Christian Fleischhack Universität Paderborn

Analysis I

Übungsblatt 2

Die Lösungsblätter sind bis

Montag, 26. Oktober 2009, 11:00 Uhr

in die in Flur D1 befindlichen grünen Schließfächer
Nr. 116 (Gruppen 1 bis 3) bzw. Nr. 129 (Gruppen 4 bis 7) zu werfen.

Aufgabe 8 *(3 Punkte)*

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$.
Welches der Relationszeichen $>$, $\geq$, $=$, $\leq$ bzw. $<$ gehört zwischen $\sqrt{a+b}$ und $\sqrt{a} + \sqrt{b}$?

Aufgabe 9 *(5 Punkte)*

Zeigen Sie für jede nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{R}$:
- Ist $\sup M < \infty$, so existiert zu jedem reellen $\varepsilon > 0$ ein $x \in M$ mit $\sup M - \varepsilon < x$.
- Ist $\sup M = \infty$, so existiert zu jedem reellen k ein $x \in M$ mit $k < x$.

Aufgabe 10 *(6 Punkte)*

Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen m und n, daß
- $m, n \geq 0$ gilt;
- mn wieder eine natürliche Zahl ist;
- $m - n$ eine natürliche Zahl ist, sobald $m \geq n$ ist.

Aufgabe 11 *(4 Punkte)*

Zeigen Sie: Jede nichtleere Menge natürlicher Zahlen hat ein Minimum.

Hinweis: Kombinieren Sie Aufgabe 9 mit Aufgabe 10.

Aufgabe 12 *(4 Punkte)*

Beweisen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 &= \tfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\,, \\ 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 &= (1 + 2 + \ldots + n)^2\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 13 *(5 Punkte)*

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$ für alle $n \in \mathbb{N}$?

Aufgabe 14 *(4 Punkte)*

Auf welchen Wochentag fällt der 13. eines Monats im derzeit gültigen Gregorianischen Kalender im langjährigen Durchschnitt am häufigsten?

Aufgabe 15 *(4 Punkte)*

Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{C}$ der Gleichung $x^2 = \mathrm{i}$.