Ankündigung

Die Klausur ist bestanden, wenn Sie **20 Punkte** erreicht haben.

Aufgaben

(K1) Beantworten Sie die folgenden Fragen. Pro richtiger Antwort gibt es einen Punkt, pro falscher wird ein Punkt abgezogen[1]. Sie können eine Frage auch unbeantwortet lassen, wenn Sie sich mit der Antwort nicht sicher sind. **(7 Punkte)**

		wahr	**falsch**
(a)	$R := \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 : \mathrm{ggT}(a,b) = 1\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$ (mit $\mathrm{ggT}(a,b)$ ist der größte gemeinsame Teiler von a und b gemeint).	☐	☒
(b)	In $\mathbb{Q}$ hat jedes Element ein Inverses bzgl. der Multiplikation.	☐	☒
(c)	Der größte gemeinsame Teiler der Primzahlen $a = 2^{43112609} - 1$ und $b = 2^{37156667} - 1$ ist 1.	☒	☐
(d)	In der Äquivalenzklasse eines Elements ist immer auch das Element selber enthalten.	☒	☐
(e)	Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x^3$ ist bijektiv.	☒	☐
(f)	Die „$<$"-Relation ist eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$.	☐	☒
(g)	$a < b$ ist hinreichend für $a \leq b$.	☒	☐

[1]Sie können aber nicht weniger als 0 Punkte für die Aufgabe bekommen.

(K2) Bestimmen Sie rechnerisch alle $x \in \mathbb{R}$, die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\frac{1}{x-1} > 16\left(\frac{1}{4}\right)^2 .$$

(4 Punkte)

Für $x = 1$ ist die Ungleichung nicht definiert. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. $x-1>0$: Es gilt

$$\frac{1}{x-1} > 16\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 > x-1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 > x .$$

2. $x-1<0$: Wir haben

$$\frac{1}{x-1} > 16\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 < x-1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 < x .$$

Insgesamt erhalten wir somit:

$$\cancel{x \in} \quad \big((x>1)\wedge(2>x)\big)\vee\big((x<1)\wedge(2<x)\big),$$

also $x \in \,]1,2[$.

(K3) Es seien die Mengen $M_1 := \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Z}\}$ und $M_2 := \{(1, 2x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Z}\}$ gegeben. Zeigen Sie, dass M_1 und M_2 gleichmächtig sind.

(5 Punkte)

Um zu zeigen, dass M_1 und M_2 gleichmächtig sind, müssen wir zeigen, dass es eine Bijektion $f: M_1 \to M_2$ gibt. Wir definieren

$$f: M_1 \to M_2$$
$$(x,1) \mapsto (1, 2x)$$

Injektiv: Es muss gezeigt werden, dass für beliebige $(x,1), (x',1) \in M_1$ mit $f((x,1)) = f((x',1))$ auch $(x,1) = (x',1)$ gilt. Dies ist aber richtig, denn es gilt:

$$f((x,1)) = f((x',1))$$
$$\Leftrightarrow (1, 2x) = (1, 2x')$$
$$\Leftrightarrow 2x = 2x'$$
$$\Leftrightarrow x = x'$$
$$\Leftrightarrow (x,1) = (x',1)$$

Surjektiv: Sei $(a,b) \in M_2$ beliebig. Nach Definition ist $a = 1$ und $b = 2k$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$. Das Element $(k,1)$ liegt im Definitionsbereich von f, also $(k,1) \in M_1$. Es gilt

$$f((k,1)) = (1,2k) = (a,b).$$

Dies zeigt die Surjektivität.

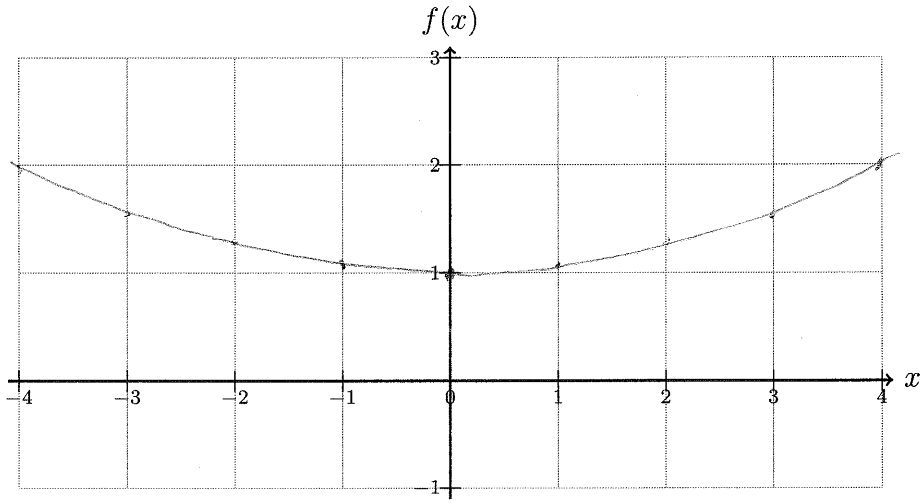
(K4) Gegeben sei die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \quad [1, \infty[\\ x \quad &\mapsto \frac{1}{16}x^2 + 1. \end{aligned}$$

(i) Füllen Sie die Wertetabelle aus: (2 Punkt)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	$\frac{25}{16}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{17}{16}$	1	$\frac{17}{16}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{16}$	2

(ii) Fertigen Sie mit Hilfe der Wertetabelle eine Skizze von f über dem Intervall $[-4, 4]$ an: (2 Punkt)



(iii) Untersuchen Sie die Funktion f auf Surjektivität und Injektivität. (3 Punkte)

(iv) Geben Sie (falls existent) das Infimum, Minimum, Supremum und Maximum der Menge $M := f(\mathbb{N}_0)$ an (ohne Begründung). (2 Punkte)

(9 Punkte)

(iii): Die Funktion ist nicht injektiv, denn es gilt beispielsweise

$$f(-4) = 2 = f(4).$$

Wir untersuchen die Funktion auf Surjektivität:

Sei $y \in [1, \infty[$. Wir suchen $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{16}x^2 + 1 = y$.

Wir formen um:

$$\frac{1}{16}x^2 + 1 = y$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{16}x^2 = y - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 16(y-1)$$

$$\Leftrightarrow (x = 4\sqrt{y-1} \lor x = -4\sqrt{y-1})$$

Weil $y \in [1, \infty[$, existiert $\pm 4\sqrt{y-1}$ in $\mathbb{R}$. y hat somit die Urbilder $4\sqrt{y-1}$ und $-4\sqrt{y-1}$.

Dies zeigt, dass f surjektiv ist.

(iv) $\inf M = \min M = 1$

$\sup M$, $\max M$ existieren nicht.

(K5) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $n^3 - n$ durch 3 teilbar ist. **(6 Punkte)**

Beweis:

IA) Für $n=1$ gilt $n^3-n = 1^3-1=0$.
Weil $3 \mid 0$, ist die Aussage für $n=1$ richtig.

IV) Für ein beliebiges, aber fest gewähltes $n \in \mathbb{N}$ gilt:
3 teilt n^3-n. Das heißt, es ~~x~~ existiert $k \in \mathbb{Z}$ mit $n^3-n = 3\cdot k$

IS) $n \mapsto n+1$

$$(n+1)^3-(n+1) = n^3+3n^2+3n+1-(n+1)$$
$$= n^3+3n^2+3n+1-n-1$$
$$= n^3-n+3n^2+3n$$
$$\overset{(IV)}{=} 3\cdot k+3n^2+3n$$
$$= 3\cdot(k+n^2+n)$$

$\Rightarrow 3 \mid (n+1)^3-(n+1)$ $\square$

(K6) Es seien die Mengen

$$P := \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist eine Primzahl}\},$$
$$I :=]13, 17] \quad \text{und}$$
$$G := \{z \in \mathbb{Z} : z \text{ ist durch 2 teilbar}\}$$

gegeben.

Geben Sie folgende Mengen an

(a) $G \cap P$ (2 Punkt)

(b) I^c bezüglich der Grundmenge $\mathbb{R}$ (2 Punkt)

(c) $I \setminus P$ (2 Punkt)

(d) $(I \cap G) \cup (I \cap P)$ (1 Punkt)

(7 Punkte)

(a) $G \cap P = \{2\}$ ✓ 2/2

(b) $I^c =]-\infty, 13] \cup]17, \infty[$

(c) $I \setminus P =]13, 17[$

(d) $(I \cap G) \cup (I \cap P)$

$= \{14, 16\} \cup \{17\} = \{14, 16, 17\}$

(K7) Für eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist die *Gaußklammer* $\lfloor x \rfloor$ definiert als

$$\lfloor x \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}.$$

Mit Hilfe dieser Klammer definieren wir die Relation

$$R := \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor\}$$

auf $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist. (3 Punkte)

(b) Geben Sie die Äquivalenzklasse $\lfloor \pi \rfloor$ von $\pi = 3,14159265...$ an. (2 Punkte)

(c) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die abgeänderte Relation

$$R' := \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \lfloor a - b \rfloor = 0\}$$

eine Äquivalenzrelation ist. (1 Punkt)

(6 Punkte)

(a) Reflexiv: Für $a \in \mathbb{R}$ gilt $\lfloor a \rfloor = \lfloor a \rfloor$. Nach Definition gilt somit $(a,a) \in R$.

Symmetrie: Für $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gilt:

$(a,b) \in R \Leftrightarrow \lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor \Leftrightarrow \lfloor b \rfloor = \lfloor a \rfloor$
$\Leftrightarrow (b,a) \in R$.

Transitivität: Seien $(a,b), (b,c) \in R$. Es folgt dann $\lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor$ und $\lfloor b \rfloor = \lfloor c \rfloor$. Dies zusammen liefert $\lfloor a \rfloor = \lfloor c \rfloor$ und somit $(a,c) \in R$.

(b) Wir haben

$$
\begin{aligned}
[\pi] &= \{ a \in \mathbb{R} : (a, \pi) \in R \} \\
&= \{ a \in \mathbb{R} : \lfloor \pi \rfloor = \lfloor a \rfloor \} \\
&= \{ a \in \mathbb{R} : 3 = \lfloor a \rfloor \} \\
&= \{ a \in \mathbb{R} : 3 \leq a < 4 \} \\
&= [3, 4[
\end{aligned}
$$

(c) R' ist keine Äquivalenzrelation. Beispielsweise ist die Symmetrie verletzt: $(0{,}5, 0) \in R'$, wegen

$\lfloor 0{,}5 - 0 \rfloor = \lfloor 0{,}5 \rfloor = 0$. Aber

$(0, 0{,}5) \notin R'$, denn $\lfloor 0 - 0{,}5 \rfloor = \lfloor -0{,}5 \rfloor$

$= -1$.