Optimales Design von Garantieprodukten

Prof. Dr. Antje Mahayni

Department of Accounting and Finance, Mercator School of Management,
University of Duisburg–Essen

Mai 2009, Hamburg

Optimales Design!

Einführung und Motivation

- Fondsgebundene Lebensversicherung
    - Möglichkeit, an dem Wertzuwachs des Kapitalmarktes auch über eine Lebensversicherung zu partizipieren
    - Besteht aus einer garantierten Leistung und einer Überschussbeteiligung
- Erfolgsprodukte
    - Kapitalgarantierte strukturierte Produkte

      (optionsbasierter Ansatz)
    - Mit Garantiefonds und CPPI (Constant Proportional Portfolio Insurance)–Konstruktionen unterlegte *klassische* Fondspolicen

      (CPPI-Ansatz)

Ziel

- Optimales Produktdesign soll
  - Einfache und robuste Absicherung der Garantiekomponente ermöglichen
  - vom Kunden gewünscht sein
- Kriterien:
  - Robust: Absicherungsstrategien sollen auch unter Berücksichtigung von Modellrisiken effizient sein
  - Gewünscht: Auszahlungsprofile sollen bspw. durch Erwartungsnutzungsmaximierung zu rechtfertigen sein

Weiterer Inhalt des Vortrags

- Produktbeschreibung (Garantiekonzepte)
  - Versicherungsput
  - Investitionsstrategien
- Bewertung und *faire Verträge*
  - Modellannahme
  - Bewertung Versicherungsput
- Optimale Verträge
  - Erwartungsnutzenmaximierung
  - Nutzenverluste und Probleme für das Risikomanagement
- Fazit und Ausblick

Notation

T = Fälligkeit (z.B. Beginn der Rentenphase)

A = Einmalprämie

L_T = Vetragsauszahlung zum Ztpkt. T

r = Marktzinsrate

S_t = Wert Aktienindex zum Ztpkt. $t \in [0, T]$

π_t = Investitionsquote zum Ztpkt. $t \in [0, T]$

$V_t(\pi)$ = Wert der Investitionsstrategie π zum Ztpkt. $t \in [0, T]$

G_T = Garantie ($G_T = A \exp\{gT\} \leq A \exp\{rT\}$)

g = Garantierate

α = Partizipationsrate

Garantiekonzepte

- *Investment Guaranteed Scheme*

$$L_T^{IG} = \max\{\alpha V_T, \alpha G_T\} = \alpha V_T + \alpha \underbrace{[G_T - V_T]^+}_{\text{Versicherungsput}}$$

- *Contribution Guaranteed Scheme*

$$L_T^{CG} = \max\{\alpha V_T, G_T\} = \alpha V_T + \underbrace{[G_T - \alpha V_T]^+}_{\text{Versicherungsput}}$$

- *Participation Surplus Scheme*

$$L_T^{PS} = G_T + \alpha \underbrace{[V_T - G_T]^+}_{\text{Versicherungscall}} = \alpha V_T + (1-\alpha) G_T + \alpha \underbrace{[G_T - V_T]^+}_{\text{Versicherungsput}}$$

Investitionsstrategien

- Zwei Investitionsmöglichkeiten
  - risikobehaftetes Wertpapier S
  - risikoloses Wertpapier B (wachsend mit konstanter konformer Zinsrate r)
- Eine zeitstetige Investitionsstrategie auf $[0, T]$
  - bestimmt durch Investitionsquote π_t

    $\rightarrow$ risikobehafteter Anteil des Portfoliowertes (z. Ztpkt. t) π_t
    $\rightarrow$ risikoloser Anteil $1 - \pi_t$
    $\rightarrow$ Selbstfinanzierende Strategie
- Alternativ, Anzahl ϕ der Wertpapiere S und B

$$\phi_{t,S} = \frac{\pi_t V_t}{S_t} \text{ and } \phi_{t,B} = \frac{(1-\pi_t)V_t}{B_t}$$

Relevante Investitionsstrategien

→ *Relevante* Investitionsstrategie:

- Buy und Hold (B&H)
- Constant Mix (CM)
- Constant Proportion Portfolio Insurance (CPPI)

Strategien		
	Anzahl Aktien	Investitionsquote
B&H	$\phi_{t,S}^{B\&H} = \frac{\pi_0 V_0}{S_0}$	$\pi_t^{B\&H} = \pi_0 \frac{\frac{S_t}{S_0}}{\frac{V_t}{V_0}}$
CM	$\phi_{t,S}^{CM} = \frac{\pi_0 V_t}{S_t}$	$\pi_t^{CM} = \pi_0$
CPPI	$\phi_{t,S}^{CPPI} = \frac{m\left(V_t - e^{-r(T-t)}G_T\right)}{S_t}$	$\pi_t^{CPPI} = \frac{m\left(V_t - e^{-r(T-t)}G_T\right)}{V_t}$

Bewertung (Bestimmung fairer Vertragsparameter)

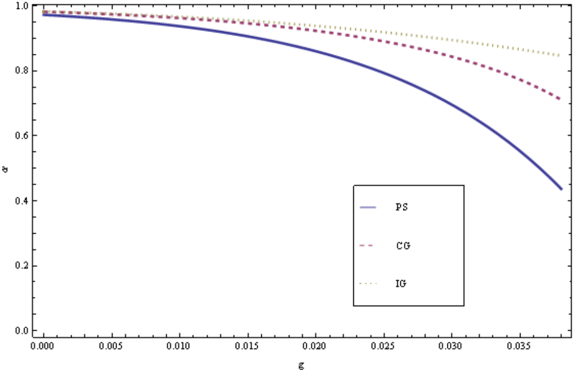
- Faire Vetragsparameter (α, g) (verallgemeinertes Äquivalenzprinzip)

$$\begin{aligned} \text{Barwert der Prämien} &= \text{Barwert der Vertragsauszahlung} \\ A &= \cdots + \text{Wert des Versicherungsputs} \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Bewertung des Versicherungsput und die Bestimmung der optimalen Parameter hängen von

- den Modellannahmen (Annahmen an die Aktienkursdynamik)
- und der Wahl der Investitonsstrategie ab

Illustration *faire Vertragsparameter* (α, g)



Modellrahmen

- Annahme

$$\begin{aligned} dB_t &= B_t r\, dt, \quad B_0 = b \\ d\, S_t &= S_t \left(\mu\, dt + \sigma\, dW_t \right), \quad S_0 = s \end{aligned}$$

  - $W = (W_t)_{0 \leq t \leq T}$ ist Standard Brownsche Bewegung
  - μ, σ und r konstant ($\mu > r \geq 0$, $\sigma > 0$)

- Wertprozesses $V = (V_t)_{0 \leq t \leq T}$ der Investitionsstrategie π

$$dV_t(\pi) = V_t \left(\pi_t \frac{dS_t}{S_t} + (1 - \pi_t) \frac{dB_t}{B_t} \right), \quad V_0 = A$$

Wert der Strategien

- *Buy und Hold*

$$V_t = V_0 \left(\pi_0 \frac{S_t}{S_0} + (1 - \pi_0) e^{rt} \right)$$

- *Constant Mix*

$$V_t = V_0 e^{(1-\pi_0)(r+\pi_0 \frac{1}{2}\sigma^2)t} \left(\frac{S_t}{S_0} \right)^{\pi_0}$$

- *CPPI*

$$\begin{aligned} V_t &= Ge^{-r(T-t)} + \left(V_0 - Ge^{-r(T-t)} \right) e^{\gamma(m)t} \left(\frac{S_t}{S_0} \right)^m \\ \gamma(m) &:= r - m \left(r + 0.5(m-1)\sigma^2 \right). \end{aligned}$$

Konsequenz für die Bewertung des Versicherungsputs

- Strategien sind pfadunabhängig ($V_T = h(S_T)$) und es gilt

$$
\begin{aligned}
V_T^{\text{B\&H}} &= a_1 + b_1 S_T \\
V_T^{\text{CM}} &= a_2 S_T^{b_2} \\
V_T^{\text{CPPI}} &= G_T + a_3 S_T^{b_3}
\end{aligned}
$$

$\longrightarrow$ Auszahlung des Versicherungsputs mit Strike G_T ist

$$
\begin{aligned}
\left(G_T - V_T^{\text{B\&H}}\right)^+ &= \text{Standardput} \\
\left(G_T - V_T^{\text{CM}}\right)^+ &= \text{Powerput} \\
\left(G_T - V_T^{\text{CPPI}}\right)^+ &= 0
\end{aligned}
$$

Konsequenz für die Absicherung des Versicherungsputs

- OBPI: Lange Laufzeiten der Verträge
  - Implizite Optionen werden nicht am Markt gehandelt
  - Bewertung ist abhängig von der Wahl eines stochastischen Bewertungsmodells (Modellrisiko)

  $\longrightarrow$ Absicherung ist schwierig

- CPPI Probleme:

  $\longrightarrow$ Cash–Lock: das gesamte Vermögen muss festverzinslich angelegt werden, und es besteht keine Chance mehr, in Zukunft an Kursgewinnen auf dem Aktienmarkt zu partizipieren

  $\longrightarrow$ Gap–Risiko: Risiko einer Verletzung der Garantie

$\Rightarrow$ Anbieter von Garantien bevorzugen CPPI–Ansatz

Optimierungsproblem des Versicherungsnehmers

- Versicherungsnehmer wählt
  - zu exogener Garantie G_T (bzw. Garantiezins g)
  - (simultan) das Garantieschema
  - die Investitionstrategie

$\Rightarrow$ Erwartungsnutzenmaximierung

$$\max_{\pi \in \Pi, w \in \{CG, PS\}} \mathrm{E}_P \left[u(L_T^w) \right]$$

unter den Nebenbedingungen *Dynamik von V* und *fairer Vertrag*

Optimale Garantieprodukte

- Für

$$u(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad u(x) = \frac{(x-G)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad (\gamma > 0, \gamma \neq 1)$$

ergibt sich

- Optimales Garantieschema ist *Contribution (Participation) Guaranteed Scheme*
- Optimale Partizipationsrate $\alpha = \frac{\tilde{V}_0}{V_0}$ wobei $\tilde{V}_0 < V_0$ Lösung von … $(\alpha = 1)$
- Optimale Strategie: CM (CPPI) mit Investitionsquote $\pi = \frac{\mu - r}{\gamma\sigma^2}$ (Multiplikator $m = \frac{\mu - r}{\gamma\sigma^2}$)

- Beweis lässt sich auf *wohlbekannte* Optimierungsprobleme zurückführen

Klassiche Optimierungsprobleme

- Erwartungsnutzenmaximierung

$$\boxed{\pi^* = argmax_\pi \, E_P \left[u \left(V_T(\pi) \right) \right] \quad \text{s.t.} \quad V_0 = A}$$

- Optimierungsprobleme ($\gamma \neq 1$, $\gamma > 0$)

	Nutzenfunktion u	zusätzl. Nebenbedingung
(A) *Merton*	$u_A\left(V_T\right) = \frac{V_T^{1-\gamma}}{1-\gamma}$	–
(B) *Subsistence Level*	$u_B\left(V_T\right) = \frac{(V_T - G_T)^{1-\gamma}}{1-\gamma}$	–
(C) *Endwert–bedingung*	$u_A\left(V_T\right) = \frac{V_T^{1-\gamma}}{1-\gamma}$	$V_T \geq G$

(A) *Merton*–Lösung

- (Konstante) Investitionsquote

$$\pi_t^{A,*} = m^* = \frac{\mu - r}{\gamma\sigma^2}$$

- (Pfadunabhängige) Auszahlungsfunktion

$$\begin{aligned} V_T^{A,*} = h^{\mathrm{A},*}(S_T) \quad &= \quad \phi\left(V_0, m^*\right)\ S_T^{m^*} \\ \text{wobei } \phi(x,y) \quad &:= \quad x\left(\frac{1}{S_0}\right)^y e^{(1-y)\left(r+\frac{1}{2}y\sigma^2\right)T} \end{aligned}$$

- Maximaler Nutzen

$$E\left[u_A\left(V_T^{\mathrm{A},*}\right)\right] = \frac{V_0^{1-\gamma}}{1-\gamma}\, e^{(1-\gamma)\left(r+\frac{(\mu-r)^2}{2\gamma\sigma^2}\right)T}$$

(B) *Subsistence Level*–Lösung

- Investitionsquote

$$\pi_t^{B,*} \quad = \quad m^* \frac{V_t - e^{-r(T-t)} G_T}{V_t} = \frac{m^* F_t}{V_t}$$

- (Pfadunabhängige) Auszahlungsfunktion

$$V_T^{B,*} = h^{\mathrm{B},*}(S_T) \quad = \quad G_T + \phi\left(V_0 - e^{-rT} G_T, m^*\right) \; S_T^{m^*}$$

- Maximaler Nutzen

$$E\left[u_B\left(V_T^{\mathrm{B},*}\right)\right] = \frac{\left(V_0 - e^{-rT} G_T\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \; e^{(1-\gamma)\left(r + \frac{(\mu-r)^2}{2\gamma\sigma^2}\right) T}$$

(C) *Endwertbedingung*–Lösung (I)

- (Pfadunabhängige) Auszahlungsfunktion

$$\begin{aligned} h^{C,*}(S_T) &= G_T + \left[\tilde{h}^{A,*}(S_T) - G_T\right]^+ \\ \text{wobei } \tilde{h}^{A,*}(S_T) &= \underbrace{\phi\left(\tilde{V}_0, m^*\right)}_{\tilde{\phi}} S_T^{m^*} \end{aligned}$$

- $\tilde{V}_0$ ($\tilde{V}_0 < V_0$) ist Lösung von

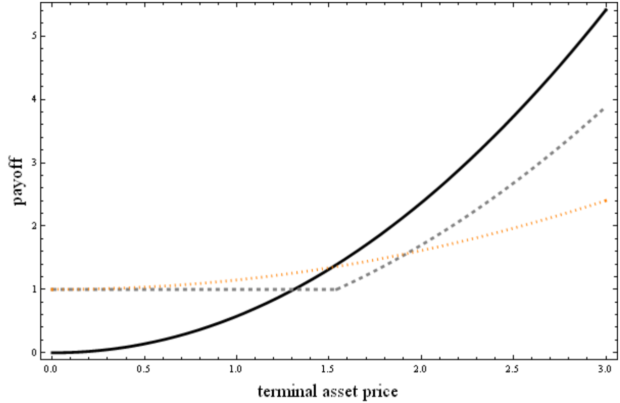
$$e^{-rT} G + \tilde{\phi} \underbrace{PO\left(0, S_0; m^*, \frac{G_T}{\tilde{\phi}}, T\right)}_{\text{Preis Power–Option}} = V_0$$

Optimale Payoffs–Vergleich

- Vergleich/wesentliche Beobachtung

$$
\begin{aligned}
V^*_{T,A} &= \phi\left(V_0, m^*\right) S_T^{m^*} \\
V^*_{T,B} &= G_T + \frac{V_0 - e^{-rT} G_T}{V_0} V^*_{T,A} \\
V^*_{T,C} &= \underbrace{\frac{\tilde{V}_0}{V_0}}_{\alpha} \underbrace{V^*_{T,A}}_{\text{Endwert CM–Strategie}} + \left[G_T - \underbrace{\frac{\tilde{V}_0}{V_0}}_{\alpha} V^*_{T,A} \right]^+
\end{aligned}
$$

Illustration *optimale Auszahlungsprofile*



Nutzenverlust

- T–Sicherheitsäquivalent $CE_T(\pi)$ bzgl der Strategie π

$$\boxed{u\left(CE_T(\pi)\right) = E_P\left[u\left(V_T(\pi)\right)\right]}$$

- Verlustrate $l_T^{i,\pi}$ bzgl. der Strategie π und Problem i $(i \in \{A, B, C\})$

$$\boxed{l_T^{(i,\pi)} := \frac{\ln\left(\frac{CE_T^{(i,*)}}{CE_T^{(i,\pi)}}\right)}{T}}$$

wobei $CE^{*,i}$ das maximale Sicherheitsäquivalent bzgl. Optimierungsproblem i bezeichnet

Fazit und Ausblick I

- Optimale Garantiekonzepte

  - Contribution Guaranteed Scheme impliziert OBPI Ansatz
  - Participating Guaranteed Scheme impliziert CPPI Ansatz

- Black/Scholes Modell: alle pfadunabhängigen Strategien lassen sich als Lösung eines Optimierungsproblems darstellen

$\Rightarrow$ gilt nicht für pfadabhängige Strategien (suboptimal)

Ursachen für Pfadabhängigkeit:

- Kreditbeschränkungen
- Periodische Prämien (*Asiatische Optionen*)

Fazit und Ausblick II

- Weitere Aspekte

$\Rightarrow$ Allgemeinere Aktienkursdynamiken

$\Rightarrow$ Optimales Design von Altersvorsorgeverträgen sollte nicht nur auf Maximierung des erwarteten Nutzens bzw. einer Analyse des Nutzenverlusts basieren (Gap–Risiko, Cash–Lock Verhalten der Strategien)

$\Rightarrow$ Kontext Solvency II

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!