Christian Fleischhack Universität Paderborn

Analysis I

Übungsblatt 6

Die Lösungsblätter sind bis

Montag, 23. November 2009, 11:00 Uhr

in die in Flur D1 befindlichen grünen Schließfächer
Nr. 116 (Gruppen 1 bis 3) bzw. Nr. 129 (Gruppen 4 bis 7) zu werfen.

Aufgabe 38 *(4 Punkte)*

Stellen Sie sich vor, Sie legen einen Stadtplan ausgebreitet auf den Fußweg. Gibt es dann stets einen Punkt auf dem Stadtplan, der genau über dem zugehörigen realen Punkt liegt?

Hinweis: Sie sollten an einen handelsüblichen, die ganze Stadt abdeckenden einseitig bedruckten Plan denken. Er sollte auch zur Stadt passen, in der Sie sich befinden. Eine Begründung à la „Ein Stadtplan von London wird in Paris nicht funktionieren." dürfte Ihr Punktekonto nicht vergrößern.

Aufgabe 39 *(6 Punkte)*

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und A, B sowie A_i, $i \in I$, Teilmengen von X. Bezeichne mit $\operatorname{Int} A$ die Menge der inneren Punkte von A. Zeigen Sie:

- $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$
- $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)$
- $\operatorname{Int}(A) \subseteq \operatorname{Int}(B)$ für $A \subseteq B$
- $\operatorname{Int}(\bigcup_i A_i) \supseteq \bigcup_i \operatorname{Int}(A_i)$.

Bestimmen Sie zudem $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A))$ und $\operatorname{Int}(X)$.

Aufgabe 40 *(7 Punkte)*

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Definieren Sie

$$\widetilde{d}(x, y) \quad := \quad \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \, .$$

Zeigen Sie, daß $(X, \widetilde{d})$ wieder ein metrischer Raum ist, und bestimmen Sie $\operatorname{diam}\,(X, \widetilde{d})$ in Abhängigkeit von $\operatorname{diam}\,(X, d)$. Zeigen Sie schließlich, daß $(X, \widetilde{d})$ genau dann vollständig ist, wenn (X, d) vollständig ist.

Aufgabe 41 *(7 Punkte)*

Bestimmen Sie die Menge der Häufungspunkte der Folge (a_n) mit $a_n := \vartheta n - \lfloor \vartheta n \rfloor$ in Abhängigkeit von $\vartheta \in \mathbb{R}$.

Hinweis: $\lfloor x \rfloor := \sup\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$ *ist die sogenannte* **untere Gaußklammer**. *Beispiele:* $\lfloor -\frac{5}{2} \rfloor = -3$, $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$.

Aufgabe 42 *(5 Punkte)*

Sei X ein metrischer Raum und d eine Ultrametrik, d. h. eine Metrik, die zudem

$$d(x,z) \quad \leq \quad \max\{d(x,y), d(y,z)\}$$

für alle $x, y, z \in X$ erfüllt. (Beispiele hierfür sind die diskrete Metrik oder die p-adische Metrik auf $\mathbb{Q}$.) Zeigen Sie:

1. Ist $d(x,y) \neq d(y,z)$, so gilt $d(x,z) = \max\{d(x,y), d(y,z)\}$.
2. Jede Kugel $B_r(x)$ ist offen und abgeschlossen; es gilt $B_r(y) = B_r(x)$ für alle $y \in B_r(x)$.
3. Jede Vollkugel $\overline{B}_r(x)$ ist offen und abgeschlossen; es gilt $\overline{B}_r(y) = \overline{B}_r(x)$ für alle $y \in \overline{B}_r(x)$.
4. Haben zwei Kugeln einen Punkt gemeinsam, so ist eine von ihnen in der anderen enthalten.
5. Der Abstand zweier verschiedener Kugeln $B_r(x)$ und $B_r(y)$, die in einer Vollkugel $\overline{B}_r(z)$ enthalten sind, ist gleich r.

Hinweis: Es gilt

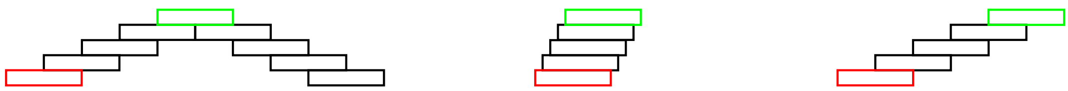
$$\begin{aligned} B_r(x) \quad &:= \quad \{y \in X \mid d(y,x) < r\} \\ \overline{B}_r(x) \quad &:= \quad \{y \in X \mid d(y,x) \leq r\}. \end{aligned}$$

Beachten Sie, daß $\overline{B}_r(x)$ nicht dasselbe sein muß wie der Abschluß $\overline{B_r(x)}$ von $B_r(x)$ in X. Der Abstand zweier Mengen A und B ist zudem definiert als $\inf\{d(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Aufgabe 43 *(7 Punkte)*

Kann man aus identischen Bauklötzchen einen freistehenden Turm bauen, so daß der oberste Stein – von oben betrachtet – vollständig neben dem untersten Stein liegt. Wie weit neben den untersten Stein kommt man eigentlich auf diese Weise?

Hinweis: „Turm“ soll dabei heißen, daß jeder Stein nur auf maximal einem weiteren Stein liegt. Die Bauklötzchen sollen zudem quaderförmig sein.



a) b) c)

Fall a) ist kein Turm, da der oberste Stein auf zwei anderen liegt.
Fall b) ist keine Lösung, da der oberste Stein teilweise über dem untersten Stein liegt.
Fall c) ist keine Lösung, weil dieser Turm nicht freisteht, sondern umfallen würde.