Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundlagen der Mathematik (LPSI/LS-M1)

Übungsklausur **WiSe 2010/11 - C. Curilla/S. Koch/S. Ziegenhagen**

Liebe Studierende,

im Folgenden finden Sie einige Aufgaben, die Sie zur Vorbereitung auf die Modulabschlussprüfung am **Mittwoch, den 09. Februar 2011** lösen sollten. Außerdem empfehle ich Ihnen dringend, sich den Kurztest noch einmal anzuschauen und ausgewählte Präsenz- und Übungsaufgaben zu wiederholen. Der Umfang der Klausur wird geringer sein als der der Übungsklausur. Letztere ist zu Übungszwecken so umfangreich.

Erinnerung: Alle wichtigen und regelmäßig aktualisierten Informationen zur Modulprüfung finden Sie hier: http://www.math.uni-hamburg.de/home/curilla/WiSe1011.html

Schlimme Fehler: Hier eine Liste mit schwerwiegenden Fehlern, die Sie unbedingt vermeiden sollten:

- Bei Termumformungen werden keine Äquivalenzpfeile hingeschrieben.
- Mengen werden als bijektiv bezeichnet. *Erklärung:* Bijektiv zu sein, ist eine Eigenschaft, die nur Abbildungen haben können. Es kann also höchstens eine bijektive Abbildung zwischen Mengen geben.
- Es wird nicht klar zwischen Mengen und Aussagen unterschieden: Es wird häufig $=$ mit $\Leftrightarrow$, $\cup$ mit $\vee$, $\cap$ mit $\wedge$, etc. verwechselt.
- Es wird oft nicht richtig zwischen „=“ und „:=“ unterschieden. *Erklärung:* Während „=“ das wohlbekannte Gleichheitszeichen ist, wird „:=“ benutzt, um das Symbol links von ihm durch den Term rechts von ihm zu definieren. Beispiel: Wir definieren $f(x) := x^2 - 3$. Hiermit haben wir jetzt für alle x im Definitionsbereich festgelegt, was $f(x)$ ist, also zum Beispiel $f(1) = -2$, $f(2) = 1$, $f(5) = 22$ u.s.w. Wenn wir jetzt $f(5) := 5^2 - 3$ schreiben, bedeutet das, dass wir $f(5)$ als $5^2 - 3$ definieren. Dies ist aber unsinnig, weil wir zuvor schon $f(x)$ für alle x (und damit auch für 5) definiert hatten.

- Bei Induktionsbeweisen wird immer wieder vergessen, die Stelle zu benennen, an der die Induktionsvoraussetzung eingeht.

- Die Begriffe „Widerspruchsbeweis“ und „Kontraposition“ werden nicht richtig unterschieden. *Erkärung:* In beiden Fällen wird zwar meist versucht eine Implikation $p \Rightarrow q$ zu beweisen, dies macht man aber auf unterschiedliche Art und Weise. Bei dem Widerspruchsbeweis zeigt man, dass die Negation der Implikation zu einem logischen Widerspruch führt. Die Kontraposition hingegen ist $\neg q \Rightarrow \neg p$. Weil diese logisch äquivalent zur Implikation $p \Rightarrow q$ ist, kann man auch versuchen sie zu beweisen. Wichtig ist aber, dass die Kontraposition zu einer Implikation auf keinen Fall die Negation zu dieser ist.

- Wenn durch eine Variable geteilt wird, wird häufig vergessen zu schreiben, warum man dies in der vorliegenden Situation machen darf.

- Es wird oft verwechselt, wann mit n eine feste Zahl gemeint ist, und wann nicht. So wird z.B. häufig bei Mengen der Form $M := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ gedacht dies sei die Menge $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}\right\}$. Korrekt ist aber, dass die Menge M aus allen Zahlen der Form $\frac{1}{n}$ besteht, also dass für JEDES $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $\frac{1}{n} \in M$ ist (folglich ist M also eine Menge mit unendlich vielen Elementen).
  Anders ist es zum Beispiel, wenn wir eine Aussage der Art

  „sei $M := \{1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$“

  lesen. Hierbei besteht M aus endlich vielen Elementen. Genauer gesagt es besteht aus n-vielen Elementen. Wir wissen zwar nicht, welche Zahl n eigentlich ist, wir müssen sie aber wie eine feste (uns bekannte) Zahl behandeln.

- Häufig werden die Definitionen von Mengen nicht richtig verstanden. Lesen Sie sich die unterschiedlichen Arten, wie man Mengen definieren kann bitte nochmals durch. Wer keine Vorlesungsmitschrift hat, der lese bitte die ersten zwei Seiten des Kapitels über Mengen in dem Skript von Frau Koch.

Hausaufgaben: Die Hausaufgaben sind hier nach ihrer Relevanz für die Klausur aufgelistet. Diese Unterteilung bedeutet nicht, dass „weniger relevante“ Aufgaben nicht dran kommen können. Sie sollten diese Unterteilung als Hilfestellung für die Zeitplanung Ihrer Vorbereitung ansehen.

- **sehr relevant:** H1, H2, H8, H9, H12, H14, H17, H19, H23a, H24, H25, H27a-b, H28, H29, H30, H34a, H38, H42, H44, H46
- **relevant:** H3, H4, H5, H6, H7, H10, H11, H13, H15, H18, H21, H22, H26, H27c-d, H31, H32, H34b, H35a-b, H36, H37, H39, H45, H48, H49
- **weniger relevant:** H16, H20[1], H23b, H27e, H33, H34c-d, H35c, H40, H41, H43, H47

Nun wünschen wir Ihnen viel Spaß und Erfolg bei der Prüfungsvorbereitung!

bitte wenden!

[1] Stellen Sie sich dennoch darauf ein, dass Sie in der Klausur auch zeichnen oder skizzieren müssen.

Aufgaben

(ÜK1) Beantworten Sie die folgenden Fragen. In der Klausur gibt es pro richtiger Antwort einen Punkt, pro falscher wird ein Punkt abgezogen[2]. Eine Frage kann auch unbeantwortet gelassen werden, dann wird kein Punkt abgezogen.

		wahr	**falsch**
(a)	Ist $\mathcal{M}$ die Menge aller Buchstaben in dem Wort *Ananas*, so gilt $\lvert\mathcal{M}\rvert = 6$.	□	□
(b)	$\emptyset \subseteq \mathcal{P}(\{\emptyset\})$.	□	□
(c)	$\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 : x = y^2\}$ ist eine Funktion.	□	□
(d)	Die Abbildung $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto (xy, x + 1)$ ist injektiv.	□	□
(e)	Die Abbildung $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto (xy, x + 1)$ ist surjektiv.	□	□
(f)	Ist $B_i =]1/i, 1 + i[$ für alle $i \in \mathbb{N}$, so ist $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i =]0, \infty[$.	□	□
(g)	$3 \leq 5$ ist notwendig für $3 < 5$.	□	□
(h)	$\mathbb{Q}$ ist überabzählbar unendlich.	□	□
(i)	In einer Gruppe $(A, *)$ ist für alle $a, b, c \in A$ die Gleichung $y * b = a * c$ eindeutig lösbar.	□	□

(ÜK2) (a) Sei $R := \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : |x - y| \leq 3\}$ (hierbei bezeichnet $|x - y|$ den Betrag von $x - y$). Fertigen Sie eine Skizze der Relation R an.

(b) Untersuchen Sie R (aus (a)) auf Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie und Transitivität.

(c) Zwei natürliche Zahlen m und n stehen in Relation S zueinander, falls die Zifferndarstellung von m mit der von n bis auf die Reihenfolge übereinstimmt (beispielsweise gilt so $(34, 43) \in S$). Geben Sie die Äquivalenzklasse von $1242 \in \mathbb{N}$ bezüglich der Äquivalenzrelation S an.

(ÜK3) (a) Es sei die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(z) = z^2 + 2z + 3$ gegeben. Skizzieren Sie die Menge $M := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \{-7, -6, \ldots, 6, 7\}\}$.

[2] Man kann aber nicht weniger als 0 Punkte auf die Aufgabe bekommen.

(b) Untersuchen Sie die Abbildung aus (a) auf Surjektivität und Injektivität:

(c) Geben Sie mit Beweis eine Abbildung $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ an, so dass g bijektiv ist und die Gleichungen $g^{-1}(\{3,4\}) = \{2,3\}$ und $g(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ erfüllt.

(d) Geben Sie Definitionsbereich, Bildbereich und Zuordnungsvorschrift der Komposition $f \circ g$ an, wobei Sie f wie in (a) und g wie in (c) wählen mögen.

(ÜK4) Zeigen Sie, dass die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : x + y = 2\}$ abzählbar unendlich ist. Sie dürfen $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ benutzen.

(ÜK5) Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) $\forall\, n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

(b) $\forall\, n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} (4i-1) = 2n^2 + n$.

(c) $\forall\, n \in \mathbb{N} : 6|(2n^3 + 3n^2 + n)$.

(d) $\exists\, m \in \mathbb{N} : (\forall n \geq m : n^2 - 2n - 1 > 0)$.

(ÜK6) Bestimmen Sie die Menge

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2x}{x-2} < x \right\} .$$

(ÜK7) Gegeben sei die Menge

$$M := \left\{ 2 - \frac{2}{n^2} : n \in \mathbb{N} \right\} .$$

(a) Bestimmen Sie mit kurzer Begründung $\inf M$ und $\min M$

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: $\sup M = 2$.

(ÜK8) Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m > 1$. Bestimmen Sie das multiplikative Inverse zu $[3]_m \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ für

(a) $m = 5$ und

(b) $m = 8$.

(c) Begründen Sie, warum es ebenfalls im Fall der Primzahl $m = 95791$ möglich ist ein multiplikatives Inverses zu finden.