

Replicating Portfolio für deutsche Lebensversicherungen

Methodik, Technik und Einsatzmöglichkeiten

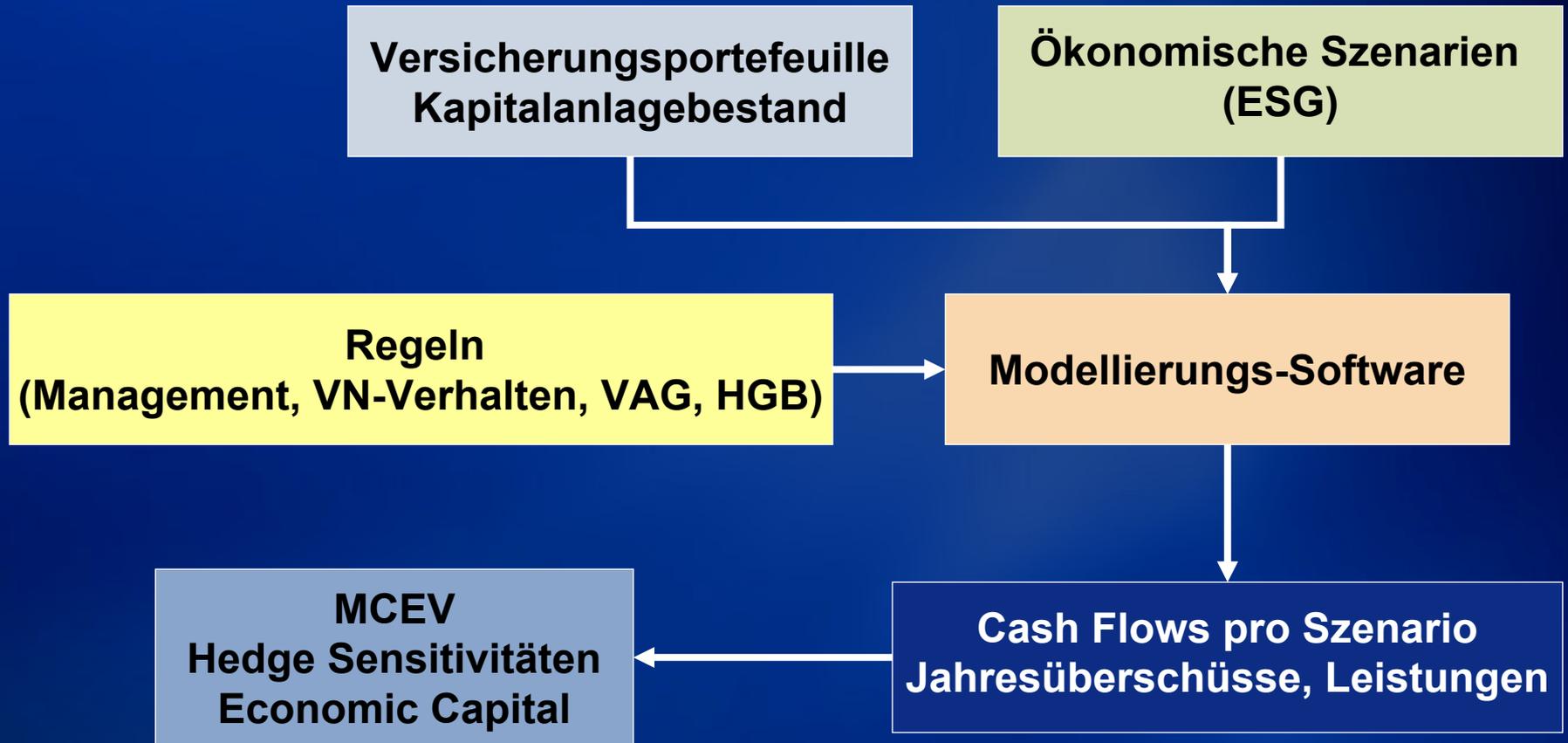
Dr. Thorsten Wagner

Hamburg, 18. Mai 2009

Agenda

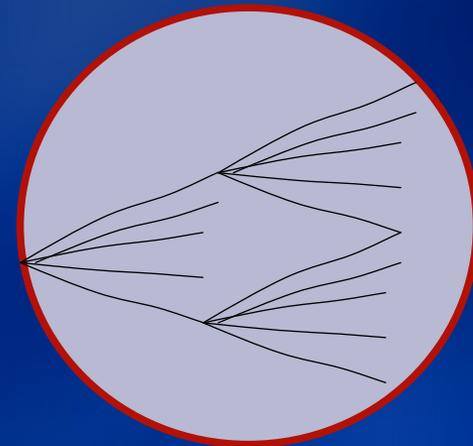
- **Motivation für Replicating Portfolios**
- **Mathematischer Hintergrund**
- **Wahlmöglichkeiten für den Anwender**
- **Ein Anwendungsbeispiel**
- **Implikationen und Begrenzungen**

Motivation für Replicating Portfolios



Motivation für Replicating Portfolios

- **Berechnungszeiten sind hoch**
- **Umfang der Berechnungen wächst**
 - MCEV: Sensitivitäten
 - Steuerung über Economic Capital:
Tägliche bis wöchentliche Verfügbarkeit
- **Economic Capital: Lösung des Problems der „Stochastik in der Stochastik“**



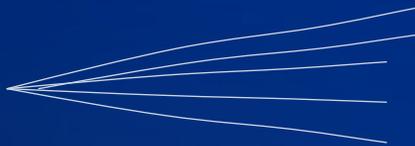
Motivation für Replicating Portfolios

- **Definition:**

„Ein Replicating Portfolio ist eine Auswahl an Kapitalmarktinstrumenten, deren Barwerte (oder Cash Flows) sich in Abhängigkeit vom Kapitalmarkt möglichst ähnlich verhalten wie die entsprechenden Barwerte (oder Cash Flows), die aus dem kompletten Unternehmensmodell resultieren.“

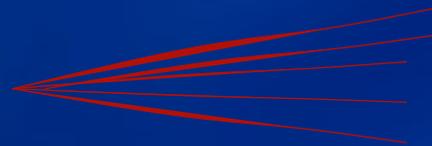
- **Kapitalmarkt =>**

zu replizierende PV



PV = Present Value

PV aus dem RP



RP = Replicating Portfolio

„Residuum“



Agenda

- Motivation für Replicating Portfolios
- **Mathematischer Hintergrund**
- Wahlmöglichkeiten für den Anwender
- Ein Anwendungsbeispiel
- Implikationen und Begrenzungen

Mathematischer Hintergrund

- Lösung des folgenden Problems:

$$\min_x \|Ax - b\|_2^2 \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad Px = c$$

- Jede Zeile steht für eine Version eines Barwertes oder Cash Flows
- **A**: Jede Spalte steht für ein Kapitalanlageinstrument
- **x**: Gewichte für diese Kapitalanlageinstrumente
- **b**: Tatsächliche Ergebnisse des Unternehmensmodells in Abhängigkeit (Zeilen) der entsprechenden Version eines Barwertes oder Cash Flows

Mathematischer Hintergrund

- Lösung des folgenden Problems:

$$\min_x \|Ax - b\|_2^2 \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad Px = c$$

- Die Nebenbedingung soll sicher stellen, dass Barwerte oder Cash Flows in mindestens einem (wichtigen) Szenario (z.B. dem stochastischen PVFP) exakt getroffen werden.
- P bzw. c sind analog zu A bzw. b für diesen Basisfall.
- Dimension von $c \ll$ Dimension von b

Mathematischer Hintergrund

- Lösungsansatz über Lagrange Multiplikatoren führt zu

$$\frac{\partial}{\partial x} = 2A^T Ax - 2A^T b + 2P^T y \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = Px - c \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} A^T A & P^T \\ P & 0 \end{pmatrix}}_{=:G} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=:z} = \underbrace{\begin{pmatrix} A^T b \\ c \end{pmatrix}}_{=:d}$$

- Lösung über Householder-Transformationen unter Beachtung numerischer Stabilität

Agenda

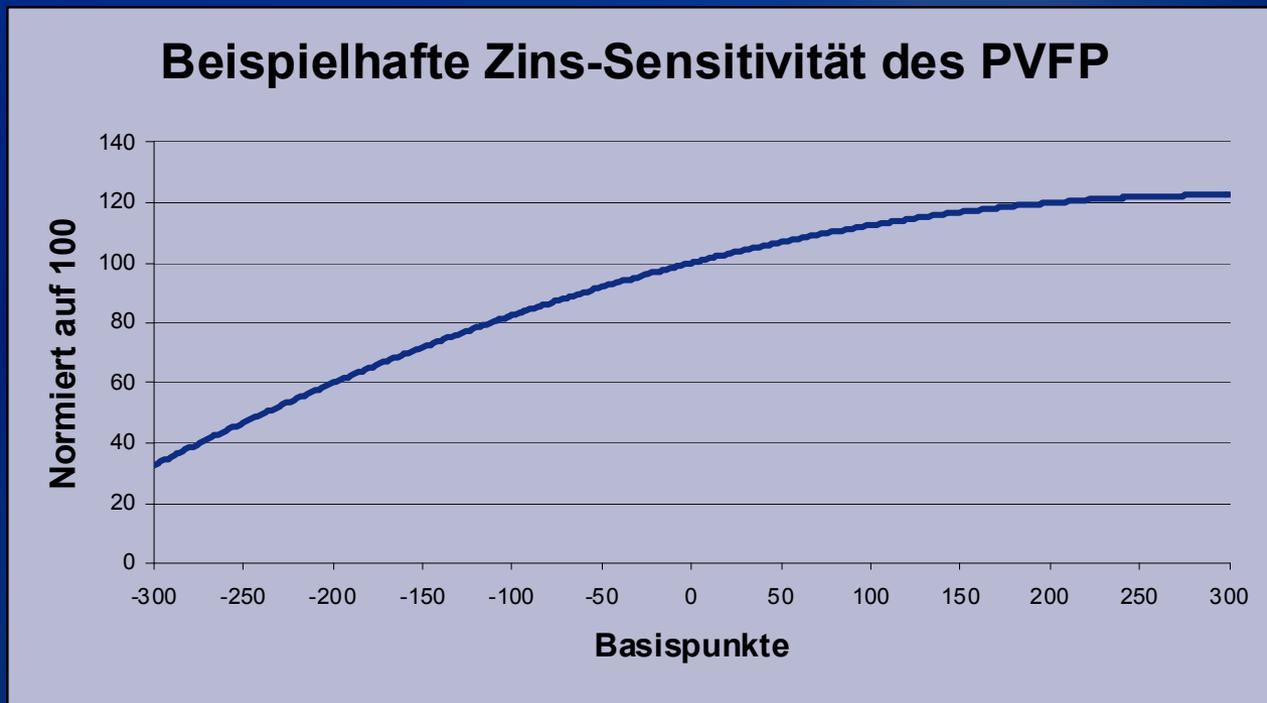
- Motivation für Replicating Portfolios
- Mathematischer Hintergrund
- **Wahlmöglichkeiten für den Anwender**
- Ein Anwendungsbeispiel
- Implikationen und Begrenzungen

Wahlmöglichkeiten für den Anwender

- **Art und Anzahl der Barwerte oder Cash Flows, bezüglich derer die Optimierung vorgenommen werden soll (Zeilen des ursprünglichen Problems)**
 - Abhängig von der Zielsetzung (z.B. Sensitivitäten für den MCEV versus Steuerungszwecke)
- **Nebenbedingungen**
- **Auswahl der für die Optimierung zur Verfügung stehenden Kapitalmarktinstrumente**
 - Abhängig von der Struktur des Portefeuilles – nicht nur vom Policenbestand, auch vom Kapitalanlagebestand
- **Gewichtsminimierung**

Wahlmöglichkeiten für den Anwender

- Welche Kapitalanlageinstrumente werden bei konkaven Zinssensitivitäten im PVFP (= Present Value of Future Profits) diese annähernd reflektieren?



Wahlmöglichkeiten für den Anwender

- **Konkavität im Niedrigzins-Bereich:
Short Position von Receiver Swaptions**
- **Konkavität im Hochzins-Bereich:
Short Position von Payer Swaptions**
- **Weitere Analysen bzgl. Aktien, Volatilität etc. sinnvoll**
- **Bisher typische Kapitalanlageinstrumente für RP:**
 - Bonds
 - Swaps
 - Receiver und Payer Swaptions
 - Aktien und Aktien-Optionen

Agenda

- Motivation für Replicating Portfolios
- Mathematischer Hintergrund
- Wahlmöglichkeiten für den Anwender
- **Ein Anwendungsbeispiel**
- Implikationen und Begrenzungen

Ein Anwendungsbeispiel

- **Ausgangspunkt: vereinfachtes Unternehmensmodell**
- **Kapitalanlagebestand und Neuanlage:**
 - Aktien (8%) und
 - Bonds unterschiedlicher Laufzeiten (1 – 8)
- **Portefeuille an Versicherungsverträgen:**
 - gem. Kapitalversicherungen mit Rechnungszins 3,25%
 - Restlaufzeiten 1 – 50 Jahre
 - Zuführung zur RfB = $\max[0; 90\% * \text{Rohüberschuss}]$
 - Überschuss abhängig von freier RfB
- **Kapitalmarktannahmen aus 3. Quartal 2007**

Ein Anwendungsbeispiel

- **Zielsetzung: Bestimmung von PVFP Sensitivitäten**
- **Optimierung in Bezug auf:**
 - 500 stochastische Pfade des PVFP der Basis-Szenarien
 - Shift um +/- 100 Basispunkte der Basis-Szenarien (zusätzlich 1000 Pfade)
- **Nebenbedingung:**
Exakte Übereinstimmung
 - im jeweiligen „certainty equivalent“ Pfad
 - des jeweiligen stochastischen PVFP (Mittelwert über die Pfade)

Ein Anwendungsbeispiel

- **Zielsetzung: Bestimmung von PVFP Sensitivitäten**
- **Auswahl an Kapitalmarktinstrumenten:**
 - Zerobonds, Equities und Swaps (Restlaufzeiten 1 – 50)
 - Equity Puts (Strike 90% und 110%)
 - Receiver Swaptions mit Tenor 15, Optionszeitpunkte in 1 – 26 Jahren, Strike zwischen 4,1% und 4,9%
 - Payer Swaptions mit Tenor 5, Optionszeitpunkte in 1 – 20 Jahren, Strike zwischen 4,1% und 4,9%

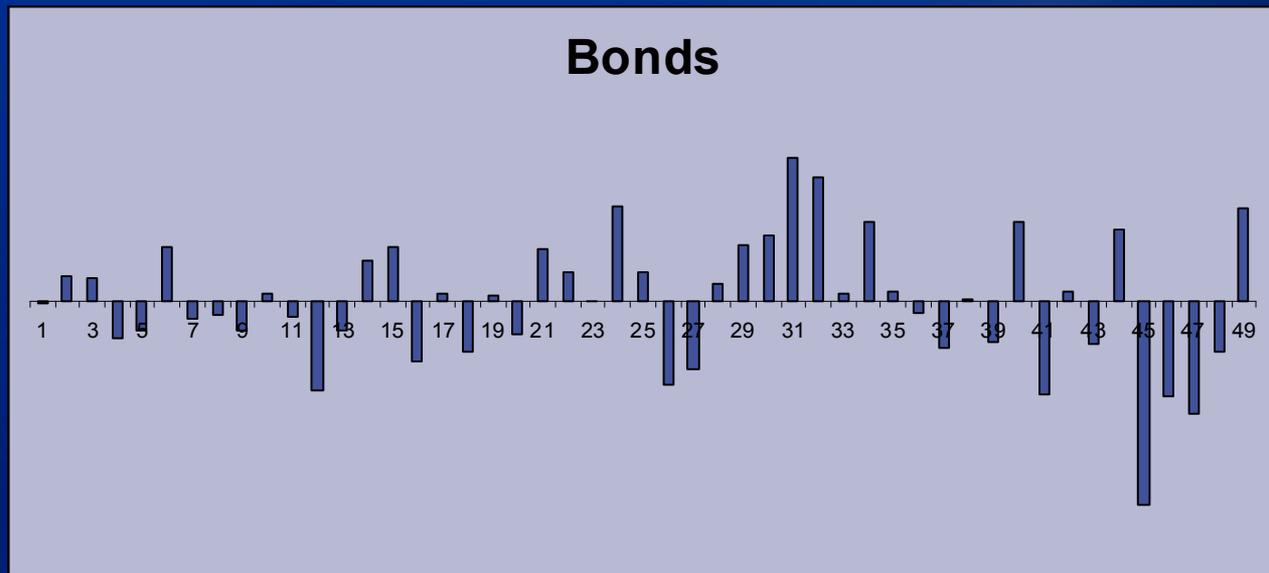
Ein Anwendungsbeispiel

- Güte des Replicating Portfolios: $R^2 = 96,0 \%$
- Analyse des „certainty equivalent“ Szenarios für verschiedene Zins-Sensitivitäten:

Abweichung im CE			
	CE exakt	CE repliziert	Fehler (bezogen auf Diff. zu Basis)
Basis	10.826.101		
+ 50 BP	13.675.878	13.757.302	3%
- 50 BP	8.061.241	7.330.593	26%
+150 BP	19.568.638	20.244.892	8%
-150 BP	2.735.029	5.829.381	-38%

Ein Anwendungsbeispiel

- **Aufteilung der Gewichte:**



- **Starke Schwankungen bei Bonds und Swaps**
- **Abhilfe: Stabilisierung durch Gewichtsminimierung**

Ein Anwendungsbeispiel

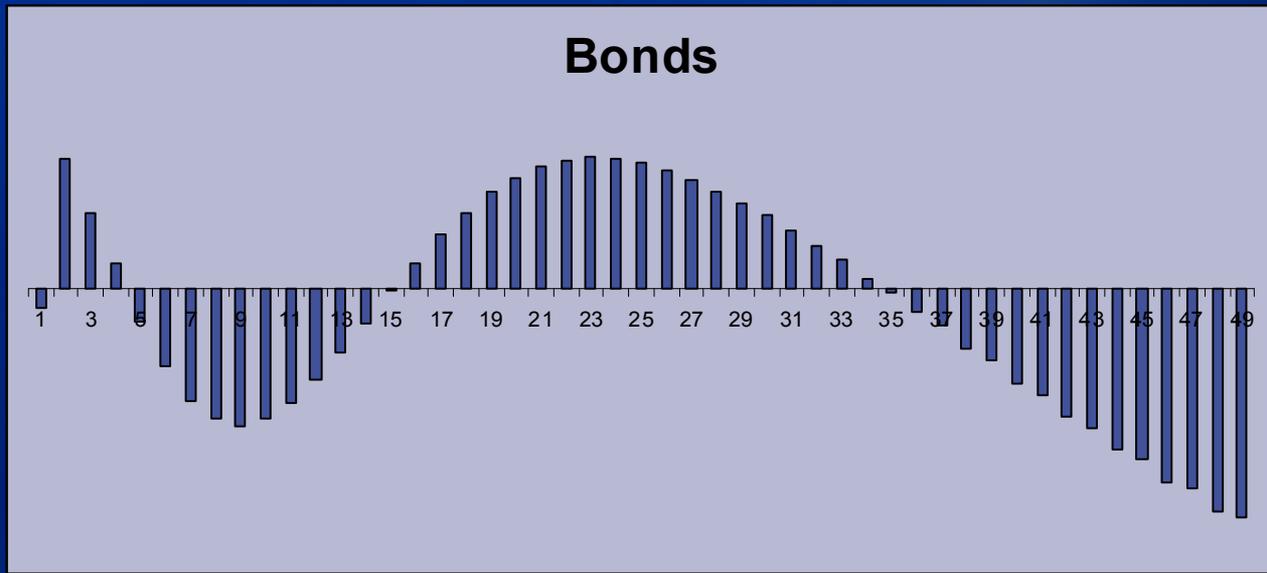
=> Berechnung inkl. Minimierung der Bond-Gewichte

- Güte des Replicating Portfolios: $R^2 = 95,2 \%$

Abweichung im CE			
	CE exakt	CE repliziert	Fehler (bezogen auf Diff. zu Basis)
Basis	10.826.101		
+ 50 BP	13.675.878	14.073.169	14%
- 50 BP	8.061.241	8.209.215	-5%
+150 BP	19.568.638	19.398.917	-6%
-150 BP	2.735.029	3.200.338	-2%

Ein Anwendungsbeispiel

- Neue Aufteilung der Gewichte:



- **Strukturierter Verlauf der Gewichte führt zu „stabilerem“ Replicating Portfolio**

Ein Anwendungsbeispiel

Zwischenfazit:

- Gewichtsminimierung stabilisiert Ergebnisse und verbessert den Fit bezüglich des CE-Szenarios
- R^2 leidet kaum

Aber noch unklar:

- Sind Art und Anzahl der stochastischen Pfade für die Optimierung ausreichend?
- Konkret: Andere Szenarien oder „nur“ andere Volatilität?

Ein Anwendungsbeispiel

- **Neue Optimierung in Bezug auf:**
 - 500 stochastische Pfade des PVFP der Basis-Szenarien
 - Shift um +/- 100 Basispunkte der Basis-Szenarien
 - ***Vola Stress bezüglich Zins, Equity und Zins/Equity kombiniert (zusätzlich 1500 Pfade)***
- **Neue Nebenbedingungen:**
 - jeweilige „certainty equivalent“ Pfad (3)
 - jeweilige stochastischen PVFP (6)
- **Kapitalanlageinstrumente und Gewichtsminimierung unverändert**

Ein Anwendungsbeispiel

Erweiterung durch Vola-Stress

- Güte des Replicating Portfolios: $R^2 = 86,8 \%$

Abweichung im CE			
	CE exakt	CE repliziert	Fehler (bezogen auf Diff. zu Basis)
Basis	10.826.101		
+ 50 BP	13.675.878	13.489.797	-7%
- 50 BP	8.061.241	8.078.670	-1%
+150 BP	19.568.638	19.698.163	-1%
-150 BP	2.735.029	2.795.575	1%

➤ **Weitere Verbesserung des Fits im CE-Szenario**

Ein Anwendungsbeispiel

Weitere Feststellungen:

- „Aufspannen eines größeren Raumes“, d.h. Optimierung bzgl. möglichst unterschiedlicher Szenarien-Sets, ist für die Stabilität eines Replicating Portfolio enorm wichtig
- Es wurde die Wirkungsweise des Replicating Portfolio an einem alternativen Szenarien-Set getestet:
 - Szenarien-Sets außerhalb des aufgespannten Raumes werden relativ oft unzureichend getroffen
- Die Stabilität eines Replicating Portfolio ist die kritische Größe!

Agenda

- Motivation für Replicating Portfolios
- Mathematischer Hintergrund
- Wahlmöglichkeiten für den Anwender
- Ein Anwendungsbeispiel
- Implikationen und Begrenzungen

Implikationen und Begrenzungen

- Die Güte eines Replicating Portfolios muss bezüglich der Zielsetzung festgelegt werden
- Auswahl der Optionsmöglichkeiten entscheiden über die Güte eines Replicating Portfolios

„Auch an einem super Replicating Portfolio kann man mitunter noch einiges optimieren!“



Kontakt:

KPMG AG

Wirtschaftsprüfungsgesellschaft

Dr. Thorsten Wagner

T +49 221 2073 5380

thorstenwagner@kpmg.com

www.kpmg.de

Die enthaltenen Informationen sind allgemeiner Natur und nicht auf die spezielle Situation einer Einzelperson oder einer juristischen Person ausgerichtet. Obwohl wir uns bemühen, zuverlässige und aktuelle Informationen zu liefern, können wir nicht garantieren, dass diese Informationen so zutreffend sind wie zum Zeitpunkt ihres Eingangs oder dass sie auch in Zukunft so zutreffend sein werden. Niemand sollte auf Grund dieser Informationen handeln ohne geeigneten fachlichen Rat und ohne gründliche Analyse der betreffenden Situation.

© 2009 KPMG AG Wirtschaftsprüfungsgesellschaft, eine Konzerngesellschaft der KPMG Europe LLP und Mitglied des KPMG-Netzwerks unabhängiger Mitgliedsfirmen, die KPMG International, einer Genossenschaft schweizerischen Rechts, angeschlossen sind. Alle Rechte vorbehalten.