Ankündigung

Die Klausur ist bestanden, wenn Sie **25 Punkte** erreicht haben.

Aufgaben

(K1) Beantworten Sie die folgenden Fragen. Pro richtiger Antwort gibt es einen Punkt, pro falscher wird ein Punkt abgezogen[1]. Sie können eine Frage auch unbeantwortet lassen, wenn Sie sich mit der Antwort nicht sicher sind. **(7 Punkte)**

		wahr	**falsch**
(a)	Ist eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ injektiv, so ist sie auch surjektiv.	☒	☐
(b)	Für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt immer $(AB)^2 = A^2B^2$.	☐	☒
(c)	Jede Drehung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ besitzt eine Umkehrabbildung.	☒	☐
(d)	$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.	☐	☒
(e)	Jedes homogene lineare Gleichungssystem ist *eindeutig* lösbar.	☐	☒
(f)	Für eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist $\frac{z+\bar{z}}{2}$ der Realteil von z.	☒	☐
(g)	Die Abbildung $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto x^2$ ist linear.	☐	☒

[1] Sie können aber nicht weniger als 0 Punkte für die Aufgabe bekommen.

(K2) Es sei die Ebene $E : x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$ gegeben.

(a) Geben Sie an, für welche(n) der Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$v_i \in E$ gilt.

(3 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass die Gerade

$$g = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in E enthalten ist.

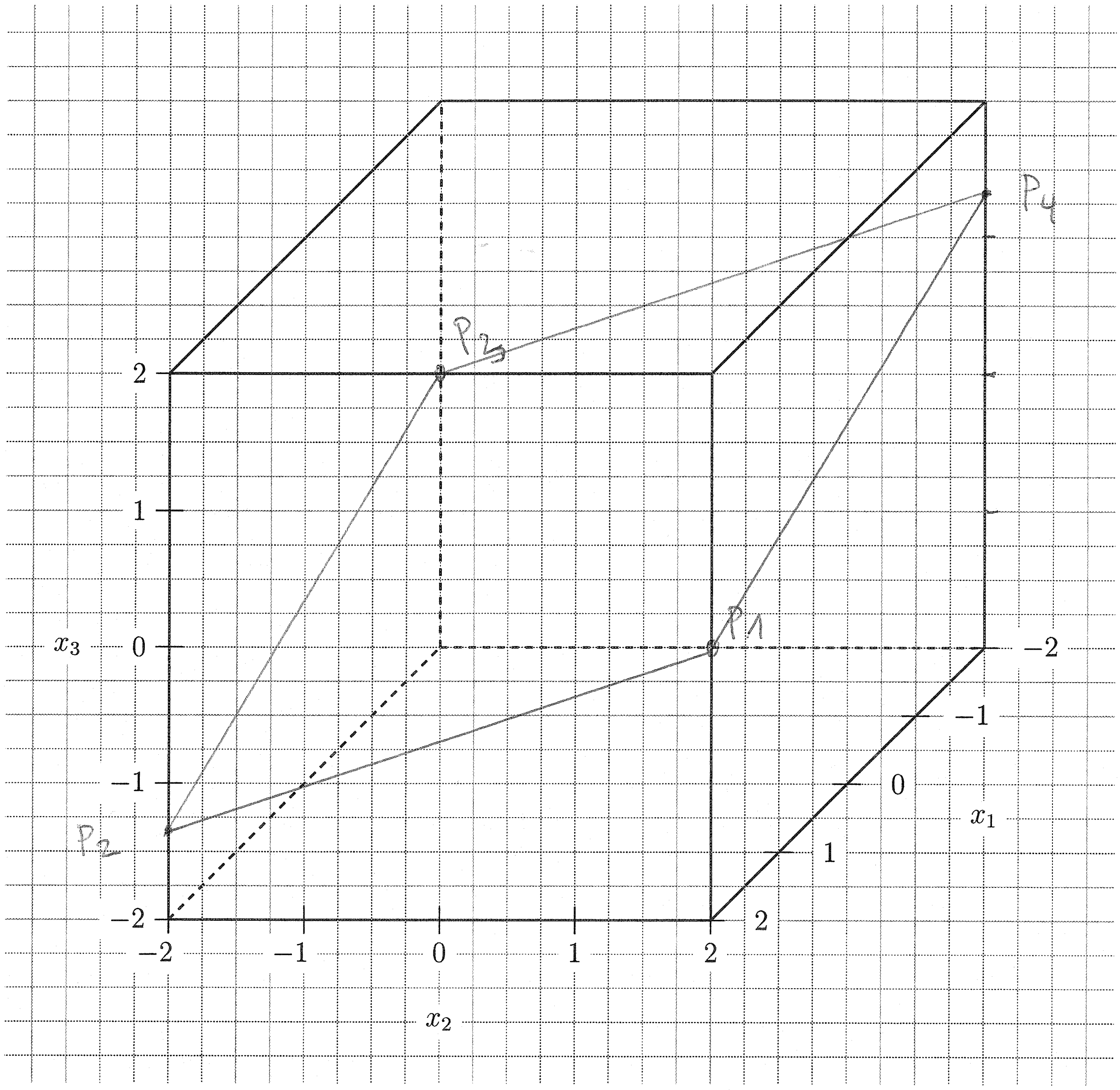
(2 Punkte)

(c) Geben Sie eine kurze Begründung (nicht länger als ein Satz), warum E ein Untervektorraum ist.

(1 Punkte)

(d) [BONUS] Skizzieren Sie E in dem Würfel auf der Rückseite.

(2 Bonuspunkte)



Hinweis: Die vertikalen Kanten des Würfels liegen auf den Geraden:

$$g_{2,2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, g_{-2,2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$g_{-2,-2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, g_{2,-2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(6 Punkte)

a)

$4-(-2)+3\cdot(-2)=6-6=0$

$1-0+3(-2)=-5\neq 0$

$3-3+3\cdot 2=6\neq 0$

$\Rightarrow v_1\in E,\ v_2\notin E,\ v_3\notin E$

b) Sei $p\in g$ beliebig. Dann gilt $p=(\alpha,\alpha,0)$ mit einem $\alpha\in\mathbb{R}$.

Wegen $\alpha-\alpha+3\cdot 0=0$ folgt $p\in E$.

Weil p beliebig war folgt $g\subseteq E$.

c) Weil E die Lösungsmenge eines homogenen LGS ist.

d) Die Schnittpunkte von E mit dem Würfel sind:

$P_1=(2,2,0)$, $P_3=(-2,-2,0)$

$P_2=(2,-2,-\frac{4}{3})$, $P_4=(-2,2,\frac{4}{3})$

(K3) (a) Bringen Sie die folgenden Ausdrücke in die Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

(i) $(3 - 4i) + \overline{(-1 + i)}$ (ii) $\frac{i}{i-3}$

(6 Punkte)

(b) Geben Sie die komplexe Zahl $z := -3 - 3i$ in Polarkoordinaten an.

(3 Punkte)

Hinweis: Als Hilfe sind die wichtigsten Sinus- und Kosinuswerte angegeben. Zur Erinnerung sei darauf hingewiesen, dass 90° dem Bogenmaß $\frac{\pi}{2}$ entspricht.

Winkel (Grad)	0°	30°	45°	60°	90°
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Kosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

(9 Punkte)

(a) i)

$$(3-4i) + \overline{(-1+i)} = 3 - 4i - 1 - i$$
$$= 2 - 5i = 2 - i5$$
$$= 2 + i(-5)$$

ii)

$$\frac{i}{i-3} = \frac{i}{(i-3)}\frac{(i+3)}{(i+3)} = \frac{-1+3i}{-1-9} = \frac{1-3i}{10}$$

$$= \frac{1}{10} + i\left(-\frac{3}{10}\right)$$

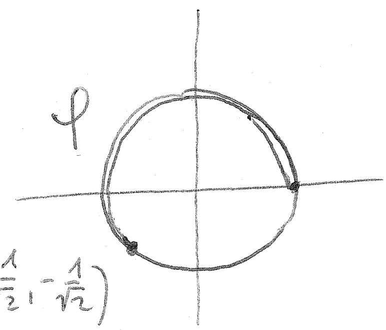
b) Wir haben

$$r = |z| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{2 \cdot 3^2}$$
$$= \sqrt{2} \cdot 3 .$$

Weiter gilt $\cos\varphi = \frac{-3}{\sqrt{2}\cdot 3} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

und $\sin\varphi = \frac{-3}{\sqrt{2}\cdot 3} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Es folgt $\varphi = \frac{5}{4}\pi$



Die Polarkoordinaten sind $\left(3\sqrt{2}, \frac{5}{4}\pi\right)$

(K4) Sei A die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

(a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für

$$a = -9 \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(6 Punkte)

(b) Bestimmen Sie, für welche(s) a gilt, dass $\dim \operatorname{Bild} A = 2$ ist. Berechnen Sie in diesem Fall auch $\operatorname{Kern} A$.

(4 Punkte)

(10 Punkte)

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -9 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} I \\ II \\ III \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & -1 \\ 0 & 2 & -13 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} I \\ II' = II - 2 \cdot I \\ III' = III - 2I \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} I \\ II' \\ III'' = III' - 2II' \end{array}$

$III'' \Rightarrow x_3 = 0$

in II' einsetzen: $x_2 = -1 + 7 \cdot 0 = -1$

in I einsetzen: $x_1 = 1 - 2 \cdot 0 = 1$

$\Rightarrow L(A, b) = \{(1, -1, 0)\}$

b) Wir suchen a, sodass $\dim \operatorname{Kern} A = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & a & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & (a-4) & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II}' = \mathrm{II} - 2\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{III}' = \mathrm{III} - 2\cdot\mathrm{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & (a+10) & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II}' \\ \mathrm{III}'' = \mathrm{III}' - 2\cdot\mathrm{II}' \end{array}$$

Es gilt $a \neq -10 \iff \dim \operatorname{Kern} A = 0 \iff \dim \operatorname{Bild} A = 3$

„Dimensionsformel"

Für $a = -10$ liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II}' \\ \mathrm{III}'' \end{array}$$

mittels Rückwärtseinsetzen:

$x_3 = \alpha$ mit Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\mathrm{II}' \Rightarrow \quad x_2 = 7\alpha$

$\mathrm{I} \Rightarrow \quad x_1 = -2\alpha$

Es folgt $\operatorname{Kern} A = \mathbb{R}(-2, 7, 1)$ und $\dim \operatorname{Kern} A = 1$; wegen der Dimensionsformel $\dim \operatorname{Bild} A + \dim \operatorname{Kern} A = \dim \mathbb{R}^3$ gilt dann $\dim \operatorname{Bild} A = 2$.

(K5) Es seien die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_5 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^3$ gegeben.

Wählen Sie aus der Menge $\{v_1, \ldots, v_5\}$ Vektoren aus (ohne Begründung), sodass

(a) diese linear unabhängig sind und ihre lineare Hülle ein echter Untervektorraum vom $\mathbb{R}^3$ ist.

(3 Punkte)

(b) diese linear abhängig sind und ihre lineare Hülle der $\mathbb{R}^3$ ist.

(3 Punkte)

(c) diese eine Basis vom $\mathbb{R}^3$ bilden.

(3 Punkte)

(9 Punkte)

a) zwei oder weniger Vektoren

b) Mindestens vier Vektoren; v_4 muss dabei sein.

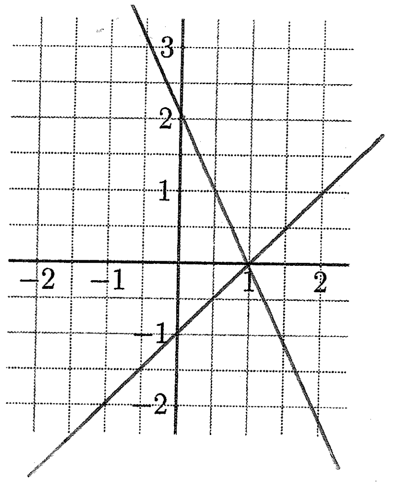
c) genau drei Vektoren; v_4 muss dabei sein.

(K6) Gegeben sind die Geraden $g := -2x + 2y = -2$ und $f = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie den Schnittpunkt $g \cap f$.

(3 Punkte)

(b) Skizzieren Sie die beiden Geraden.



(4 Punkte)

(c) Geben Sie eine Koordinatendarstellung von f an.

(2 Punkte)

(9 Punkte)

a) Wenn es einen Schnittpunkt P gibt, so existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$P = (2,-2) + \lambda(2,-4)$$

Wir setzen P in g ein, um λ zu bestimmen

$$-2(2+\lambda 2) + 2(-2+\lambda(-4)) = -2$$

$$\Leftrightarrow \quad -4-4\lambda \ -4-8\lambda = -2$$

$$\Leftrightarrow \quad -12\lambda = 6$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{2}$$

Einsetzen von λ liefert

$$P = (2,-2) + \left(-\frac{1}{2}\right)(2,-4)$$
$$= (2,-2) - (1,-2) = (1,0)$$

c)

~~f:~~

$f: \quad 2x + y = 2$