Christian Fleischhack Universität Paderborn

Analysis I

Übungsblatt 5

Die Lösungsblätter sind bis

Montag, 16. November 2009, 11:00 Uhr

in die in Flur D1 befindlichen grünen Schließfächer
Nr. 116 (Gruppen 1 bis 3) bzw. Nr. 129 (Gruppen 4 bis 7) zu werfen.

Aufgabe 32 *(4 Punkte)*

Bestimmen Sie den Limes für $n \to \infty$ für

$$\text{a)}\ \frac{\sqrt{n}}{n+42}\ ,\quad \text{b)}\ \frac{|2-n|}{1+n^2}\ ,\quad \text{c)}\ \frac{1+2n+3n^2}{3+4n+5n^2}\ ,\quad \text{d)}\ \sqrt{\frac{n^{12}}{(4n+1)^3(5n+6)^7(n+8)^2}}\ .$$

Aufgabe 33 *(6 Punkte)*

Sei $a_0 > 0$ und (a_n) die rekursiv konstruierte Folge mit

$$a_{n+1} \quad := \quad \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}.$$

Bekanntlich ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$. Definiere den relativen Fehler durch $r_n := \left|\frac{a_n-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right|$. Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}_+$ gilt:

$$r_{n+1} \quad \leq \quad \frac{1}{2}\min\{r_n, r_n^2\}\,.$$

Aufgabe 34 *(5 Punkte)*

Gibt es natürliche Zahlen p und q größer als 1, so daß für alle Zahlenfolgen (a_n) gilt:

$$(a_n) \text{ konvergiert.} \quad \Longleftrightarrow \quad (a_{pn}) \text{ und } (a_{qn}) \text{ konvergieren. ?}$$

Aufgabe 35 *(5 Punkte)*

Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ reelle Zahlenfolgen mit $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bis auf endlich viele. Zeigen Sie, daß (c_n) konvergiert, sobald (a_n) und (b_n) gegen dieselbe Zahl konvergieren, und bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} c_n$.

Aufgabe 36 *(5 Punkte)*

Finden Sie für jedes $c \in \overline{\mathbb{R}}$ reelle Zahlenfolgen (a_n) und (b_n) mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, so daß $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = c$.

Aufgabe 37 *(7 Punkte)*

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b \geq 0$. Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$.

Hinweis: Für $n \in \mathbb{N}_+$ und $c \geq 0$ gilt: $\sqrt[n]{c}$ ist diejenige (eindeutig bestimmte) Zahl $d \geq 0$, für die $d^n = c$ gilt.