_{n\to\infty} d(y_n, z_n)\,.$$
  Zeigen Sie, daß $\overline{d}$ eine wohldefinierte Metrik auf $\overline{X}$ darstellt und $(\overline{X}, \overline{d})$ vollständig ist.
- Zeigen Sie, daß $X$ via $x \longmapsto [(x, x, x, \ldots)_{n\in\mathbb{N}}] \in \overline{X}$ als dichte Teilmenge von $\overline{X}$ aufgefaßt werden kann (also insb. diese Abbildung Abstände erhält und somit injektiv ist).

Zeigen Sie zudem, daß $(\mathbb{R}, d)$ eine Vervollständigung von $(\mathbb{Q}, d)$ (bzgl. der üblichen Metrik $d(a, b) := |a - b|$) ist.