Christian Fleischhack Universität Paderborn

Analysis I

Übungsblatt 3

Die Lösungsblätter sind bis

Montag, 2. November 2009, 11:00 Uhr

in die in Flur D1 befindlichen grünen Schließfächer
Nr. 116 (Gruppen 1 bis 3) bzw. Nr. 129 (Gruppen 4 bis 7) zu werfen.

Aufgabe 16 *(7 Punkte)*

Zeigen Sie für alle $x, y \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_+$, daß

$$x^{n+1} - y^{n+1} \quad = \quad (x-y)(x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \ldots + y^n).$$

Finden Sie hiermit für $q \in \mathbb{C}$ eine geschlossene Form für die Summe

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n \, .$$

Aufgabe 17 *(8 Punkte)*

Seien n und k stets ganze Zahlen mit $n \geq 0$. Wir definieren

$$n! \quad := \quad \begin{cases} 1 \cdots n & \text{für } n > 0 \\ 1 & \text{für } n = 0 \end{cases} \quad \ldots \ \textbf{Fakultät} \text{ von } n$$

$$\binom{n}{k} \quad := \quad \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!k!} & \text{für } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \ldots \ \textbf{Binomialkoeffizient} \text{ von } n \text{ und } k$$

Beweisen Sie für alle $n, k \geq 0$ und alle $x, y \in \mathbb{C}$, daß[1]

$$\binom{n}{k} \quad = \quad \binom{n}{n-k} \tag{1}$$

$$\binom{n}{k} \quad = \quad \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \qquad \text{falls } n \neq 0 \tag{2}$$

$$(x+y)^n \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \tag{3}$$

$$\sum_{k \text{ ungerade}} \binom{n}{k} \quad = \quad \sum_{k \text{ gerade}} \binom{n}{k} \qquad \text{falls } n \neq 0 \tag{4}$$

Aufgabe 18 *(3 Punkte)*

Zeigen Sie, daß aus $|x+y| \leq |x| + |y|$ für alle $x, y \in \mathbb{C}$ folgt, daß $|x-y| \geq \big||x| - |y|\big|$ für alle $x, y \in \mathbb{C}$.

[1] Wir setzen $x^0 := 1$ für alle $x \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 19 *(3 Punkte)*

Welche(s) der Relationszeichen $<, \leq, =, \geq, >$ kann man zwischen $\frac{a+b}{2}$ und $\sqrt{ab}$ setzen, so daß eine für alle nichtnegativen Zahlen a und b gültige Aussage entsteht?

Aufgabe 20 *(4 Punkte)*

Beweisen Sie $|x_1 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + \ldots + |x_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$.

Hinweis: Die in der Vorlesung bewiesene Dreiecksungleichung dürfen Sie als bekannt voraussetzen.

Aufgabe 21 *(6 Punkte)*

Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \sqrt{2n} \quad \text{für } n \geq 1 \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} < 1 \tag{7}$$

Aufgabe 22 *(3 Punkte)*

Zeigen Sie, daß der Limes einer konvergenten komplexen Zahlenfolge reell ist, sobald alle Glieder der Folge reell sind.

Aufgabe 23 *(6 Punkte)*

Seien $k, l \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_k, b_0, \ldots, b_l \in \mathbb{C}$ mit $a_k, b_l \neq 0$ sowie

$$c_n \quad := \quad \frac{a_k n^k + \ldots + a_1 n + a_0}{b_l n^l + \ldots + b_1 n + b_0} \; .$$

Beweisen Sie, daß (c_n)

- für $k > l$ nicht konvergiert;
- für $k = l$ gegen $\frac{a_k}{b_l}$ konvergiert;
- für $k < l$ gegen 0 konvergiert;