Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundlagen der Mathematik (LPSI/LS-M2)

Übungsklausur **SoSe 2011 - C. Curilla/B. Janssens**

Liebe Studierende,

im Folgenden finden Sie einige Aufgaben, die Sie zur Vorbereitung auf die Modulabschlussprüfung am **Mittwoch, den 13. Juli 2011** lösen sollten. Außerdem empfehle ich Ihnen dringend ausgewählte Präsenz- und Übungsaufgaben zu wiederholen. Der Umfang der Klausur wird geringer sein als der der Übungsklausur. Letztere ist zu Übungszwecken so umfangreich.

Erinnerung: Alle wichtigen und regelmäßig aktualisierten Informationen zur Modulprüfung finden Sie hier: `http://www.math.uni-hamburg.de/home/curilla/SoSe1011.html`

Hausaufgaben: Die Liste der relevanten Aufgaben finden Sie unter: `http://www.math.uni-hamburg.de/home/curilla/Relevanzliste.pdf`

Nun wünschen wir Ihnen viel Spaß und Erfolg bei der Prüfungsvorbereitung!

bitte wenden!

Aufgaben

(ÜK1) Beantworten Sie die folgenden Fragen. In der Klausur gibt es pro richtiger Antwort einen Punkt, pro falscher wird ein Punkt abgezogen[1]. Eine Frage kann auch unbeantwortet gelassen werden, dann wird kein Punkt abgezogen. In den folgenden Fragen bezeichnen V und W endlich dimensionale reelle Vektorräume.

		wahr	**falsch**
(a)	Seien $v_1, \ldots, v_r \in V$. Ist $(v_1, \ldots, v_r)$ linear abhängig, so auch $(v_1, \ldots, v_{r-1})$.	☐	☐
(b)	Die Geraden $v_0 + \mathbb{R}v$ und $w_0 + \mathbb{R}w$ mit $v_0, w_0, v, w \in \mathbb{R}^2$ sind genau dann parallel, wenn (v, w) linear abhängig ist.	☐	☐
(c)	Ist $f : V \to W$ eine lineare Abbildung mit $\operatorname{Kern} f = \{\mathbf{0}\}$, so gilt $\operatorname{Bild} f = W$.	☐	☐
(d)	Die komplexen Zahlen bilden einen angeordneten Körper.	☐	☐
(e)	Für $A \in \mathbb{R}^{s\times t}$ und $B \in \mathbb{R}^{t\times u}$ gilt $AB \in \mathbb{R}^{u\times s}$.	☐	☐
(f)	$(1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,0,1,1), (0,0,0,1)$ ist Basis des $\mathbb{R}^4$.	☐	☐
(g)	Es gibt keine Matrix $M \in \mathbb{R}^{5\times 7}$ mit $\operatorname{Rang} M = 6$.	☐	☐
(h)	Im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$ sind $(1,0)$ und $(i,0)$ linear unabhängig.	☐	☐
(i)	Es gibt keine lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^4$ mit $\dim \operatorname{Kern} g = 2$.	☐	☐

(ÜK2) (a) Bringen Sie die folgenden Ausdrücke in die Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

(a) $(4 - 12i) + (-17 + 3i)$ (b) $(-\frac{1}{\sqrt{2}} - 2i) - (-\frac{i}{9} + \frac{4}{13})$ (c) $(2i + 3)(\frac{1}{7} + 4i)$

(d) $\frac{6-2i}{-1+3i}$ (e) $\left|\frac{2i - \frac{1}{\sqrt{3}}}{6i - 8\sqrt{3}}\right|$ (f) $\overline{(4 - \frac{1}{i})}$

(g) $\overline{(-2 + i)}(3i^3)$ (h) $\overline{e^{i\frac{3\pi}{4}}}$

(b) Geben Sie die komplexe Zahl $z := \frac{2}{1+i}$ in Polarkoordinaten an.

[1]Man kann aber nicht weniger als 0 Punkte für die Aufgabe bekommen.

(ÜK3) Gegeben sei die Gerade $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 3x - 2y = 4\}$.

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung von A an.

(b) Skizzieren Sie die Menge A.

(c) Bestimmen Sie, sofern möglich, die Parameter zu den Punkten $(6, 7)$ bzw. $(21, 31)$.

(d) Geben Sie die Parameterdarstellung der zu A parallelen Gerade B durch den Punkt $(2, -4)$ an und ergänzen Sie diese in Ihrer Skizze.

(ÜK4) Geben Sie mit Begründung eine echte Teilmenge U von $\mathbb{R}^3$ an, sodass U die Vektoren $(1, 2, 1)$ und $(-1, -2, 2)$ enthält und ein Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$ ist.

(ÜK5) Gegeben sei die komplexe Zahl $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Berechnen Sie:

(a) $\overline{z}$, $|z|$, z^2, z^3, z^4

(b) die Darstellung von z in Polarkoordinaten

(c) Begründen Sie warum $G = \{1, z, \overline{z}\}$ bezüglich der Multiplikation komplexer Zahlen eine Gruppe ist.

(ÜK6) Die Matrix A stelle diejenige lineare Abbildung auf $\mathbb{R}^4$ dar, die die kanonische Basisvektoren zyklisch vertauscht, d. h. $\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_4 \mapsto \mathbf{e}_1$

(a) Begründen Sie ohne Rechnung, dass $A^4 = I_4$ (I_4 die Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^4$).

(b) Berechnen Sie A, A^2, A^3 und A^4.

(c) Beweisen Sie, dass $H := \{I_4, A, A^2, A^3\}$ ein Gruppe bzgl. Matrizenmultiplikation ist. Sei nun G die Gruppe der vierten Einheitswurzeln (d.h. die Menge $\{1, i, -1, -i\}$ zusammen mit der in $\mathbb{C}$ gegebenen Mulitplikation). Geben Sie (ohne Begründung) einen Isomorphismus $\phi : G \to H$ an.

(ÜK7) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat $Ax = b$ eine Lösung?

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge für $\alpha = -1$.

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge für $\alpha = 2$.

(d) Bestimmen Sie $\operatorname{Kern} A$ und $\dim \operatorname{Bild} A$ im Fall $\alpha = 0$.

(ÜK8) Es seien die Vektoren $u := (1, -1, 0)$, $v := (0, 1, 0)$ und $w := (0, -2, -3)$ des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$ gegeben.

(a) Zeigen Sie mit elementar Mitteln (damit meinen wir direkt der Definition folgend und insbesondere ohne (P17) zu verwenden), dass $L(u, v, w) = \mathbb{R}^3$ für die lineare Hülle gilt.

(b) Zeigen Sie, dass (u, v, w) linear unabhängig ist.

(c) Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, sodass

$$(2, -1, 0) = a \cdot u + b \cdot v + c \cdot w \,.$$