

# Analysis I

## Übungsblatt 4

*Die Lösungsblätter sind bis*

**Montag, 9. November 2009, 11:00 Uhr**

*in die in Flur D1 befindlichen grünen Schließfächer*

*Nr. 116 (Gruppen 1 bis 3) bzw. Nr. 129 (Gruppen 4 bis 7) zu werfen.*

*Aufgrund von Rückfragen möchte ich an dieser Stelle noch einige Hinweise zur Lösung von Übungsaufgaben wiederholen.*

*Grundsätzlich sind alle Aussagen zu begründen. Dies heißt beispielsweise in Aufgabe 24, daß nicht nur die Zahlen  $n$  anzugeben sind, für die die Aussage zutrifft, sondern daß insbesondere zu beweisen ist, daß*

- *die dortige Aussage für alle die  $n \in \mathbb{N}$  gilt, die Sie angegeben haben, und*
- *die dortige Aussage für alle die  $n \in \mathbb{N}$  nicht gilt, die Sie nicht angegeben haben.*

*In Aufgabe 28 heißt dies:*

- *ist die Antwort „nein“, dann beweisen Sie das;*
- *ist die Antwort „ja“, dann beweisen Sie das (z. B. indem Sie ein Beispiel angeben und zeigen, daß dieses diese Eigenschaft hat)*

*Aufgaben „Bestimmen Sie  $\lim \dots$ “ wie in Nummer 27 heißen immer, daß Sie den Limes in den Fällen „ausrechnen“ sollen, in denen er existiert, und in den anderen Fällen zeigen, daß der Grenzwert nicht existiert. Im Falle der Existenz ist diese selbstverständlich zu begründen, es sei denn, sie ist bereits zuvor (in Vorlesung oder Übungen) gezeigt worden.*

*In Aufgabe 29 ist anzugeben (und zu begründen), wieviele Elemente die Menge der Häufungspunkte  $(a_n)$  haben kann. Das heißt nicht nur, anzugeben, wieviele Elemente diese Menge höchstens haben kann, sondern es sind alle Möglichkeiten aufzulisten, zum Beispiel also „0, 1, 4, 42,  $\infty$ “. (Diese Lösung ist übrigens falsch.) Wie üblich heißt auflisten auch begründen, daß diese Möglichkeiten tatsächlich angenommen werden und die einzigen Möglichkeiten sind.*

*Abschließend noch ein Hinweis: In der Vorlesung sind Zahlenfolgen als komplexe Zahlenfolgen eingeführt worden. Sollten nur reelle Zahlenfolgen betrachtet werden, so wird dies explizit vorausgesetzt.*

### Aufgabe 24

**(5 Punkte)**

Für welche  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $n^2 \leq 2^n < n!$  ?

### Aufgabe 25

**(4 Punkte)**

Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 1$  und alle reellen Zahlen  $a_1, \dots, a_n \geq 0$ , daß gilt

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

**Aufgabe 26****(6 Punkte)**

Sei  $(a_n)$  eine konvergente Zahlenfolge. Zeigen Sie, daß dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

**Aufgabe 27****(4 Punkte)**

Sei  $k \in \mathbb{N}_+$ . Bestimmen Sie  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{k^n}$ .

**Aufgabe 28****(4 Punkte)**

Kann eine Zahlenfolge unendlich viele Häufungspunkte besitzen?

**Aufgabe 29****(5 Punkte)**

Sei  $(a_n)$  eine Zahlenfolge mit  $4^n |a_n + a_{n+1}| < 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .  
Wieviele Häufungspunkte kann  $(a_n)$  haben?

**Aufgabe 30****(4 Punkte)**

Gibt es nichtkonvergente reelle Zahlenfolgen mit genau einem Häufungspunkt?  
Wie sieht dies bei komplexen Zahlenfolgen aus?

**Aufgabe 31****(8 Punkte)**

Sei  $\mathbb{K}$  ein angeordneter Körper. Zeigen Sie, daß in  $\mathbb{K}$  das Dedekindsche Schnittaxiom gilt, sobald in  $\mathbb{K}$  jede Cauchyfolge konvergiert.

*Hinweis: Die Umkehrung wird in der Vorlesung gezeigt. Das Dedekindsche Schnittaxiom und die Definition von Cauchyfolgen bzw. Konvergenz können eins-zu-eins von  $\mathbb{R}$  auf  $\mathbb{K}$  übertragen werden. Ein angeordneter Körper erfüllt die Körper- und die Anordnungsaxiome.*