

37. – Wozu dient in der Definition eines ϵ -regulären Paares die Bedingung „ $|X| \geq \epsilon|A|$ und $|Y| \geq \epsilon|B|$ “?
38. – Zeige, dass jedes in einem Graphen G ϵ -reguläre Paar (V_i, V_j) auch in \overline{G} ϵ -regulär ist.
39. Betrachte eine Partition $\{V_1 \dots V_k\}$ einer endlichen Menge V . Zeige, dass der vollständige Graph auf V ungefähr $(k-1)$ -mal so viele Kanten zwischen verschiedenen Partitions Mengen hat wie Kanten innerhalb von Partitions Mengen. Erkläre, wie dies zur Wahl von $m := 1/\gamma$ im Beweis des Satzes von Erdős und Stone führt. in gleich große Mengen V_i
 $\ell := 1/\gamma$
40. Beweise das Regularitätslemma für nicht-dichte Graphen, d.h. für jede Folge $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Graphen der Ordnung n mit $\|G_n\|/n^2 \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Notizen

Das Standard-Referenzwerk für Resultate und offene Probleme der extremalen Graphentheorie ist B. Bollobás, *Extremal Graph Theory*, Academic Press 1978; hier nicht gegebene Quellenverweise finden sich dort. Neuere Ergänzungen finden sich in dem von Bollobás geschriebenen Kapitel des *Handbook of Combinatorics* (R.L. Graham, M. Grötschel & L. Lovász, Hrsg.), North-Holland 1995. In L.W. Beineke & R.J. Wilson, *Selected Topics in Graph Theory 2*, Academic Press 1983, findet sich ein Übersichtsartikel von Simonovits zur extremalen Graphentheorie im engeren Sinne, der unter anderem die besondere Rolle der Turángraphen anschaulich herausarbeitet; einen neueren Überblick gibt Simonovits in (R.L. Graham & J. Nešetřil, Hrsg.) *The Mathematics of Paul Erdős*, Vol. 2, Springer 1996.

Der Satz von Turán ist nicht einfach ein extremaler Satz von vielen: er ist das klassische Ursprungsresultat der Extremalen Graphentheorie. Unser erster Beweis ist im wesentlichen der Originalbeweis; der zweite geht auf Zykov zurück und ist in dieser Form von Brandt. Unsere Version des Satzes von Erdős & Stone ist eine leichte Vereinfachung des Originalresultates. Ein direkter Beweis des Satzes (ohne Verwendung des Regularitätslemmas) findet sich in L. Lovász, *Combinatorial Problems and Exercises* (2. Auflage), North-Holland 1993. Das Korollar des Satzes, dem dieser seine in der extremalen Graphentheorie so herausragende Stellung verdankt, wurde erst 20 Jahre später gefunden: von Erdős und Simonovits (1966).

Von unseren zwei Schranken für $\text{ex}(n, K_{r,r})$ gilt die obere als die größenordnungsmäßig vermutlich richtige. Für vollständig bipartite Graphen mit Eckenpartition in sehr unterschiedlich große Mengen wurde dies bestätigt von J. Kollár, L. Rónyai & T. Szabó, Norm-graphs and bipartite Turán numbers, *Combinatorica* **16** (1996), 399–406; dort ist gezeigt, dass $\text{ex}(n, K_{r,s}) \geq c_r n^{2-\frac{1}{r}}$ gilt für $s > r!$.

Ein Beweis der Erdős-Sós-Vermutung für große k wurde 2006 angekündigt von M. Ajtai, J. Komlós, M. Simonovits und E. Szemerédi. Der Fall, dass der betrachtete Baum T ein Weg ist (Übung 16), wurde 1959 von Erdős & Gallai bewiesen. Es war dieses Ergebnis, das, zusammen mit dem einfachen anderen