Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Fachbereich Mathematik
Algebra und Zahlentheorie
Christian Curilla

Grundlagen der Mathematik (LPSI/LS-M1)

Test Montag-B Lösungen **WiSe 2010/11 - C. Curilla/S. Koch/S. Ziegenhagen**

(P1) Beantworten Sie die folgenden Fragen. (Sie müssen nicht alle Fragen beantworten.) Pro richtiger Antwort gibt es einen Punkt, pro falscher wird ein Punkt abgezogen. [1]

		wahr	falsch
(a)	$\mathcal{P}(\{\blacktriangledown, \diamondsuit, \bigstar\})$ enthält genau 9 Elemente.	☐	☒
(b)	Die Zuordnung $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit $\frac{p}{q} \mapsto p + q$ ist eine Funktion.	☐	☒
(c)	Jede Potenzmenge enthält die leere Menge als Element.	☒	☐
(d)	$\{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\} \subset \{\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit\}$.	☐	☒
(e)	Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $x^2 > 9$ hinreichend für $x > 3$.	☐	☒
(f)	Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $x > 3$ hinreichend für $x^2 > 9$.	☒	☐

(P2) Beweisen Sie für beliebige Mengen A, B, C die Gleichheit

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)\ .$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
(x, y) \in A \times (B \cap C) \ &\Leftrightarrow\ \big(x \in A \wedge y \in B \cap C\big) \ \Leftrightarrow \big(x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C)\big) \\
&\Leftrightarrow \big(x \in A \wedge y \in B \wedge x \in A \wedge y \in C\big) \\
&\Leftrightarrow \big((x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C)\big) \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \wedge (x, y) \in (A \times C) \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)\ .
\end{aligned}$$

(P3) Geben Sie mit Beweis eine reflexive Relation auf $\mathbb{Z}$ an, so dass sie keiner Funktion entspricht und jedes $z \in \mathbb{Z}$ mit mindestens einer Zahl $z' \in \mathbb{Z}$ in Relation steht.

Lösungsvorschlag: Die Relation

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x = y \vee x = -y\}$$

[1] Sie können aber nicht weniger als 0 Punkte auf die Aufgabe bekommen!

ist offensichtlich reflexiv; damit steht auch insbesondere jede Zahl zu einer Zahl in Relation. Die Relation ist keine Funktion, da $(2,2) \in R$ und $(2,-2) \in R$, der Zahl 2 würden also zwei verschiedene Werte zugeordnet.

(P4) Sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ eine Funktion.

(a) Definieren Sie für eine Menge $M \subseteq \mathbb{Z}$ das Urbild von M unter f.

(b) Die Abbildungsvorschrift von f laute $x \mapsto 2x^2 - 4$. Berechnen Sie das Urbild von $\{0, 4\}$ (unter f) und das Bild von $[4, 6] \cap \mathbb{Z}$.

Lösungsvorschlag:

(a) Das Urbild von M unter f ist definiert als $f^{-1}(M) := \{x \in \mathbb{Z} : f(x) \in M\}$.

(b) Es sind

$$f(\{z \in \mathbb{Z} : 4 \leq z \leq 6\}) = \{f(4), f(5), f(6)\} = \{28, 46, 68\}$$

und

$$f^{-1}(\{0, 4\}) = \{-2, 2\} \ .$$

(P5) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $T_n :=]0, n]$.

(a) Definieren Sie $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$.

(b) Bestimmen Sie mit Beweis $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n$.

(c) Bestimmen Sie mit Beweis $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$.

Lösungsvorschläge:

(a) Es ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n = \{x : (\exists\, n \in \mathbb{N} : x \in T_n)\}$.

(b) Es gilt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n =]0, 1]$:
Für $x \in]0, 1]$ gilt offensichtlich $0 < x \leq 1$, also $\forall\, n \in \mathbb{N} : 0 < x \leq n$. Daraus folgt $\forall\, n \in \mathbb{N} : x \in T_n$ und das bedeutet gerade $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n$. Ist umgekehrt $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n$, so gilt natürlich $x \in T_1 =]0, 1]$.

(c) Es gilt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n = \mathbb{R}^+ :=]0, \infty[$:
Für $x \in \mathbb{R}^+$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \leq n$, also $\exists\, n \in \mathbb{N} : 0 < x \leq n$. Daraus folgt $\exists\, n \in \mathbb{N} : x \in T_n$ und das bedeutet gerade $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$. Ist umgekehrt $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$, so gilt natürlich $\exists\, n \in \mathbb{N} : x \in T_n =]0, n]$, also $x \in \mathbb{R}$ und $0 < x$.