Ankündigung

Die Klausur ist bestanden, wenn Sie **22 Punkte** erreicht haben.

Aufgaben

(K1) Beantworten Sie die folgenden Fragen. Pro richtiger Antwort gibt es einen Punkt, pro falscher wird ein Punkt abgezogen[1]. Sie können eine Frage auch unbeantwortet lassen, wenn Sie sich mit der Antwort nicht sicher sind. **(7 Punkte)**

		wahr	**falsch**
(a)	$a \equiv 1 \mod 8 \implies a \equiv 1 \mod 2$.	☒	☐
(b)	Jede Relation ist eine Funktion.	☐	☒
(c)	Die Menge $\mathbb{R}^+ :=]0, \infty[$ zusammen mit der gewöhnlichen Multiplikation für reelle Zahlen bildet eine Gruppe.	☒	☐
(d)	Es gibt eine Bijektion zwischen $]3,5[$ und $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.	☐	☒
(e)	$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$.	☐	☒
(f)	Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Dann gilt: $a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow a \mid 3b - 11c$.	☒	☐
(g)	Das Element $[3]_9$ hat in $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ ein multiplikatives Inverses.	☐	☒

[1] Sie können aber nicht weniger als 0 Punkte für die Aufgabe bekommen.

(K2) Bestimmen Sie rechnerisch alle $x \in \mathbb{R}$, die folgende Ungleichung erfüllen:

$$-5x - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 .$$

(4 Punkte)

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$-5x - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad -5x - 1 \leq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad -5x \leq \frac{1}{4} + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad -5x \leq \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq -\frac{1}{4}$$

Somit erfüllt x genau dann die Ungleichung, wenn $x \geq -\frac{1}{4}$.

(K3) Zeigen Sie, dass die Menge $M := \{\frac{1}{2k} : k \in \mathbb{N}\}$ abzählbar unendlich ist.

(5 Punkte)

Wir müssen zeigen, dass es eine Bijektion $f: \mathbb{N} \to M$ gibt. Hierzu ~~def~~ definieren wir die Abbildung f durch $f(n) := \frac{1}{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es bleibt zu zeigen, dass f bijektiv ist (also injektiv und surjektiv).

Injektiv: Es muss gezeigt werden, dass für beliebige $n, m \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = f(m)$ auch $n = m$ folgt. Dies ist aber richtig, denn es gilt:

$$f(n) = f(m)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2n} = \frac{1}{2m}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} = \frac{1}{m}$$
$$\Leftrightarrow m = n$$

Surjektiv: Sei $q \in M$ beliebig. Nach Definition von M ist q von der Form $q = \frac{1}{2k}$ mit einem $k \in \mathbb{N}$. Die Zahl k liegt im Definitionsbereich von f. Wir erhalten somit $f(k) = \frac{1}{2k} = q$. Dies zeigt die Surjektivität von f.

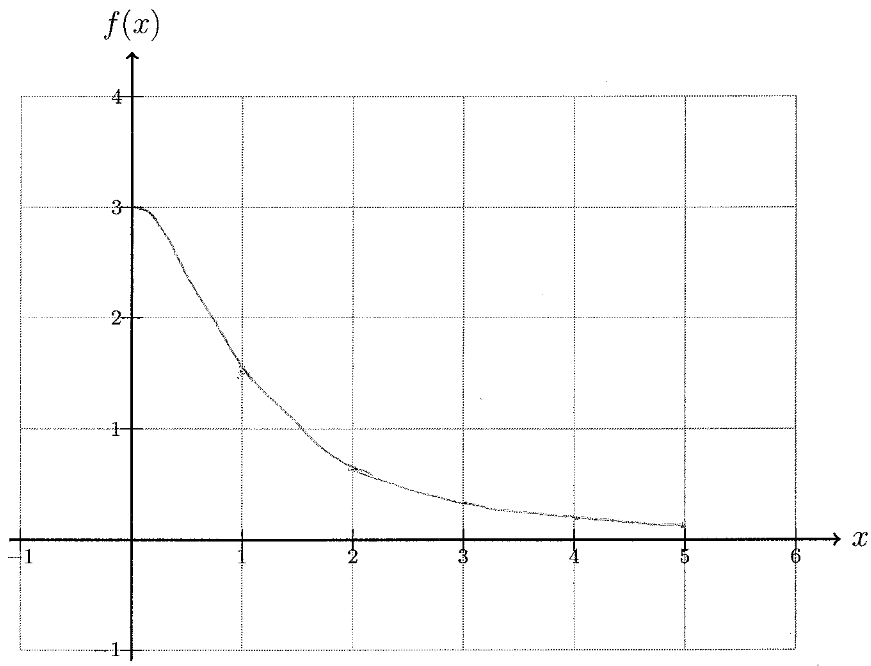
(K4) Gegeben sei die Funktion

$$\begin{aligned} f : [0,\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{3}{x^2+1}. \end{aligned}$$

(i) Füllen Sie die Wertetabelle aus: (2 Punkt)

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{17}$	$\frac{3}{26}$

(ii) Fertigen Sie mit Hilfe der Wertetabelle eine Skizze von f über dem Intervall $[0,5]$ an: (2 Punkt)



(iii) Untersuchen Sie die Funktion f auf Surjektivität und Injektivität. (3 Punkte)

(7 Punkte)

Injektiv: seien $x, x' \in [0, \infty[$.
Dann gilt:

$$f(x) = f(x')$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{x^2+1} = \frac{3}{x'^2+1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{x'^2+1}$$

$$\Rightarrow \quad x'^2+1 = x^2+1$$

$$\Rightarrow \quad x'^2 = x^2$$

$$\Rightarrow \quad x' = x \quad \text{, weil } x, x' \in [0, \infty[$$

Somit ist die Injektivität gezeigt.

Surjektiv: Angenommen f ist surjektiv. Dann existiert $x \in [0, \infty[$ mit $f(x) = -1$. Es gilt

$$f(x) = -1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{x^2+1} = -1$$

$$\Rightarrow \quad 3 = -x^2 - 1$$

$$\Rightarrow \quad -4 = x^2$$

Weil dies (reell) nicht lösbar ist, erhalten wir einen Widerspruch. Die Abbildung f ist also nicht surjektiv.

(K5) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ folgende Aussage gilt:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

(6 Punkte)

Beweis:

IA) Für $n=2$ haben wir

$$\left(1-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

IV) Für ein beliebiges, aber fest gewähltes $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m}$$

IS) $m \mapsto m+1$:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{1}{m}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{m+1}\right) \overset{(IV)}{=} \frac{1}{m}\left(1-\frac{1}{m+1}\right)$$

$$= \frac{1}{m}\left(\frac{m+1}{m+1} - \frac{1}{m+1}\right) = \frac{1}{m}\left(\frac{m}{m+1}\right) = \frac{1}{m+1}.$$

$\square$

(K6) Gegeben seien die natürlichen Zahlen $a = 40$, $b = 1213$ und $c = 103$.

(a) Bestimmen Sie den $\operatorname{ggT}(b, c)$ mit dem Euklidischen Algorithmus. (3 Punkte)

(b) Geben Sie die Primfaktorzerlegung von a an. (2 Punkte)

(c) Geben Sie alle natürlichen Teiler von a an. (2 Punkte)

(d) Zeigen Sie, dass $c \equiv c^2 \mod 17$ gilt. (2 Punkte)

(9 Punkte)

(a) Wir haben

$$1213 = 11 \cdot 103 + 80$$
$$103 = 1 \cdot 80 + 23$$
$$80 = 3 \cdot 23 + 11$$
$$23 = 2 \cdot 11 + 1$$
$$11 = 11 \cdot 1$$

$\Rightarrow \operatorname{ggT}(b, c) = 1.$

(b) $a = 40 = 2^3 \cdot 5^1$

(c) $2^0 \cdot 5^0 = \underline{1}$, $2^1 \cdot 5^0 = \underline{2}$, $2^2 \cdot 5^0 = \underline{4}$, $2^3 \cdot 5^0 = \underline{8}$

$2^0 \cdot 5^1 = \underline{5}$, $2^1 \cdot 5^1 = \underline{10}$, $2^2 \cdot 5^1 = \underline{20}$, $2^3 \cdot 5^1 = \underline{40}$

(d) Wir haben $c - c^2 = c(1-c)$

$= 103 \cdot (-102) = -103 \cdot 6 \cdot 17.$

Daraus folgt $17 \mid c - c^2$, also

$c \equiv c^2 \mod 17.$

(K7) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ eine Funktion. Mit Hilfe von f definieren wir die Relation

$$R := \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : f(a) = f(b)\}$$

auf $\mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist. (3 Punkte)

(b) Geben Sie für den Fall

$$f(n) := n^2 - 4n + 3$$

die Äquivalenzklasse $[1]$ von $1 \in \mathbb{N}$ an. (2 Punkte)

(c) Geben Sie für den Fall

$$f(n) := (-1)^n$$

die Äquivalenzklasse $[1]$ von $1 \in \mathbb{N}$ an. (1 Punkt)

(6 Punkte)

(a) Reflexiv: Für $a \in \mathbb{N}$ gilt $f(a) = f(a)$.
Nach Definition gilt somit $(a,a) \in R$

Symmetrie: Für $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gilt:

$(a,b) \in R \Leftrightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow f(b) = f(a)$
$\Leftrightarrow (b,a) \in R$.

Transitivität: Seien $(a,b), (b,c) \in R$.
Es folgt dann $f(a) = f(b)$ und $f(b) = f(c)$.
Dies wiederum liefert $f(a) = f(c)$ und somit $(a,c) \in R$.

(b) Nach Definition gilt

$$\begin{aligned} [1] &= \{a \in \mathbb{N} : (1,a) \in R\} \\ &= \{a \in \mathbb{N} : f(1) = f(a)\} \\ &= \{a \in \mathbb{N} : 0 = f(a)\} \end{aligned}$$

Wegen $n^2 - 4n + 3 = (n-1)(n-3)$

sind 1 und 3 die einzigen Nullstellen von f. Somit gilt

$$[1] = \{1, 3\}$$

c) Nach Definition gilt

$$\begin{aligned}[1] &= \{ a \in \mathbb{N} : (1, a) \in R \} \\ &= \{ a \in \mathbb{N} : f(1) = f(a) \} \\ &= \{ a \in \mathbb{N} : -1 = f(a) \}.\end{aligned}$$

Für natürliche Zahlen ~~gilt~~ $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f(n) = -1 \iff \exists k \in \mathbb{N}_0 : n = 2k+1$$

Wir erhalten somit

$$[1] = \{ 2k+1 : k \in \mathbb{N}_0 \}$$